

Equation d'un cercle passant par trois points.

Auteur : Sébastien Cauderlier

Niveaux scolaires :
1^{ère}/Terminale Générales

Mots clés :
Algorithme/Programmation
Géométrie

ENONCE

1. On considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ tels que $y_A \neq y_B$
Écrire une fonction **med** en python qui renvoie une liste contenant le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Dans le cas où $y_A = y_B$, que peut on dire de la médiatrice du segment $[AB]$?
3. On considère trois points non alignés $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$ tels que $y_A \neq y_B$ et $y_A \neq y_C$. Écrire une fonction **cercle** en python qui renvoie la liste $[x_I; y_I, R2]$ où $(x_I; y_I)$ sont les coordonnées du centre du cercle passant par A, B et C et $R2$ est le rayon de ce cercle au carré.
4. Modifier la fonction **cercle** pour prendre en compte les cas $y_A = y_B$ et $y_A = y_C$
5. Ajouter une instruction dans la définition de la fonction **cercle** permettant d'afficher l'équation du cercle.
Tester la fonction **cercle** avec les points suivants: $A(4; 6)$, $B(5; 1)$ et $C(5; 5)$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la médiatrice de $[AB]$. Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -(y_B - y_A) \\ x_B - x_A \end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

Le coefficient directeur de la médiatrice de $[AB]$ est donc: $a = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$

De plus la médiatrice de $[AB]$ passe par le point $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$ milieu de $[AB]$.

L'ordonnée à l'origine de la médiatrice est donc $b = y_M - a \times x_M$

Graph 90+E



On en déduit la fonction `med`:

```
eqcercle.py 001/027 ▶
def med(xA, yA, xB, yB) :
    xM=(xA+xB)/2
    yM=(yA+yB)/2
    a=- (xB-xA)/(yB-yA)
    b=yM-a*xM
    return [a, b]
FILE RUN SYMBOL CHAR A↔a ▶
```

2. Lorsque $y_A = y_B$, la médiatrice de $[AB]$ est parallèle à l'axe des ordonnées. Son équation est de la forme $x = k$ où $k \in \mathbb{R}$.
3. Le point I , centre du cercle est aussi le point d'intersection des deux médiatrices

Soit $AB = med(x_A, y_A, x_B, y_B)$. L'équation de la médiatrice de $[AB]$ s'écrit:

$$y = MAB[0] \times x + MAB[1]$$

Soit $AC = med(x_A, y_A, x_C, y_C)$. L'équation de la médiatrice de $[AC]$ s'écrit:

$$y = MAC[0] \times x + MAC[1]$$

Le point I vérifie les deux équations on a donc:

$$y_I = MAB[0] \times x_I + MAB[1] = MAC[0] \times x_I + MAC[1]$$

Ce qui donne: $x_I(MAB[0] - MAC[0]) = MAC[1] - MAB[1]$ et donc $x_I = \frac{MAC[1] - MAB[1]}{MAB[0] - MAC[0]}$

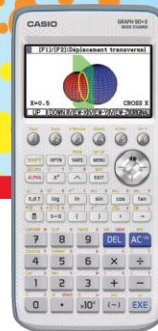
Pour l'ordonnée de I on utilise tout simplement l'une des deux équations, par exemple: $y_I = MAB[0] \times x_I + MAB[1]$

On sait que le rayon du cercle est égale à la distance entre le centre du cercle et l'un des points, on prend par exemple le point A.

$$\text{On a donc } R^2 = (x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2$$

```
def cercle(xA, yA, xB, yB, xC, yC) :
    MAB=med(xA, yA, xB, yB)
    MAC=med(xA, yA, xC, yC)
    xI=(MAC[1]-MAB[1])/(MAB[0]-MAC[0])
    yI=MAB[0]*xI+MAB[1]
    R2=(xA-xI)**2+(yA-yI)**2
    return [xI, yI, R2]
```

Graph 90+E



4. Comme les trois points ne sont pas alignés ils ne peuvent avoir tous les trois la même ordonnée. Dans la fonction **cercle**, les deux médiatrices sont choisies arbitrairement. Nous allons donc ajouter une condition au début du programme pour changer le choix des médiatrices dans le cas où deux ordonnées seraient égales:

Si A et B ont la même ordonnée, on prend les médiatrices de [BC] et [AC].

Si A et C ont la même ordonnée, on prend les médiatrices de [AB] et [BC].

Sinon, on prend les médiatrices de [AB] et [AC].

```
if yA==yB:
  MAB=med(xB,yB,xC,yC)
  MAC=med(xA,yA,xC,yC)
elif yA==yC:
  MAB=med(xA,yA,xB,yB)
  MAC=med(xB,yB,xC,yC)
else:
  MAB=med(xA,yA,xB,yB)
  MAC=med(xA,yA,xC,yC)
```



On pourra utiliser le Copier / Coller pour aller plus vite: **CLIP** **SHIFT** **8** pour sélectionner une partie du programme avec **▶** puis **{COPY}** **F1** et enfin **PASTE** **SHIFT** **9** pour coller ce qui a été copié.

5. On ajoute la ligne suivante dans la définition de la fonction:


```
print ("L'equation est :\n(x-",xI,")^2+(y-",yI,")^2=",R2)
```



\n nous permet de faire un retour à la ligne pour l'affichage de l'équation.

Pour exécuter le programme, sélectionner **{RUN}** (on enregistre au passage) et on teste les points de coordonnées (4 ; 6), (5 ; 1) et (5 ; 5):

```
| CASIO COMPUTER CO. ,
>>>from eqcercle impo
>>>cercle(4,6,5,1,5,5
L'equation est :
(x- 2.0 )^2+(y- 3.0 )
[2.0, 3.0, 13.0]
>>>
[RUN] A↔a CHAR
```

Lorsque le texte est trop long pour être affiché sur l'écran, il est possible de se déplacer sur le texte à l'aide de la touche  de la calculatrice pour le lire.



Il sera possible d'indiquer à l'utilisateur comment utiliser la fonction "cercle" en ajoutant la ligne suivante en début de programme :

```
print ("cercle(xA,yA,xB,yB,xC,yC)")
```



Il sera aussi nécessaire de faire attention aux cas où les coordonnées sont des flottants puisqu'on utilise un test d'égalité.