Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение

Средняя общеобразовательная школа №292

С углубленным изучением математики

Фрунзенского района Санкт-Петербурга

ПРОЕКТНО – ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

По дисциплине математика

ТЕМА ПРОЕКТА

«Последовательность Фибоначчи»

Выполнили:

ученица 9 класса «Б» Юлия Спирякова,

ученик 9 класса «А» Легкодымов Андрей

Преподаватель:

Афанасьева Виктория Викторовна

Санкт-Петербург

2014-2015 гг.

Содержание

§1 История

§2 Определение

§3 Применение на практике

§4 Свойства

§5 Доказательства некоторых свойств

§6 Задачи

§7 Спираль золотого сечения

§8 Треугольник Паскаля

§9 Программирование на языке Паскаль

§10 Вывод

**История изучения чисел Фибоначчи**

Числа Фибоначчи были известны еще в древней Индии в трудах математиков VIII—XII веков и применялись там в метрических науках и стихосложении.

В Европе стали известны благодаря труду Леонардо Пизанского (Фибоначчи), описавшего их в труде «Книга абака» (Liber abaci, 1202 г.). Также Фибоначчи рассмотрел другие задачи, а сама книга способствовала распространению в Европе позиционной системы счисления, более удобной для вычислений, чем римская нотация; в книге были подробно исследованы возможности применения индийских цифр.

Леонардо Пизанский никогда не называл себя Фибоначчи. Слово Fibonacci — сокращение от двух слов «filius Bonacci», появившихся на обложке «Книги абака»; само слово Боначчи нужно понимать как прозвище, означавшее «удачливый». Сам он обычно подписывался Боначчи.

Отец Фибоначчи по торговым делам часто бывал в Алжире, и Леонардо изучал там математику у арабских учителей. Позже Фибоначчи посетил Египет, Сирию, Византию, Сицилию, ознакомился с достижениями античных и индийских математиков в арабском переводе, где, скорее всего, и узнал о последовательности.

**Определение**

Числа Фибоначчи — элементы рекуррентной числовой последовательности, в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.

Отрезок последовательности:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, …

**Применение на практике**

Считается, что Фибоначчи узнал о последовательности во время путешествия своего отца по торговым делам, а вывел ряд, решая задачу о кроликах.

Он рассматривает развитие идеализированной (биологически нереальной) популяции кроликов, предполагая:

* изначально есть новорожденная пара кроликов (самец и самка);
* со второго месяца после своего рождения кролики начинают спариваться и каждый месяц производить новую пару кроликов;
* кролики никогда не умирают.

Сколько пар кроликов будет через год?

Решение

В начале первого месяца есть только одна новорожденная пара (1).

В 2 месяце по-прежнему только одна пара кроликов, но уже спарившаяся (1)

В 3 месяце первая пара рождает новую пару и опять спаривается (2)

В 4 месяцепервая пара рождает еще одну новую пару и спаривается, вторая пара только спаривается (3)

В 5 месяце первая пара рождает еще одну новую пару и спаривается, вторая пара рождает новую пару и спаривается, третья пара только спаривается (5)

В конце n-го месяца количество пар кроликов будет равно количеству пар в предыдущем месяце плюс количество новорожденных пар, которых будет столько же, сколько пар было два месяца назад.

**Свойства**

* F_1+F_2+F_3+\dots+F_n=F_{n+2}-1
* F_1+F_3+F_5+\dots+F_{2n-1}=F_{2n}
* F_2+F_4+F_6+\dots+F_{2n}=F_{2n+1}-1
* F_{n+1}F_{n+2}^{}-F_nF_{n+3}=(-1)^{n}
* F_1^2+F_2^2+F_3^2+\dots+F_{n}^2=F_nF_{n+1}
* F_n^2+F_{n+1}^2=F_{2n+1}
* F_{2n}=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2
* F_{3n}=F_{n+1}^3+F_n^3-F_{n-1}^3
* F_{5n}=25F_{n}^5+25(-1)^{n}F_n^3+5F_{n}

**Доказательства некоторых свойств:**

1. F1 + F2 + ... + Fn = Fn+2 - 1.

F1 = F3 - F2

F2 = F4 - F3

...

Fn-1 = Fn+1 - Fn

Fn = Fn+2 - Fn+1.

Сложив все эти равенства, получим

F1 + F2 + ... + Fn = Fn+2 - F2,

и так как F2 = 1, получим F1 + F2 + ... + Fn = Fn+2 - 1.

2. F1 + F3 + F5 + ... + F2n-1 = F2n

Поступим так же:

F1=F2-F0

F3=F4-F2

…

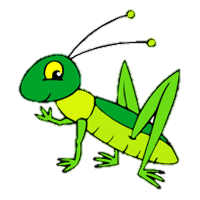
F2n-1=F2n-F2n-2

Сложим, получим

F1+F3+F5+…+F2n-1=F2n-F0,

а т.к. F0=0, то F1+F3+F5+…+F2n-1=F2n

**Задачи**

Условие

1. Предположим, что имеется лента, разбитая на клетки и уходящая вправо до бесконечности. На первой клетке этой ленты сидит кузнечик. Из любой клетки кузнечик может перепрыгнуть либо на одну, либо на две клетки вправо. Сколькими способами кузнечик может добраться до n-ой от начала ленты клетки?

Решение

Пусть an — количество способов, которыми кузнечик может добраться до n-ой клетки. Тогда

a1 = a2 = 1. Кроме того, в n + 1-ую клетку кузнечик может попасть либо из n-ой клетки, либо перепрыгнув n-ую клетку. Поэтому an + 1 = an - 1 + an. Отсюда an = Fn - 1.

1. Чему равны числа Фибоначчи с отрицательными номерами *F*-1, *F*-2, ..., *F*-n,...?

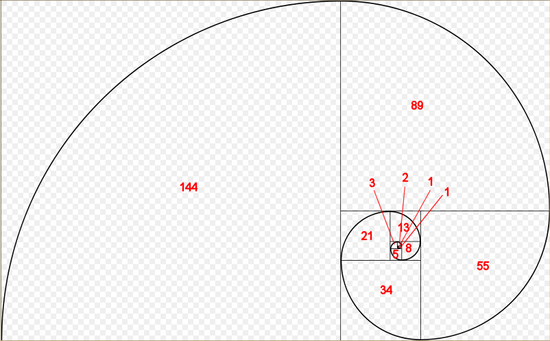
Иногда числа Фибоначчи рассматривают и для отрицательных значений как двусторонне бесконечную последовательность, удовлетворяющую тому же рекуррентному соотношению. При этом члены с отрицательными индексами легко получить с помощью эквивалентной формулы «назад»:

Получаем, что F-1 = F1-F0 = 1-0 = 1  
F-2 = F0-F-1 = 0-1 = -1  
….  
F-n = F-n+2-F-n+1 = F2-n+F1-n

1. В последовательности чисел Фибоначчи выбрано 8 чисел, идущих подряд. Докажите, что их сумма не является числом Фибоначчи.

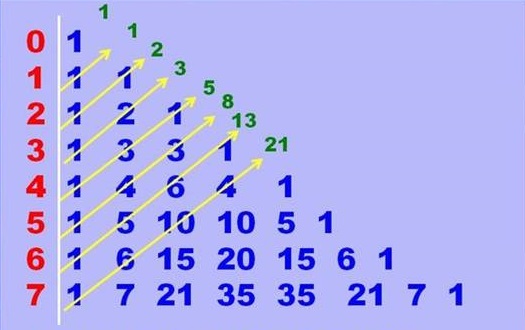
Из свойств чисел следует равенство *F*n + *F*n + 1 +...+ *F*n + 7 = *F*n + 9 - *F*n + 2.

Это число не может быть числом Фибоначчи, поскольку *F*n + 8 < *F*n + 9 - *F*n + 2 < *F*n + 9.

**Спираль золотого сечения**

На основе этого ряда чисел существует спираль Фибоначчи, очень похожая на спираль золотого сечения. Спираль Фибоначчи отличается тем, что у нее есть начало(два одинаковых квадрата, с которых она строится), a спираль золотого сечения закручивается бесконечно.

Также соотношение стоящих рядом чисел Фибоначчи с увеличением n приближается к значению золотой пропорции. Поэтому числа Фибоначчи, как и закон золотого сечения, очень часто проявляются в природе (например, расположение семян или листьев).

**Треугольник Паскаля**

Треугольник Паскаля — бесконечная таблица, имеющая треугольную форму. На вершине и по бокам стоят единицы, каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел.  
 Если расположить одну из сторон треугольника по вертикали и пронумеровать строки (вершина – нулевая строка), то числа в строке будут равны коэффициентам квадрата той же степени, что и номер строки.

Сумма же чисел восходящей диагонали, начинающейся с первого числа n-1-ой строки, является n-ым числом Фибоначчи.

**Техническое задание**

**Программирование на языке Паскаль**

Задача 1

По номеру члена последовательности, определить его значение.

Решение

Program Fibonachi;

var a, i, n, ch, pr, v: integer;

Begin

i:=1; v:=1; ch:=1; pr:=0; a:=1;

writeln (Введите номер числа');

readln(n);

for i:=2 to n do begin

v:=ch + pr;

pr:=ch;

ch:=v;

end;

writeln(n, '--->',v);

End.

Задача 2

Ввести с клавиатуры число и определить, является ли это число членом последовательности.

Решение

Program F1;

Var n, f, fn, fn1, fn2: integer;

Begin

fn:=0;

fn1:=1;

writeln('Введите число' );

read( f );

n:=f;

repeat

fn:=fn1+fn;

fn1:=fn-fn1;

until fn>=f;

if fn=f then write (f,' Число Фибоначчи')

else write(f,' Не является числом Фибоначчи');

end.

Задача 3

Ввести с клавиатуры число Фибоначчи и определить его номер.

Program F1;

Var n, f, fn, fn1, fn2: integer;

Begin

n:=0;

fn1:=0;

fn2:=1;

writeln('Введите число' );

read( f );

repeat

Fn:=fn1+fn2;

fn2:=fn1;

fn1:=fn;

n:=n+1;

until fn>=f;

if fn=f then write ('№ ',n)

else write('Не является числом Фибоначчи');

end.

**Вывод**

Итак, можно сделать следующие выводы:

* Мы рассмотрели историю открытия последовательности Фибоначчи
* Немного изучили биографию Леонардо Пизанского
* Изучены основные формулы, свойства и с помощью них решены соответствующие задачи
* Мы изучил области применения последовательности в окружающей природе и рассмотрели задачи по областям
* Составили и отладили три программы в среде Pascal.