YLIOPPILASTUTKINTO-LAUTAKUNTA

28.9.2012

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (*) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. Ratkaise yhtälöt

a) $2(1-3x+3x^2)=3(1+2x+2x^2)$

b) $|x|=1+x$

c) $1-x=\dfrac{1}{1-x}$

2. Sievennä lausekkeet

a) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$

b) $\dfrac{x^2-9}{x+3}$

c) $\ln\dfrac{x}{2}+\ln\dfrac{e^x}{x}+\ln 2$

3. **a)** Määritä funktion

$$f(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$$

derivaatan arvo kohdassa $x=0$.

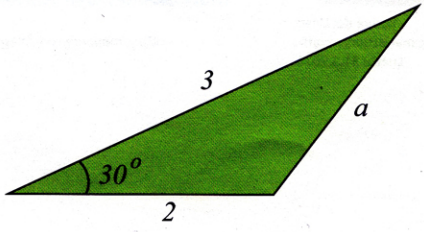
b) Laske integraalin

$$\int_0^{\pi}\left(1+\sin\frac{x}{3}\right)dx$$

tarkka arvo.

4. **a)** Olkoon $\alpha\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ sellainen kulma, että $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$. Määritä lukujen $\sin\alpha$ ja $\tan\alpha$ tarkat arvot.

b) Laske oheisessa kuvassa olevan kolmion sivun pituuden a tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.



5. Määritä polynomin $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$ suurin ja pienin arvo välillä $[2,6]$.

6. Laske paraabelin $y^2 = 4x$ ja suoran $4x - 3y = 4$ väliin jäävän rajoitetun alueen pinta-ala. Anna vastauksena tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo. Piirrä kuvio.

7. Erään mallin (R. MacArthur & E. O. Wilson, 1967) mukaan saarella pesivien lintulajien lukumäärä n riippuu saaren pinta-alasta A likimain kaavan $n = kA^b$ mukaisesti, missä k ja b ovat saaresta riippumattomia positiivisia vakioita.

a) Havaintojen perusteella kahdella Kanariansaarella on saatu seuraavat arvot:

$n_1 = 20,\ A_1 = 10{,}2\ \text{km}^2$ (Alegranza),

$n_2 = 6,\ A_2 = 0{,}0158\ \text{km}^2$ (Roque del Oeste).

Määritä näiden tietojen perusteella vakiot k ja b kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

b) Arvioi mallin avulla La Palman saarella ($A = 708\ \text{km}^2$) pesivien lintulajien lukumäärää.



Alegranza <http://www.lanzarote.org/blog/?p=629>.
Luettu 31.3.2011.



Roque del Oeste
<http://www.reptilesdecanariastjorge.com>.
Luettu 31.3.2011.



La Palma
<http://mappery.com/map-of/La-Palma-Physical-Map>.
Luettu 29.3.2011.

8. Kiireisellä professorilla on yksi luento jokaisena viitenä arkipäivänä, mutta hän ehtii pitää päivittäisen luentonsa vain 80 prosentin todennäköisyydellä.

a) Millä todennäköisyydellä hän ehtii pitää viikon kaikki luennot?

b) Millä todennäköisyydellä vain yksi viidestä luennosta jää pitämättä?

c) Määritä viikossa pidettyjen luentojen lukumäärän odotusarvo.

9. Olkoot

$$\overline{a} = (\cos\varphi - 2\sin\varphi)\overline{i} + \overline{j} + (\sin\varphi + 2\cos\varphi)\overline{k},$$
$$\overline{b} = (\cos\varphi + \sin\varphi)\overline{i} + \overline{j} + (\sin\varphi - \cos\varphi)\overline{k}.$$

a) Osoita, että vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan kaikilla $\varphi \in \mathbf{R}$.

b) Olkoon $\varphi = 0$. Onko olemassa sellaisia kertoimia $s, t \in \mathbf{R}$, että $\overline{i} - \overline{j} = s\overline{a} + t\overline{b}$?

10. Tutki, kuinka monta ratkaisua yhtälöllä $e^{x+a} = x$ on vakion $a \in \mathbf{R}$ eri arvoilla.

11. **a)** Geometrisen jonon kaksi peräkkäistä termiä ovat rationaalilukuja. Osoita, että jonon kaikki termit ovat rationaalilukuja.

b) Geometrisessa jonossa on ainakin kaksi rationaalista termiä. Osoita, että rationaalisia termejä on äärettömän monta.

12. Erään vuorokauden lämpötilaa $f(t)$ tutkittiin ajan t funktiona mittaamalla lämpötila Celsius-asteina kolmen tunnin välein keskiyöstä alkaen. Tuloksena saatiin seuraava taulukko:

t	0.00	3.00	6.00	9.00	12.00	15.00	18.00	21.00	24.00
$f(t)$	10,2	10,7	12,3	13,8	15,8	17,9	17,0	15,5	14,2

Arvioi vuorokauden keskilämpötilaa

$$\frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)\,dt$$

laskemalla siinä esiintyvä integraali puolisuunnikassäännön avulla.

13. Määritä raja-arvo $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln(4x+3) - \ln(3x+4)\right)$.

***14.** Sijoittaja käytti osakkeen kurssikehityksen arvioimiseen todennäköisyysjakaumaa, jonka tiheysfunktion maksimi saavutetaan markkina-arvolla $20{,}50$ € ja joka on nolla yli viiden euron poikkeamilla markkina-arvosta $20{,}50$ €. Tiheysfunktio on jatkuva, ja sen kuvaaja koostuu kahdesta lineaarisesta osasta välillä $15{,}50 - 25{,}50$ €.

a) Määritä tiheysfunktion lauseke. (3 p.)

b) Millä todennäköisyydellä osakkeen markkina-arvo on alle 19 €? (2 p.)

c) Muiden kurssien nousu sai sijoittajan muuttamaan jakaumaa epäsymmetriseksi niin, että maksimi saavutettiin edelleen arvolla $20{,}50$ €, mutta nollakohta $25{,}50$ € siirtyi pisteeseen $30{,}50$ €. Muilta ominaisuuksiltaan jakauma pysyi samantyyppisenä kuin aikaisemmin. Määritä tämän uuden jakauman odotusarvo. (4 p.)

***15.** Suora ympyrälieriö on pallon sisällä niin, että sen molempien pohjien reunat sivuavat pallon pintaa. Pallon pinta-alan suhdetta lieriön koko pinta-alaan merkitään symbolilla t. Lieriön koko pinta-alalla tarkoitetaan sen vaipan ja pohjien yhteenlaskettuja pinta-aloja.

a) Määritä lieriön korkeuden suhde lieriön pohjan säteeseen parametrin t avulla lausuttuna. (2 p.)

Millä parametrin t arvoilla

b) tällaista lieriötä ei ole olemassa (2 p.)

c) on täsmälleen yksi tällainen lieriö (3 p.)

d) on kaksi tällaista lieriötä? (2 p.)