



Intégrales généralisées – Fonction dilogarithme

Auteur : Yves Coudert

Niveaux scolaires :
Etudes Supérieures

Mots clés : Continuité, dérivabilité, convexité, convergence d'intégrale, intégrales de Riemann, suite géométrique, limite d'une somme

ENONCE

On s'intéresse à la fonction dilogarithme définie par : $Li(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1-t} dt$

1) a) A l'aide d'un logiciel de calcul formel ou une calculatrice formelle vérifier que les fonctions f et g définies par: $f(t) = \frac{\ln(t)}{1-t}$ pour $t > 0$ et $t \neq 1$ se prolonge par continuité en 1 puis $g(x) = \frac{x}{e^x-1}$ pour $x > 0$ se prolonge par continuité en 0.

b) Démontrer que pour $x \geq 0$ on a : $0 \leq g(x) \leq 1$.

2) Montrer que l'ensemble de définition de la fonction dilogarithme est $[0; +\infty[$ et justifier qu'elle est dérivable sur $]0; +\infty[$. Donner l'expression de sa dérivée.

3) A l'aide du calcul formel donner une valeur approchée de $Li(0)$ à 10^{-4} près et justifier que la fonction dilogarithme est continue en 0.


4) Montrer à l'aide d'un changement de variable que l'on a : $Li(0) = \int_0^{+\infty} g(x) dx$.

5) a) A l'aide du calcul formel déterminer pour $k \geq 1$ $I_k = \int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx$. Justifier ce résultat à l'aide d'une intégration par partie.

b) Démontrer le résultat : $Li(0) - \sum_{k=1}^n I_k = \int_0^{+\infty} g(x) e^{-nx} dx$ pour $n \geq 1$ et en déduire : $0 \leq Li(0) - \sum_{k=1}^n I_k \leq \frac{1}{n}$. Conclure sur la valeur exacte de $Li(0)$ en utilisant le calcul formel pour calculer : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Nous allons résoudre cet exercice à l'aide de la calculatrice CASIO Fx-CP400+E.

1. Questions préliminaires

a) On va sélectionner l'application  pour calculer les limites avec le clavier numérique :

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t)}{1-t} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x-1} = 1$$

On peut définir par prolongement par continuité :

$$f(1) = -1 \quad \text{et} \quad g(0) = 1$$

