YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

25.9.2013

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (*) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. **a)** Ratkaise yhtälö $x^2+6x=2x^2+9$.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

c) Esitä polynomi $x^2-9x+14$ ensimmäisen asteen polynomien tulona.

2. **a)** Millä muuttujan x arvoilla polynomin $P(x)=x^4-x^3+x$ derivaatta saa arvon 1?

b) Määritä funktion $4x+\cos(4x)$ kaikki integraalifunktiot.

c) Positiivinen luku a on 25 prosenttia pienempi kuin luku b. Kuinka monta prosenttia luku b on suurempi kuin a?

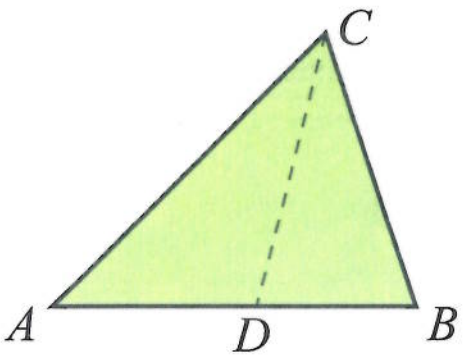
3. **a)** Määritä vektoreiden $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$ ja $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}$ välisen kulman likiarvo asteen kymmenesosan tarkkuudella.

b) Millä parametrin s arvolla vektorit $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$ ja $\vec{c}=s\vec{i}+(1-s)\vec{j}$ ovat yhdensuuntaiset?

4. Millä parametrin k arvoilla käyrien $y=kx^2$ ja $y=k(x-2)^2$ leikkauspisteeseen piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

5. Pisteestä $A(1,-1,0)$ siirrytään 9 pituusyksikköä vektorin $\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ suuntaan pisteeseen B ja siitä edelleen 10 pituusyksikköä vektorin $3\vec{i}-4\vec{k}$ suuntaan pisteeseen C. Määritä pisteen C koordinaatit.

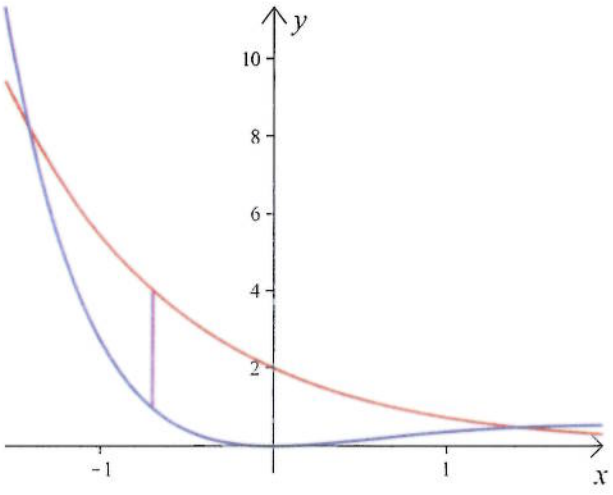
6. Kolmion ABC kulman C puolittaja leikkaa sivun AB pisteessä D. Pisteiden välisille etäisyyksille on voimassa $CD = 6$, $AD = 4$ ja $DB = 3$. Määritä kolmion sivujen AC ja BC pituuksien tarkat arvot.



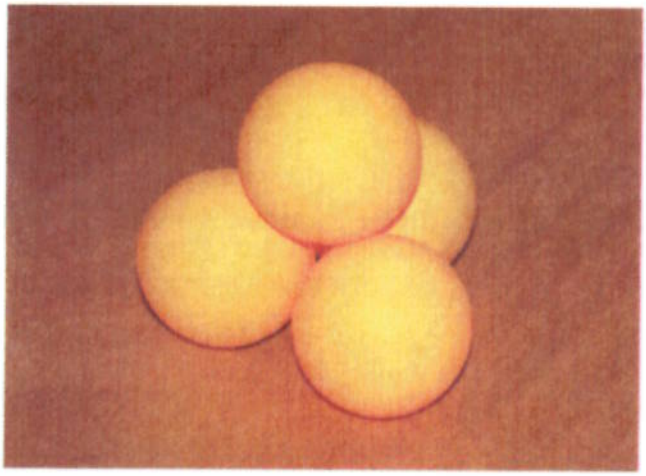
7. Laske integraali $\int_0^2 |x^3 - x|\,dx$.

8. Kaksipäiväisiin turnajaisiin osallistui kaikkiaan 329 ritaria. Heistä oli ensimmäisenä päivänä paikalla 302 ja toisena 285. Millä todennäköisyydellä turnajaisiin osallistunut ritari oli paikalla molempina päivinä?

9. Käyrien $y = 2e^{-x}$ ja $y = x^2e^{-x}$ väliin jäävään rajoitettuun alueeseen asetetaan y-akselin suuntainen jana oheisen kuvion mukaisesti. Määritä tämän janan suurin mahdollinen pituus. Anna vastauksena tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.



10. Pöydällä on kolme samankokoista palloa, joista kukin koskettaa kahta muuta. Niiden päälle asetetaan neljäs samanlainen pallo, joka koskettaa kaikkia kolmea alkuperäistä palloa. Mikä on rakennelman korkeus? Anna vastauksena tarkka arvo pallojen säteen avulla lausuttuna.



Kuva: Pekka Alestalo 2012

11. Olkoon

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{kun } x\neq 0,\\ 1, & \text{kun } x=0.\end{cases}$$

Laske integraalin $\int_0^1 f(x)\,dx$ likiarvo käyttämällä puolisuunnikassääntöä, kun jakovälejä on viisi.

12. Merkitään $R(x)=\dfrac{9x^2-1}{3x^2-5x-2}$. Määritä raja-arvo

a) $\lim\limits_{x\to\infty} R(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} R(x)$

13. Osoita epäsuoraa todistusta käyttämällä, että $\sqrt[3]{2}$ ei ole rationaaliluku.

***14.** Tarkastellaan tasokäyrää, jonka yhtälö on $2x^2+2y^2-3xy-2x+2y-4=0$.

a) Määritä käyrän ja koordinaattiakselien leikkauspisteet. (2 p.)

b) Osoita, että kaikki leikkauspisteet ovat saman ympyrän kehällä, ja määritä tämän ympyrän yhtälö. (3 p.)

c) Suora kulkee origon ja b-kohdan ympyrän keskipisteen kautta. Missä pisteissä tämä suora leikkaa alkuperäisen käyrän? (2 p.)

d) Onko alkuperäinen käyrä ympyrä? (2 p.)

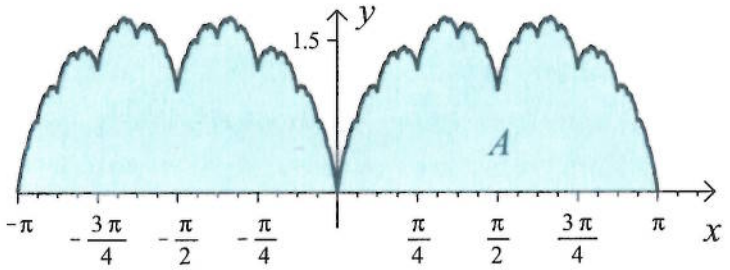
***15.** Kaava $f_k(x)=2^{-k}\left|\sin\left(2^k x\right)\right|$ määrittelee jokaisella $k=0,1,2,\ldots$ funktion $f_k : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

a) Piirrä funktioiden f_0, f_1 ja f_2 kuvaajat välillä $[-\pi,\pi]$. (2 p.)

b) Laske integraalit $\int_0^{\pi} f_k(x)\,dx$, kun $k=0,1,2$. (2 p.)

c) Määritä lausekkeen $A_n=\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\pi} f_k(x)\,dx$ tarkka arvo kaikilla $n=0,1,2,\ldots$ (3 p.)

d) Laske raja-arvo $A=\lim_{n\to\infty} A_n$. (2 p.)



YLIOPPILASTUTKINTO-LAUTAKUNTA

25.9.2013

MATEMATIIKAN KOE
LYHYT OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. **a)** Ratkaise yhtälö $(x-2)^2=4$.

b) Millä muuttujan x arvolla lausekkeet $2x+3$ ja $-(x+3)$ saavat saman arvon?

c) Laske lausekkeen $a(b-2)+(a-b)^2-b(1-a)$ arvo, kun $a=2$ ja $b=-2$.

2. **a)** Missä pisteissä suora $y=-3x+12$ leikkaa koordinaattiakselit?

b) Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 2x+y=4 \\ -x+2y=1. \end{cases}$

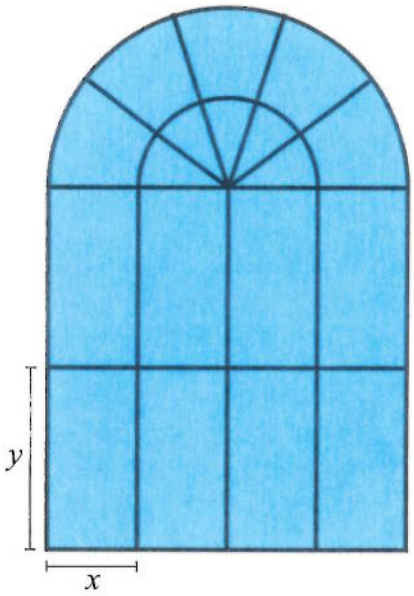
c) Suorakulmion kanta on 11 cm ja korkeus 7 cm. Sen kanta lyhenee 20 prosenttia, ja korkeus kasvaa 20 prosenttia. Kuinka monta prosenttia suorakulmion pinta-ala pienenee?

3. Tasakylkisen kolmion kylki on 90 m ja kanta 40 m.

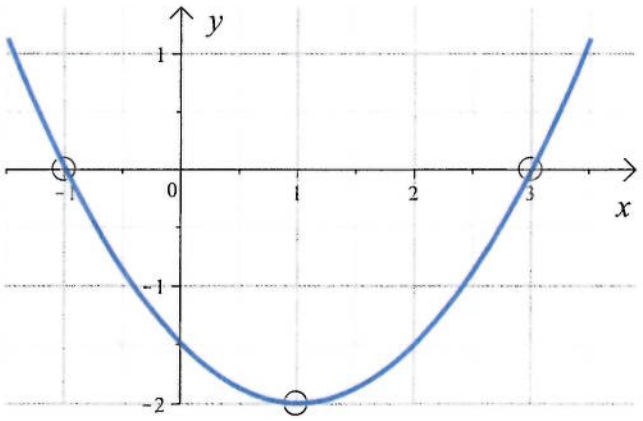
a) Laske kolmion huippukulma asteen tarkkuudella.

b) Laske kolmion pinta-ala neliömetrin tarkkuudella.

4. Kuvan kaari-ikkunassa on lasin tukena rimoja. Kuinka paljon rimaa tarvitaan kuvan mukaiseen kaari-ikkunaan, kun $x=20$ cm ja $y=40$ cm? Rimaa käytetään kaikkiin kuvion janoihin ja puoliympyröiden kaariin. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.



5. Oheinen kuvaaja esittää paraabelia $y = ax^2 + bx + c$. Määritä vakiot a, b ja c käyttämällä kuvioon ympyröillä merkittyjä pisteitä.



6. Talouspaperirullan korkeus on 21 cm, täyden rullan ulkohalkaisija on 12 cm ja sen sisähalkaisija 4,5 cm. Mikä on rullan halkaisija silloin, kun paperin tilavuudesta on jäljellä puolet? Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.

7. Auton jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Mittauksissa havaittiin, että jarrutusmatka nopeudesta 40 km/h on 11,0 metriä.

a) Mikä on auton jarrutusmatka nopeudesta 80 km/h?

b) Auton jarrutusmatkaksi mitattiin 21,3 metriä. Mikä oli auton nopeus jarrutuksen alkaessa? Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

8. Pussissa on punaisia ja valkoisia palloja. Todennäköisyys sille, että väriä näkemättä valitsee punaisen pallon, on 0,4. Kuinka monta punaista palloa pussissa on, jos siinä on n kappaletta valkoisia palloja?

9. Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 4]$.

10. Maalämpöpumppuja myyvän yrityksen liikevaihto kymmenkertaistui kahdessakymmenessä vuodessa. Kuinka monta prosenttia liikevaihto kasvoi vuodessa, kun vuotuinen kasvuprosentti pysyi koko ajan samana? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

11. Eräällä matematiikan kurssilla oppilaat saivat vain arvosanoja 10, 9 ja 8. Niitä esiintyi suhteessa $1:2:3$. Laske kurssin arvosanojen keskiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

12. Korkeushyppääjän eri-ikäisenä saavuttamia tuloksia voidaan vertailla Seppo Sarnan laajasta tilastollisesta aineistosta kehittämän muunnoskaavan

$$T = t + k \lg \frac{a}{35}$$

avulla. Kaavassa t on hyppääjän saavuttama todellinen tulos a vuoden ikäisenä, T on muunnettu tulos ja k tilastomateriaaliin perustuva kerroin, jonka arvo on 201,4 cm. Korkeushypyssä tulokset ilmaistaan senttimetrin tarkkuudella.

a) Raimo hyppäsi 19-vuotiaana juniorina tuloksen 196 cm, 23-vuotiaana ennätyksensä 200 cm ja 40-vuotiaana veteraanina tuloksen 175 cm. Aseta nämä tulokset paremmuusjärjestykseen, kun niitä verrataan muunnoskaavan avulla.

b) Missä iässä hypätty tulos 175 cm on muunnettuna 233 cm? (233 cm oli sisäratojen miesten Suomen ennätys vuoden 2012 alussa.)



<http://www.ts.fi/online/urheilu/196683.html>. Luettu 5.3.2012.

13. Eräässä tosi-TV-sarjassa kilpailijoiden tehtävänä on kerätä kulta- ja hopearahoja. Yhteensä niitä saa kerätä enintään 60 kappaletta. Kultarahan arvo on 25 € ja hopearahan arvo 20 €. Rahat täytyy kuljettaa ohuessa muovipussissa, joka kestää kolikoita vain yhden kilogramman verran. Yksi kultaraha painaa 20 grammaa ja hopearaha 10 grammaa. Kuinka monta kulta- ja hopearahaa kilpailijan kannattaa kerätä, jotta saaliin arvo on mahdollisimman suuri?

14. Abiturientti saa lahjoituksen, jonka suuruus on verojen jälkeen 12 000 €. Hän sijoittaa sen vuodeksi kahteen rahastoon, joiden vuotuiset korot ovat verojen jälkeen 3,5 % ja 5,5 %.

a) Lahjoituksesta x euroa sijoitetaan 3,5 % tuoton tarjoavaan rahastoon ja loput toiseen rahastoon. Esitä koko sijoituksen arvo y muuttujan x avulla lausuttuna, kun $0 \le x \le 12\,000$.

b) Piirrä a-kohdan funktion kuvaaja välillä $0 \le x \le 12\,000$.

15. Olkoot $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k}$ ja $\overline{b} = \overline{j} - 2\overline{k}$.

a) Laske $2|\overline{a}|^2 + 2|\overline{b}|^2$.

b) Laske $|\overline{a} + \overline{b}|^2 + |\overline{a} - \overline{b}|^2$.