ПРАВИТЕЛЬСТВО САНКТ – ПЕТЕРБУРГА КОМИТЕТ ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение гимназия№293

Красносельского административного района г. Санкт – Петербурга

Адрес: Санкт-Петербург, Ленинский пр., д. 94, корпус 2., лит. А

Телефон/факс (812) 751-26-61, e-mail: gaivenisnat@yandex.ru

ПРОЕКТНО – ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

**ТЕМА ПРОЕКТА**

**Полусумма и сумма Минковского**

Руководитель проекта

Маркова Анна Александровна,

учитель математики

Работу выполнил

Сорокина Светлана Олеговна

11А класс

г. Санкт – Петербург

2015 год

**Содержание:**

Введение

Теоретическая часть

1. Полусумма фигур по Минковскому
2. Сумма фигур по Минковскому
   1. Сравнение с полусуммой фигур

Сумма фигур на сфере

1. Многоугольники на сфере
2. Сумма фигур на сфере

Применение задач на практике

1. Сумма фигур на сфере (Задача 1)
2. Сумма фигур в пространстве (Задача 2)
3. Сумма фигур на плоскости (Задача3)

Заключение

Список литературы

3

5

5  
20  
  
20

23

23  
24

27

27  
28  
  
  
29

37

39

**Введение.**

Дети изучают математику с 1 по 11 класс и продолжают её изучать в университетах. Но, к сожалению, школа не может ознакомить ученика со всеми интересными задачами.   
В августе 2013 года я вместе с командой шахматистов поехала в Калининград. В один из вечеров мы забрели в Кёнигсбергский университет. Там меня поразила русская фамилия Минковский в списке профессоров, преподававших в этом университете. В сентябре прошлого года вместе со своею учительницей математики А.А.Марковой мы нашли материалы о Германе Минковском. Оказалось, что он внёс огромный вклад в науку. Он развивал квадратичные формы; вывел знаменитую лемму «Теорема Минковского о выпуклом теле», на основе которой развили всю геометрию чисел; ввёл четырёхмерное пространство, которое помогло Эйнштейну в разработке теории относительности; также Минковский внёс серьёзный вклад в гидродинамику и многое другое (6,7).   
Анна Александровна порекомендовала мне статью Н.Б.Васильева «Сложение фигур» из журнала «Квант», которую она когда-то изучала в университете (1). Эта статья стала поводом для проведения научно-исследовательской работы, потому что её материал соответствует уровню знаний ученика 10 класса. Под понятием суммы фигур имеется ввиду не объединение фигур в единое целое, а операция, которая преобразует фигуры. Например, суммой двух треугольников будет шестиугольник, а суммой двух отрезков будет параллелограмм. Эту сумму фигур называют «векторной суммой» или «суммой Минковского» - по имени изучившего ее математика Германа Минковского (1864-1909).  
В нашей работе имелось бы мало смысла, если бы она была направлена только на решение теоретических задач, поэтому мы задались целью найти применения данного материала в реальной жизни, а для этого нам надо было изучить свойства суммы фигур на плоскости и в пространстве путём изучения их на примерах разных фигур. Изучение суммы фигур всегда начинают с полусуммы, в связи с простотой построения и того, что фигура полусуммы с удвоенными измерениями равна фигуре суммы.   
Цели нашего исследования заключаются в поиске практического применения суммы Минковского и в развитии теории о сумме фигур. Для достижения этих целей мы ставим перед собой следующие задачи:

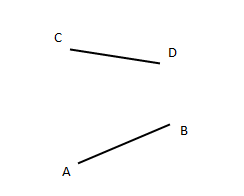
* Раскрытие понятий полусуммы и суммы фигур путём решения задач
* Переход к понятию суммы через сравнение с полусуммой
* Перенос операций на сферу для дальнейших поисков практического применения
* Применение полученных знаний

**Полусумма фигур по Минковскому.**

Начнём с решения простых задач для того, чтобы разобраться с понятием полусуммы.  
Определение: Пусть заданы две фигуры F и G (два множества точек на плоскости или в пространстве). Назовём полусуммой этих фигур множество всех середин отрезков, один конец которых принадлежит F, а другой – G. Обозначим это множество так F\*G.

Задача 1.

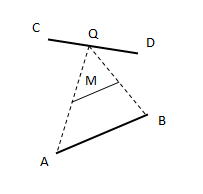
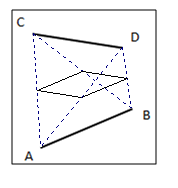
Даны два отрезка |АВ| и |CD|. Найти множество точек, в которые может попасть середина отрезка, один конец которого Р лежит на |AB|, а другой конец Q на |CD|.

  
**Рис.1.**Дано: отрезки |AB| и |CD|, Рϵ|AB|, Qϵ|CD| (Рис.1)

Найти: множество точек, в которые попадает середина отрезка |PQ|.

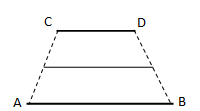
Решение:

Рассмотрим первый случай, когда |AB| и |CD| непараллельны.  
Обозначим середину отрезка |PQ| буквой M.

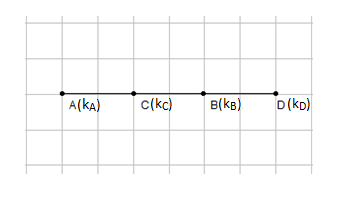
1. Зафиксируем положение точки Q. Точка Р пробегает весь отрезок |AB|, значит М пробегает среднюю линию треугольника QAB (рис.2) – отрезок с концами в серединах отрезков |QA| и |QB|.  
     
     
   **Рис.2**
2. Если точка Q пройдет весь отрезок |CD|, то средняя линия треугольника QAB, очевидно займет целый параллелограмм (Рис.3), вершинами которого будут середины отрезков |AC|, |AD|, |BC|, |BD|.   
   **Рис.3**

Теперь рассмотрим случай, когда |AB| и |CD| параллельны:  
А) |AB| и |CD| принадлежат разным параллельным прямым.

Так как |AB| и |CD| принадлежат разным прямым, то ABCD – трапеция, а середины М отрезков |PQ| заполнят среднюю линию. (Рис.4)

  
**Рис.4**

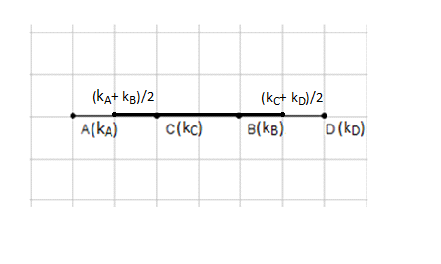
Б) Теперь рассмотрим случай, когда |AB| и |CD| принадлежат одной прямой. Чтобы не разбирать положение точек A, B, C и D, мы будем решать задачу *алгебраическим способом*:

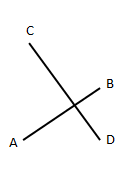
**Рис.5**

Дано: Прямая АD – числовая ось,   
координаты точек: А (kA), B (kB), C (kC), D (kD);   
kA< kB, kC< kD. (Рис.5)

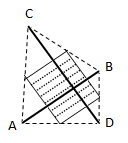
Найти: полусумму |AB| и |CD|.

Решение:

Для решения воспользуемся фактом:   
Множество чисел (ХР + ХQ)/2 , где ХРϵ[kA; kB], XQϵ[kC; kD] – отрезок [(kA+ kB)/2; (kC+ kD)/2] (Рис.6)  
**Рис.6**Длина полученного отрезка равна (|AB| + |CD|)/2, из этого следует, что в случае, когда отрезки параллельны и не лежат на одной прямой, длина полусуммы тоже равна (|AB| + |CD|)/2 потому что в этих случаях полусумма не зависит от положения в пространстве, так как в обоих случаях отрезки параллельны. А в случае, когда отрезки не параллельны, периметр полусуммы равен |AB| + |CD|, потому что её границы образованы 4 серединными линиями треугольников с вершинами в крайних точках.  
В) Случай, когда |AB| и |CD| скрещиваются.

  
**Рис.7**Дано: скрещивающиеся отрезки |AB| и |CD|. (Рис.7)  
Найти: полусумму |AB| и |CD|.

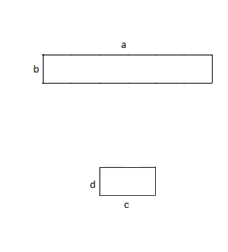
Решение:

В данном случае фигура ABCD будет являться тетраэдром. Решение данной задачи будет сходно с решением первого случая. (Рис.8) **Рис.8**

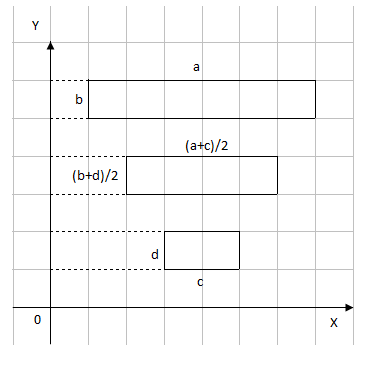
Искомая фигура – параллелограмм, который является сечением тетраэдра ABCD, границы которого параллельны |AB| и |CD|, а вершинами будут середины ребер |АВ|, |АС|, |ВD| и |АD|.  
Задача 1 полностью решена. Свойства, выведенные в ходе решения, пригодятся для дальнейших задач.  
Факт для решения дальнейших задач:   
Граничные точки фигур принадлежат этим фигурам. Это позволит нам избежать повторения слов: «отрезок», «середина», «конец». То есть, когда мы будем говорить «сторона», мы будем иметь ввиду сторону и прилежащие к ней вершины.   
Основные свойства.

1. Если и F и G состоят из одной точки: F={P}, G={Q}, то F\*G – тоже одна точка (середина отрезка |PQ|). Будем обозначать её P\*Q.
2. Если F – отрезок, G – одна точка. ( F=|AB|, G={Q}), то F\*G отрезок дины |AB|/2, потому что F\*G является средней линией треугольника QAB.
3. Если F и G – параллельные отрезки |AB| и |CD|, то F\*G – параллельный им отрезок длины (|AB| и |CD|)/2 («средняя линия» трапеции, Рис.4)
4. Если F и G – непараллельные отрезки на плоскости: F = |AB|, G=|CD|, то F\*G – параллелограмм с вершинами A\*C, A\*D, B\*D, B\*C (Рис.3)

Задача 2.

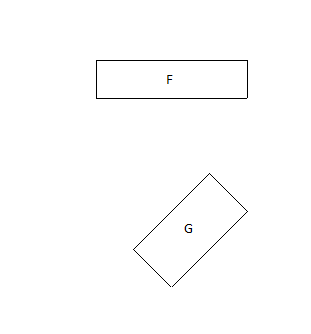
  
**Рис.9**Дано: прямоугольник со сторонами a и b, прямоугольник со сторонами c и d. (Рис.9)  
Найти: полусумму данных прямоугольников.

Решение:

Полусумма двух прямоугольников F и G размерами a×b и c×d, у которых стороны a и c параллельны, - прямоугольник размерами (a+c)/2×(b+d)/2. (Рис.10)  
В системе координат 0xy, у которой ось 0x параллельна сторонам a и с, координаты х точек прямоугольников F и G пробегают отрезки длиной а и с, координаты у – отрезки длиной b и d, а полусуммы этих координат – отрезки соответственно длиной (а+с)/2 и (b+d)/2. ( По факту, использованному в решении задачи 1.) Полусумма будет расположена симметрично относсительно данных прямоугольников, то есть координаты её точек будут равны полусумме соответствующих координат соответствующих точек данных фигур.   
  
**Рис.10**

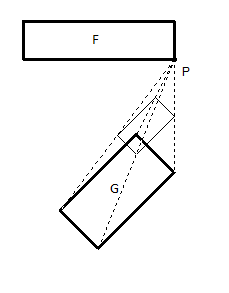
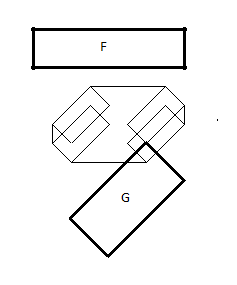
Задача 2а.

Найдите полусумму следующих двух фигур:  
А) Двух непараллельно расположенных прямоугольников.

 **Рис.11**

Дано: прямоугольник F, прямоугольник G (F и G – непараллельно расположены) (Рис.11)  
Найти: полусумму F и G.

Решение:

1. Зафиксируем точку P прямоугольника F. Множество точек P\*Q, где Q пробегает прямоугольник G – прямоугольник {P}\*G гомотетичный G с коэффициентом ½ (и с центром гомотетии Р) (Рис.12)
2. Теперь нам надо взять объединение всех прямоугольников {P}\*G где Р пробегает F.   
      
   **Рис.12 Рис.13**
3. Нужное объединение – выпуклый восьмиугольник (Рис.13), стороны которого параллельны сторонам данных прямоугольников, а по длине равны их половинам.
4. Если сравнить решение 2 и 2а, то можно заметить, что форма фигуры F\*G может существенно измениться при повороте одной из фигур.

Задача 2б.

Найдите полусумму правильного треугольника и его стороны.

В

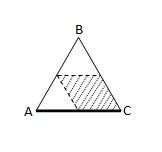
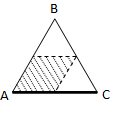
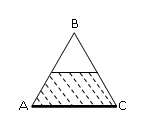
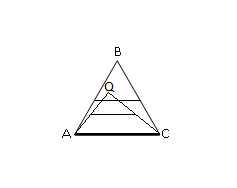
A

С

**Рис.14**

Дано: треугольник АВС – равносторонний. (Рис.14)  
Найти: полусумму треугольника АВС и стороны |АС|

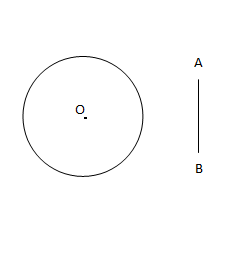
Решение:

1. Полусуммой сторон |АС| и |ВС| будет параллелограмм с вершинами в серединах отрезков |АВ|, |ВС|, |АС| и в общей точке отрезков – точке С (по свойству полусуммы отрезков) (Рис.15)  
      
   **Рис.15**
2. Аналогично, полусуммой сторон |АС| и |АВ| будет параллелограмм зеркально симметричный полусумме |АС| и |ВС|.(Рис.16)  
   **Рис.16**
3. Полусуммой правильного треугольника АВС и его стороны |АС| будет являться объединение полученных параллелограммов, которые образуют равнобедренную трапецию. (Рис.17)  
   **Рис.17**
4. Если зафиксировать некоторую точку Q внутри треугольника АВС, то полусуммой этой точки и стороны |АС| будет являться средняя линия треугольника QАС, которая будет лежать внутри треугольника АВС и ниже его средней линии –  **Рис.18**верхнего основания полученной трапеции, то есть будет лежать в трапеции. (Рис.18)

Следовательно, не зависимо от того берем ли мы треугольник вместе с внутренней областью или без полусуммой будет являться трапеция.

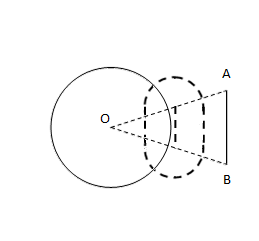
Задача 2д.

Найдите полусумму отрезка и круга.

  
**Рис.19**Дано: круг с центром О, отрезок |AB|.  
Найти: полусумму отрезка |АВ| и круга с центром О.

Решение:

Зафиксируем точку Р отрезка АВ. Тогда множество точек P\*Q, где Q пробегает круг с центром О – круг гомотетичный данному с коэффициентом ½ (и центром гомотетии Р)

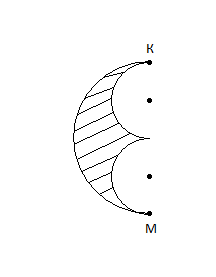
1. Теперь нам надо взять объединение всех таких кругов, где Р пробегает отрезок АВ. Такое объединение – круги с радиусом равным ½ радиусу данного круга и с центрами, находящимися на средней линии треугольника ОАВ.  
     
   **Рис.20**
2. Ответ в нашей задаче не зависит от положения отрезка относительно окружности, значит и в случаях, когда отрезок касается или пересекает окружность, полусумма будет аналогичной, с точностью до сдвига.  
   *Полусумму можно находить, как и сумму при помощи векторов. Для этого введем определение полусуммы в векторной форме.  
   Множество всех концов М векторов   
    , где Р и Q – произвольные точки фигур F и G соответственно, называется полусуммой фигур F и G.  
   Это определение помогает нам сделать вывод о том, что при параллельном перемещении одной из фигур на полусумма перемещается на вектор, равный . Следовательно, при сдвиге фигур полусумма не изменится с точностью до сдвига.  
   В отличие от суммы полусумма не будет зависеть от выбранной точки О. (Этот момент мы рассмотрим чуть позже.)*

Задача 2ж.

Найдите полусумму полуокружности с самой собой.

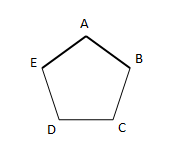
Решение:

1. Зафиксируем положение точки Р. Если Q пробегает всю полуокружность, тогда множество точек РQ – полуокружность гомотетичная данной с коэффициентом ½ и центром гомотетии Р. А центр полученной полуокружности – середина |РО|.
2. Для того, чтобы ответить на задачу, нам надо взять объединение всех таких полуокружностей, где Р пробегает полуокружность КМ. Такое объединение – фигура, заключенная между данной полуокружностью с одной стороны, и двумя полуокружностями с радиусом равным ½ от данной полуокружности с другой.

  
**Рис.21**

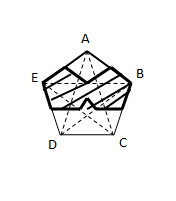
Задача 2и.

Найдите полусумму следующих двух фигур: одна фигура – две соседние стороны правильного пятиугольника, вторая – три остальные его стороны.

  
**Рис.22**

Дано: АВСDE – правильный пятиугольник, (|EA|U|AB|) – первая фигура,   
(|BC|U|CD|U|DE|) – вторая фигура.  
Найти: полусумму первой и второй фигур.

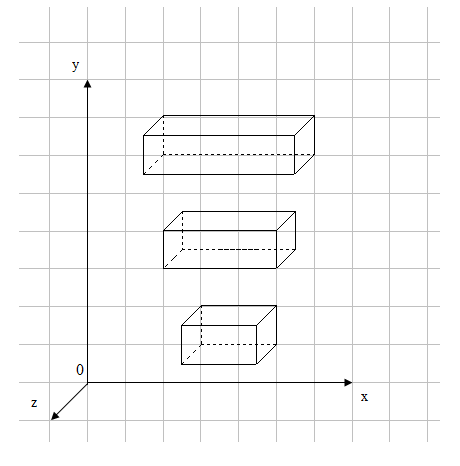
Решение:

1. Полусуммой сторон |АE| и |ED| будет параллелограмм с вершинами в серединах отрезков |АE|, |ED|, |АD| и в общей точке отрезков – вершине Е (по свойству полусуммы отрезков).
2. Аналогично, полусуммой сторон |АE| и |DС| будет ромб с вершинами в серединах отрезков |АС|, |АD|, |ЕD| и |ЕС|.
3. По этому же свойству полусуммой сторон |АE| и |ВС| будет параллелограмм с вершинами в серединах отрезков |АС|, |АВ|, |ЕВ| и |EC|.
4. Так как пятиугольник ABCDE правильный то полусуммы (|AE|\*|ED|) и (|АВ|\*|ВС|); (|AE|\*|DC|) и (|АВ|\*|DC|); (|AE|\*|BC|) и (|AB|\*|ED|), будут зеркально равны.
5. Полусуммой двух соседних сторон правильного пятиугольника с тремя другими его сторонами будет являться объединение шести полученных параллелограммов, которые образуют десятиугольник, изображенный на рисунке.  
     
   **Рис.23**Мы решили все задачи под номером 2. Пока что мы разбирали свойства полусуммы на плоскости. Теперь мы ознакомимся с полусуммой в пространстве:

Задача 3а.

Найдите полусумму двух параллельно расположенных параллелепипедов.

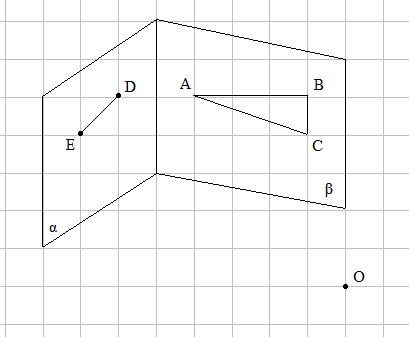
Решение:

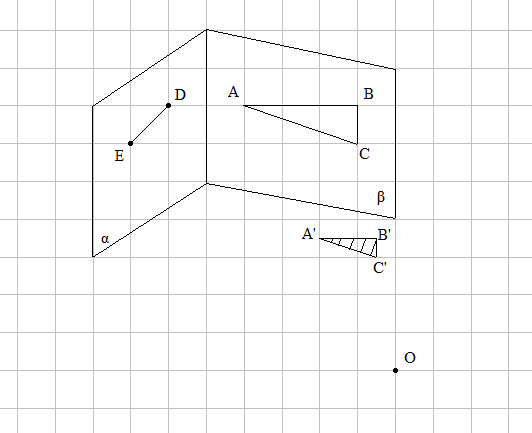
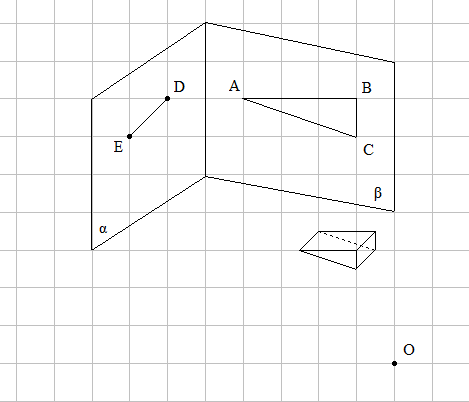
Исходя из решения задачи 2 следует, что полусуммой двух параллельно расположенных параллелепипедов буде являться параллелепипед, стороны которого равны полусуммам соответственных сторон данных параллелепипедов. И его расположение в пространстве будет симметрично, относительно данных параллелепипедов.  
  
**Рис.24**

1. В координатном пространстве с направлениями х, у и z координатам верхнего параллелепипеда будут соответствовать отрезки: [a1, a2] по оси х, [b1, b2] по оси у, [c1, c2] по оси z. А нижнему параллелепипеду соответствуют координаты: хϵ[d1,d2], yϵ[e1,e2], zϵ[g1,g2].
2. По аналогии с задачей с прямоугольниками координатами полусуммы будут являться: xϵ[, ], уϵ[, ], zϵ[, ].

Задача 3б.

Найдите полусумму отрезка и треугольника, не лежащих в параллельных плоскостях.

 **Рис.25**Дано: отрезок |ED|cα, треугольник АВСcβ, αՈβ.  
Найти: |ED|\*АВС.

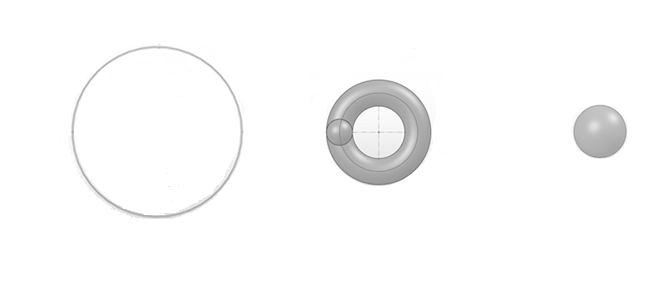
Решение:  
Ранее (задача 2д) мы говорили о том, что полусумму можно выражать через вектора. В данном случае будет рациональнее применить векторный способ решения, который обычно используется для нахождения суммы фигур.  
Для начала построим гомотетию треугольника АВС с коэффициентом ½(Рис.26). Для этого выберем произвольную точку О, которая будет являться центром гомотетии.  
..   
**Рис.26 Рис.27**

Треугольник А’В’С’, расположенный параллельно плоскости β, будет являться полусуммой АВС с точкой О. A’ – середина отрезка |ОА|, B’ – отрезка |ОВ|, С’ – отрезка |ОС|.  
Теперь, чтобы найти полусумму данных фигур нам надо к полученному треугольнику А’В’С’ прибавить всевозможные вектора , где М лежит на |ED|.   
Тогда: . При добавлении векторов , мы получим призму (вместе с внутренностью), которая строится присоединением вектора к каждой точке треугольника А’В’С’.  
Искомой полусуммой будет эта призма, сдвинутая на вектор .  
Полученная фигура является призмой, основаниями которой являются треугольники гомотетичные треугольнику АВС с коэффициентом ½ и параллельные плоскости β. (В полусумму входит и внутренняя область призмы). Вершинами получено призмой являются середины отрезков. Если мы возьмем вместо треугольника другой многоугольник, то построения будут выполняться аналогично.

Задача 3в.

Найдите полусумму окружности и шара.  
**Рис.28**

Решение:

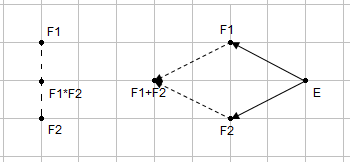
1. Зафиксируем точку Р окружности, тогда множество точек Р\*Q, где Q пробегает шар – шар гомотетичный данному с коэффициентом ½ ( и центром гомотетии Р). А центр шара будет лежать на середине отрезка, соединяющего точку Р и центр данного шара.
2. Теперь мы должны взять объединение всех шаров, гомотетичных данному с коэффициентом ½, где Р пробегает всю окружность. Такое объединение – совокупность шаров на окружности радиуса равным ½ радиуса данной, которая образует открытый тор, то есть кольцо.
3. А в случае, когда радиус шара больше радиуса окружности происходит перекрывание гомотетичных окружностей и образуется закрытый тор.  
   **Рис.29**

Закономерности построений полусуммы фигур на плоскости сохраняются и являются справедливыми при перенесении в трёхмерное пространство.  
Рассмотрим теперь сумму Минковского.

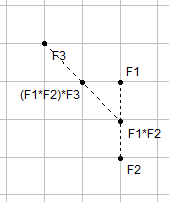
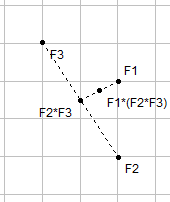
**Сумма фигур.  
Сравнение суммы и полусуммы фигур.**

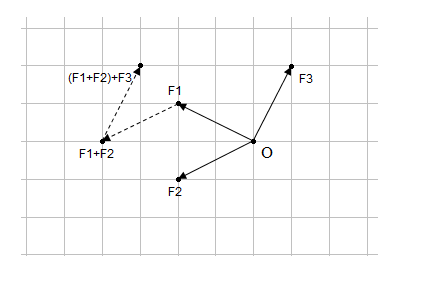
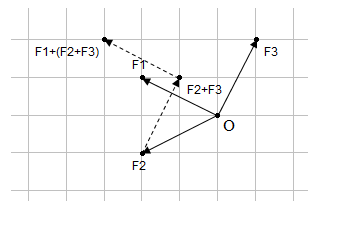
Мы с вами уже ознакомились с определением полусуммы фигур. Для дальнейшего исследования введём понятие суммы.  
Множество всех концов М векторов , где Р и Q – произвольные точки фигур F и G соответственно, называется суммой фигур F и G (или суммой Минковского).  
Сумма обозначается F+G.  
Факт: Положение суммы зависит от положения выбранной точки построения, а полусумма всегда будет одной и той же точкой – серединой отрезка, соединяющего две данные точки.  
Множество всех концов М векторов   
 , где Q – произвольная точка фигуры F, а λ - данное положительное число, называется произведением F на λ. Такая фигура является гомотетией с коэффициентом λ. Эта фигура обозначается λF.  
Чтобы нам было легче понять разницу между суммой и полусуммой, мы будем рассматривать свойства на простых примерах.

Свойство 1.

F1+F2=F2+F1 – переместительный закон.  
  
**Рис.30**  
По полученному рисунку мы видим, что переместительный закон справедлив для обоих случаев.

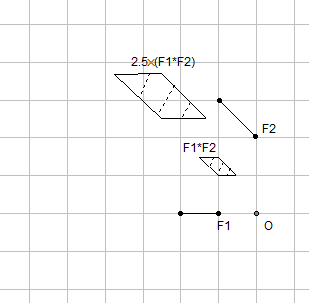
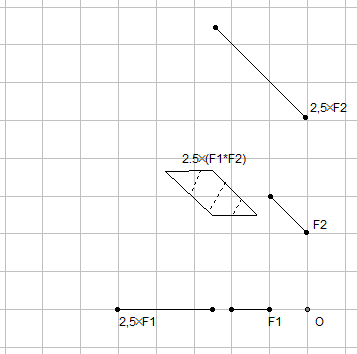
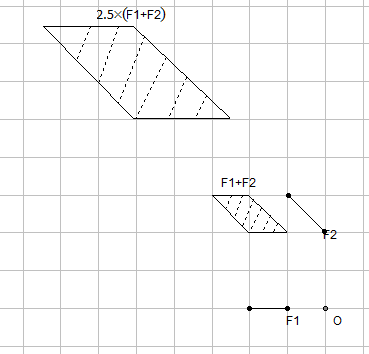
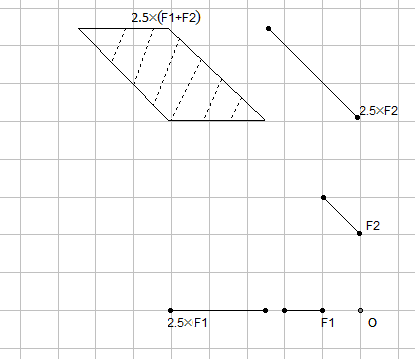
Свойство 2.

(F1+F2)+F3=F1+(F2+F3) – сочетательное свойство или ассоциативность.  
    
 **Рис.31 Рис.32**

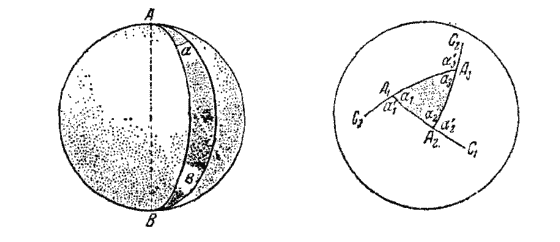
По данным рисункам мы видим, что ассоциативность не является справедливой для полусуммы трёх фигур.  
   
**Рис.34 Рис.35**

А рисунки 34 и 35, помогают нам сделать вывод о том, что ассоциативность справедлива для суммы фигур.

Свойство 3.

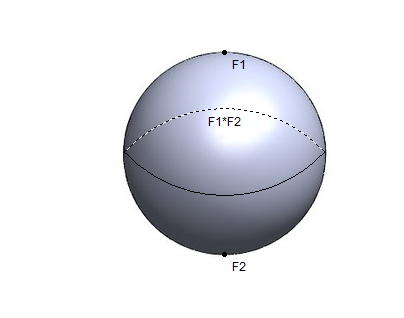
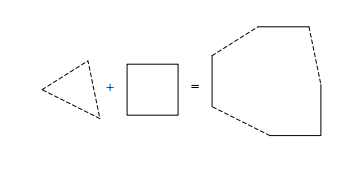
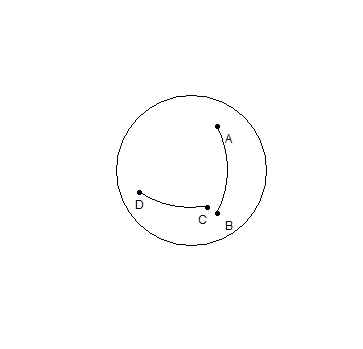
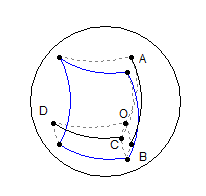
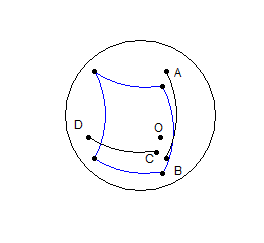
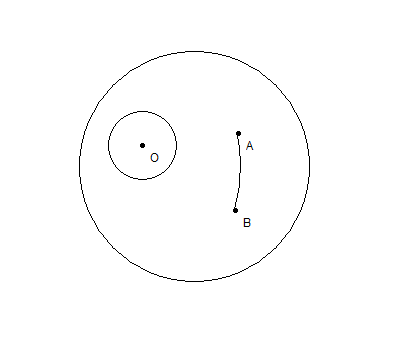
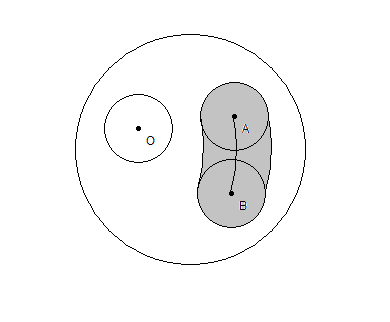
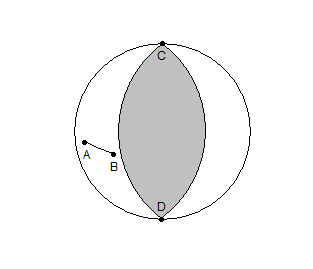
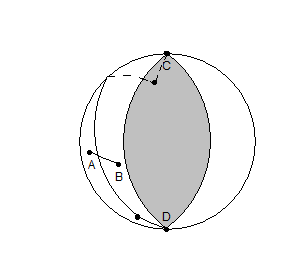
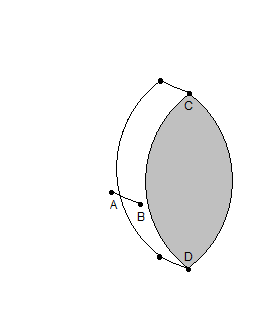
λ(F1+F2)=λF1+λF2  
Полусумма:  
   
**Рис.36** λ(F1\*F2) **Рис.37** λF1\*λF2  
Сумма:  
   
**Рис.38** λ(F1+F2) **Рис.39** λF1+λF2  
Таким образом, мы видим, что единственный плюс полусуммы в том, что она не зависит от выбора точки О, но за счёт несправедливости ассоциативного свойства, сумма фигур оказывается универсальнее. Исходя из данных наблюдений, можно сделать вывод, что при дальнейшем решении задач рациональнее всего будет применять сумму фигур, а не полусумму.

**Сумма фигур на сфере.  
Многоугольники на сфере.**

В нашей работе мы разобрали свойства полусуммы и суммы в плоскости и в пространстве. Теперь мы поставили перед собой задачу изучить свойства этих операций на сфере. Чтобы это сделать, нам нужно понять, чем построения на сфере отличаются от построений на плоскости.  
Большие круги на поверхности сферы играют роль, аналогичную роли прямых в [планиметрии](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F). В планиметрии отрезок – кратчайший путь между двумя любыми точками, а на сфере кратчайший путь пройдёт по линии большого круга. Через любые две точки на поверхности сферы, кроме диаметрально противоположных, можно провести единственный большой круг. Через диаметрально противоположные точки на сфере можно провести сколько угодно больших кругов.  
Сферическим многоугольником называется фигура, составленная замкнутым рядом дуг больших кругов; каждая дуга не должна превосходить полуокружности большого круга. Большой круг – круг, который делит пополам шар и его поверхность.Мы будем рассматривать простые многоугольники - это такие многоугольники, у которых контур не пересекает сам себя. Плоский многоугольник имеет самое меньшее три стороны, сферический может иметь две(2,3,4)  
  
**Рис.40** Сферические многоугольники

**Сумма на сфере.**

Теперь мы знаем, чем фигуры на сфере отличаются от фигур на плоскости.Но что будет рациональнее использовать на сфере: сумму или полусумму?   
Мы знаем, что полусумма – совокупность точек, лежащих на серединах всевозможных отрезков, один конец которых принадлежит F1, а другой – F2. А если мы попробуем найти полусумму двух диаметрально противоположных точек, то множество F1\*F2 будет экваториальная окружность, что отличается от свойства полусуммы на плоскости (полусуммой двух точек на плоскости будет являться точка).

   
**Рис.41** Полусумма двух диаметрально **Рис.42** Сумма фигур по Минковскому  
противоположных точек  
Множество всех концов М векторов , где Р и Q – произвольные точки фигур F и G соответственно, называется суммой фигур F и G (или суммой Минковского). Но на окружности мы можем провести два вектора из точки О по направлению к точке фигуры, поэтому берётся наименьший вектор. А если мы будем искать сумму и F будет диаметрально противоположна точке построения О, тогда вектор не определен.  
Исходя из наших рассуждений, на сфере неудобно использовать данные операции. Но что же делать? Для суммирования нам поможет факт, используемый А.Г.Хованским в своей работе «Системы уравнений с многогранниками Ньютона общего положения»: «С точностью до параллельного переноса сумма по Минковскому двух многоугольников на плоскости - это многоугольник, стороны которого – это все стороны первого многоугольника и все стороны второго»(рис.42)(5).  
Этот факт справедлив для любых выпуклых фигур, и он нам поможет избавиться от векторов при построении суммы на сфере.  
Теперь рассмотрим, чем отличается сумма фигур на сфере от суммы фигур на плоскости. Из рассмотренных ранее свойств, мы знаем, что суммой двух непараллельных отрезков на плоскости будет являться параллелограмм. На сфере вместо отрезков мы используем дуги, соединяющие точки по большой окружности. И вектора у нас будут направлены по дуге.  
Рассмотрим сумму двух дуг на сфере:  
    
**Рис.43 Рис.44 Рис.45**Мы видим, что стороны получившейся фигуры параллельны, но это не параллелограмм.   
Теперь мы рассмотрим сумму окружности и дуги на сфере:  
   
**Рис.46** **Рис.47**  
Если сравнить решение этих двух случаев с задачами 1 и 2д, то можно заметить, что сумма и полусумма фигур на сфере и на плоскости похожи, только точки только на плоскости мы пользуемся отрезками, а на сфере – дугами. (Полусумма фигур – гомотетия суммы фигур с коэффициентом ½, поэтому мы можем сравнивать сумму на сфере с полусуммой в плоскости.) Рассмотрим его свойства сферической фигуры, имеющей две стороны на примере е суммы с дугой.  
    
**Рис.48 Рис.49 Рис.50**  
Если разрезать шар, и развернуть его, то фигура суммы будет выглядеть как на рис.50.  
Таким образом при переходе на сферу закономерности операций сохраняются, но вместо отрезков мы используем дуги. Теперь решим задачу, показывающую возможность использования указанных закономерностей в условиях земной поверхности.

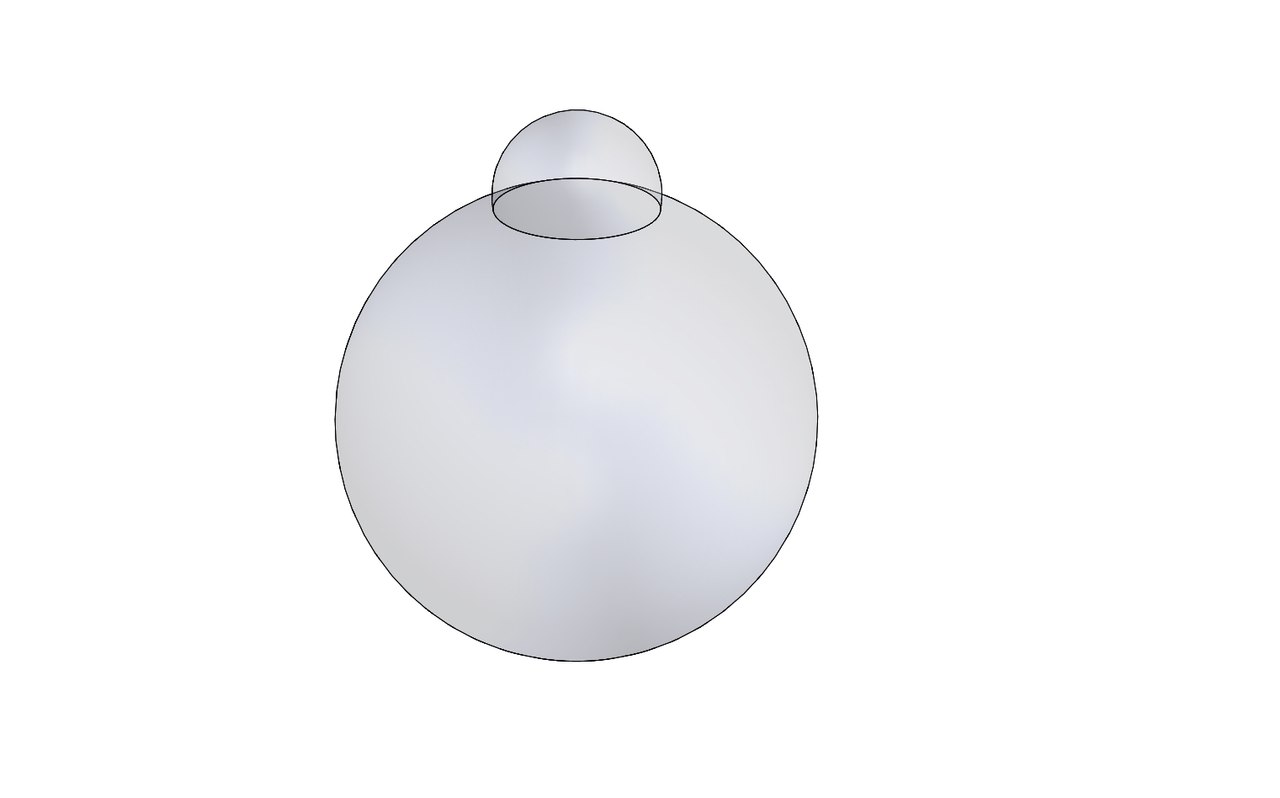
**Применение.**

Теперь, изучив свойства полусуммы и суммы, мы можем перейти к способам применения данной теории на практике.

Задача 1.

На поверхности Земли в эпицентре O произошел ядерный взрыв мощностью N. Найдите фигуру, образующую надземную зону очага поражения.

Решение:

Данную задачу надо представить как сумму на сфере векторов , направленных во все стороны и исходящих из одной точки. В данном случае сфера – Земля, вектора – взрыв. В результате суммирования получится изображенная ниже фигура, где сфера – Земля, а фигура на её поверхности – взрыв.  
  
**Рис.51** Взрыв атомной бомбы на поверхности Земли: А – Земля; В – сумма векторов

А

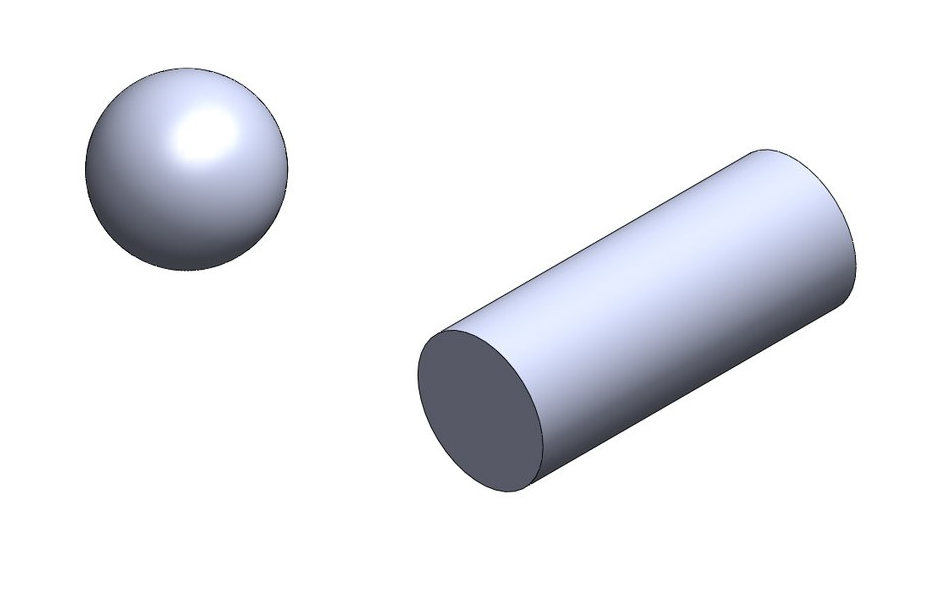
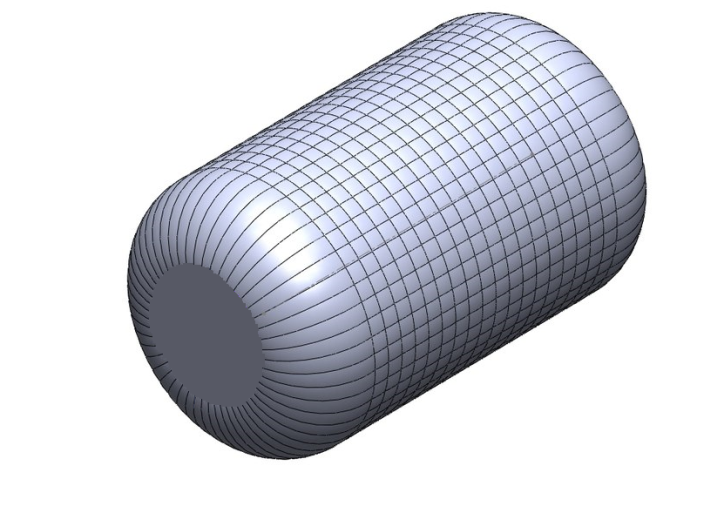
В

Мы видим, что сумма Минковского помогает вычислить возможную зону поражения при ядерных взрывах. Таким образом, возможности применения суммы Минковского очень широки и могут использоваться для решения задач как плоскости, так и в пространстве; как для локальных объектов, так и для глобальных событий в масштабах земной поверхности.

Задача 2.

В сосуде, имеющем форму цилиндра, находится сжиженный газ. При повышении температуры внутренняя энергия молекул резко увеличилась, что спровоцировало взрыв мощностью N, распространяющейся равномерно во все стороны. Как можно геометрически описать пространство, затронутое действием данного взрыва?

Решение:

Так как мощность взрыва распределяется равномерно, то нам надо просуммировать цилиндр, в котором произошел взрыв, с шаром радиуса N.Сумма фигуры F с шаром радиуса N с центром в О – это множество точек на расстоянии не больше N от F, где О пробегает фигуру F.  
  
**Рис.52** Взаимодействующие фигуры: А – сумма векторов ; B – предмет взрыва   
**Рис.53** Распространение очага поражения при взрыве сосуда цилиндрической формы

В

А

На рисунке мы видим пространство, на которое подействовал данный взрыв. Эта фигура будет являться цилиндром со сглаженными углами.

Задача 3.

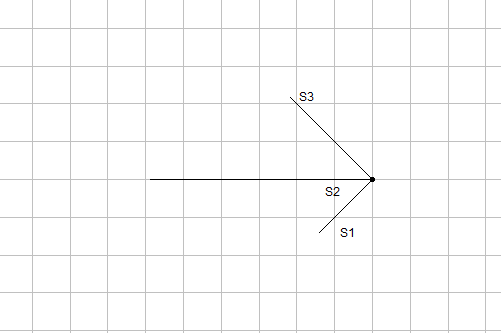
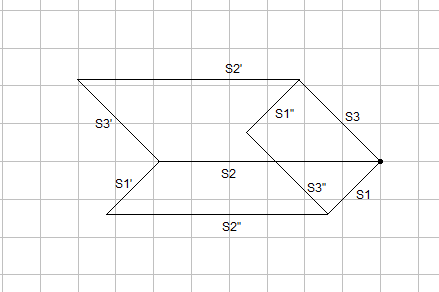
От незагашенного окурка в одной точке загорелся лес. Ветер дул в течение времени со скоростью , затем t2 – со скоростью , … , tn – со скоростью . Пожар распространяется от загоревшихся участков со скоростью ветра (причем эти участки продолжают гореть). Какой участок выгорел за это время? А если пожар, кроме того, распространяется равномерно по всем направлениям со скоростью ? (А.Савин)

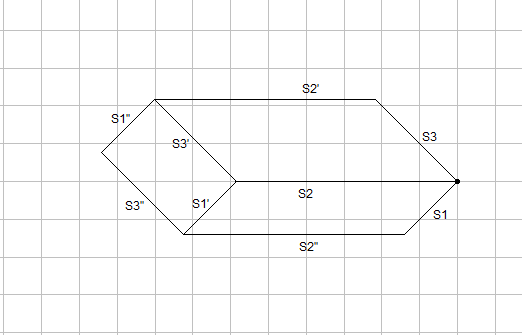
Решение:

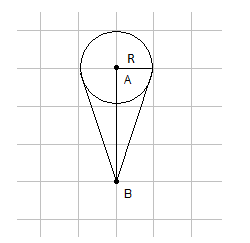
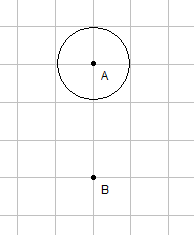
Для большей приближенности к жизни мы возьмем данные с сайта gismeteo.ru в городе Санкт-Петербург на 4 февраля.(8)  
  
**Рис.54** Метеорологические данные

Чтобы расчет был быстрее и проще, мы возьмём пучок векторов, определяющих направление ветра, длину вектора будем определять по формуле: s=Vt.  
Так как мы взяли метеорологические данные с сайта, то мы можем использовать числовые значения для решения данной задачи. Возьмем промежуток времени от 1:00 до 10:00

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Направление ветра | Время (t,ч) | Скорость (V, м/с) | Скорость (V, км/ч) | Длина вектора (s=Vt, км) |
| ЮЗ | 3 | 2 | 7,2 | 21,6 |
| З | 3 | 2 | 7,2 | 21,6 |
| З | 3 | 4 | 14,4 | 43,2 |
| СЗ | 3 | 3 | 10,8 | 32,4 |
| Длина вектора в ЮЗ направлении: | | | | 21,6 |
| Длина вектора в З направлении: | | | | 64,8 |
| Длина вектора в СЗ направлении: | | | | 32,4 |

Для построения векторов в системе координат зададим значение единичного отрезка 10км.  
  
**Рис.55**Теперь, чтобы найти крайние точки конечной фигуры, мы будем суммировать вектора по часовой стрелке.  
  
**Рис.56**

  
**Рис.57**  
В итоге получается изображенная выше фигура. Всё, что внутри неё, подверглось действию пожара. Теперь не составит труда посчитать площадь пожара, просуммировав площади параллелограммов, образованных векторами.   
Этот метод нам позволяет суммировать любое количество векторов с небольшими затратами времени.  
Мы разобрали простой вариант задачи про пожар. Но у нас еще есть дополнительное условие, где нужно рассчитать фигуру не только при распространении по направлению ветра, но и наличие равномерного распространения пожара.

В этом случае нам надо будет суммировать вот такие вот фигуры:  
  
**Рис.58**  
Где А – место воспламенения пожара в момент времени t1, а В – в момент t2 (t1<t2).  
Но суммировать такие фигуры очень трудно. Гораздо проще суммировать круг с центром А и радиусом R и точку B, выпуклая оболочка которых образует данную фигуру.  
   
 **Рис.59**Выпуклой оболочкой множества Х называется наименьшее выпуклое множество, содержащее Х. Выпуклая оболочка фигуры Х обозначается: conv(Х).

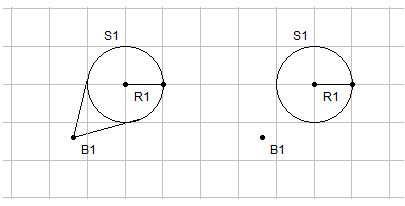
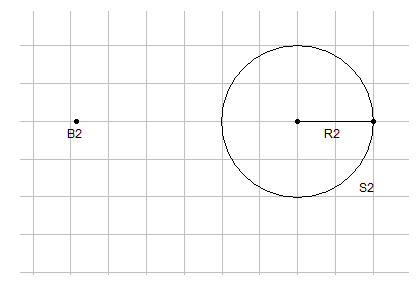
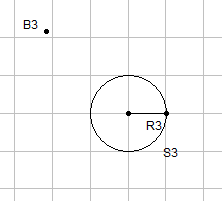
То есть выпуклой оболочкой невыпуклого четырехугольника будет треугольник:

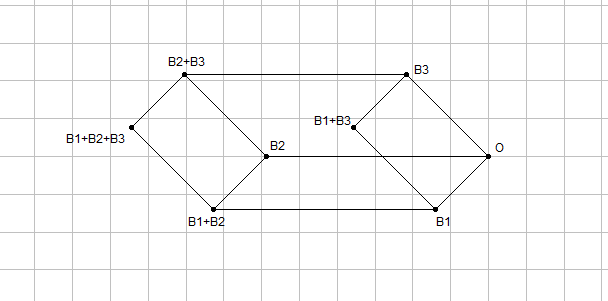
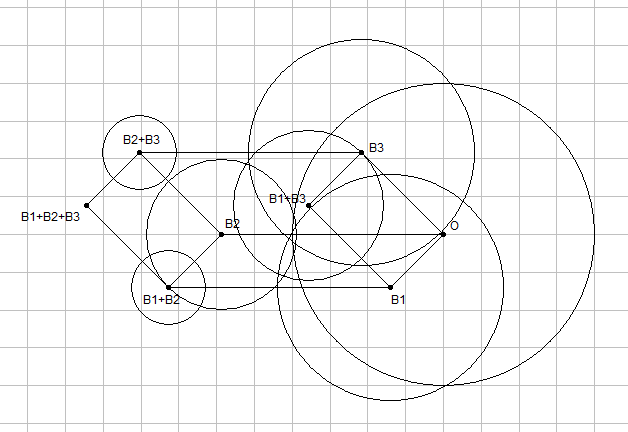
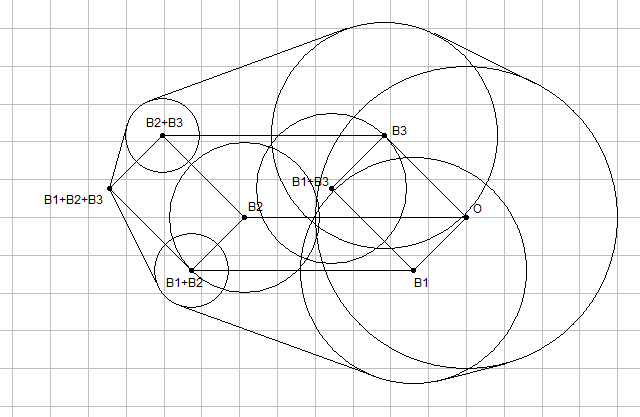
В

А

**Рис.60** А – невыпуклый четырехугольник; В - выпуклая оболочка фигуры А  
Из нашей основной статьи Н.Васильева «Сложение фигур» мы возьмем свойство: «если F и G – выпуклые фигуры, то F\*G – тоже выпукло». Мы знаем, что фигурой суммы будет являться та же самая фигура, что и полусуммы с измерениями в два раза больше чем F\*G. Следовательно: если F и G – выпуклые фигуры, то F+G – тоже выпукло.  
И основное свойство выпуклых оболочек для суммы можно записать так:

conv(F1)+conv(F2) ⊃ F1+F2. (Сумма выпуклых оболочек фигур F1 и F2 содержится в сумме фигур F1 и F2).  
Теперь преобразуем полученное свойство:  
conv (conv(F1)+conv(F2)) ⊃ conv (F1+F2)  
Но так как сумма выпуклых фигур выпукла, то:  
conv (conv(F1)+conv(F2)) ⊃ conv (F1) + conv (F2)  
Значит:  
conv(F1)+conv(F2) = conv (F1+F2)

Мы приведём как пример задачу 2б: полусуммой треугольника без внутренности и полусуммой треугольника с внутренностью (то есть выпуклой оболочки треугольника) будет являться одна и та же трапеция.  
Теперь вернемся к задаче про пожар. Чтобы определить фигуру суммы нам достаточно найти суммы кругов и точек, находящихся на концах сумм наших векторов, рассмотренных в первом варианте задачи про пожар.  
Теперь рассчитаем радиусы окружностей на концах наших фигур: R= ×t, тогда R1=3, R2=6, R3=3. Тогда вместо векторов S1, S2 и S3, у нас будут такие вот построения:  
   
**Рис.61 Рис.62** **Рис.63**  
Теперь нам надо найти сумму: (B1US1)+(B2US2)+(B3US3)  
Для этого нам надо найти сумму каждой фигурой с остальными фигурами, то есть  
(B1US1)+(B2US2)+(B3US3)=(B1+B2+B3)U(B1+B2+S3)U(B1+B3+S2)U(B1+S2+S3)U(B2+B3+S1)U(B2+S1+S3)U(B3+S1+S2)U(S1+S2+S3)

Теперь воспользуемся рисунком из решения простого варианта задачи про пожар и выполним на нём нужные построения:   
  
**Рис.64**После всех выполненных построение у нас получится вот такая вот фигура:  
  
**Рис.65**  
Мы получили изображенную выше фигуру, которая является суммой крайних точек и окружностей данных фигур. Теперь, пользуясь выведенным тождеством, нам нужно взять выпуклую оболочку полученной фигуры:  
  
**Рис.66**Вся внутренняя область полученной фигуры подвергнется действию пожара. Задача про пожар полностью решена. На её примере мы увидели одну из практических возможностей применения суммы Минковского, которая помогает рассчитать опасную зону для различных объектов (нефтепроводов, армейских полигонов, складов боеприпасов и других). Теперь мы приступим к рассмотрению суммы фигур на сфере.

**Заключение.**

В своей работе мы исследовали сумму и полусумму фигур, изучили закономерности построения этих операций в планиметрии и в стереометрии, а также развили их на сфере.  
Решение этих задач даёт простор для работы над практическим применением суммы и полусуммы фигур.  
Сумма фигур часто используется в работах других математиков при проведении исследований, связанных с выпуклыми фигурами (например, работа А.Г.Хованского «Системы уравнений с многогранниками Ньютона общего положения»)(5). Но кроме теоретической пользы есть и практическая. Например, зная форму фигуры, образующейся при пожаре или взрыве, можно легко рассчитать её площадь и объем, что облегчит работу пожарным.  
Проводя исследование, мы изучили методы построения полусуммы и суммы, а также информацию по сферическим многоугольникам, чтобы перенести полусумму и сумму на сферу. А для представления материалов в понятной форме мы научились работать в таких средах проектирования и черчения, как «Живая геометрия» и «AutoCAD».  
Также, выполнение поставленных задач позволяет:

1. Изучить геометрию на более высоком уровне, нежели школьный, так как сумма Минковского входит в программу математических факультетов вузов.
2. Рассмотреть разнообразные задачи, редко встречающиеся в математике.
3. Использовать множество различных способов для нахождения суммы и полусуммы фигур.
4. Рассмотреть перенос суммы и полусуммы фигур на сферу.
5. Изучить помимо теоретического значения практическое применение.

В ходе работы мы сделали следующие выводы:

1. Сумма и полусумма фигур сохраняют свои свойства на плоскости и в трёхмерном пространстве.
2. Рациональнее всего использовать сумму фигур, хотя в некоторых случаях лучше пользоваться полусуммой.
3. Сумма на сфере в отличие от полусуммы сохраняет все свои свойства.
4. Свойства данных операций справедливы для любых фигур.
5. Помимо теоретического значения данные операции имеют некоторое практическое применение.

**Список литературы:**

1. Васильев Н.Б. Сложение фигур // Журнал «Квант» 1976, 4, С.22-29.
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ: Астрель, 2008. 509,[3] с.: ил.
3. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: АСТ: Астрель, 2008. 509,[3] с.: ил.
4. Панина Г. Арифметика многогранников // Журнал «Квант» 2009, 4, С.10-15.
5. Хованский А.Г. Системы уравнений с многогранниками Ньютона общего положения // Общематематический семинар «Глобус» 2006, 3, С.14.

Источники информации:

1. Большая советская энциклопедия. / Под редакцией А.М.Прохоров. М.: Советская энциклопедия. 1969—1978.
2. "Энциклопедия для детей" Математика / Под редакцией М.Д. Аксеновой Россия: Мир энциклопедий Аванта +, 2003. 693с.
3. http://www.gismeteo.ru/ (04.02.2014)