

Benno Grabinger

Hätten Sie's
gewusst?

Mathematik nach Feierabend

Verstehen Sie den Zufall?



Mit Vorlagen zum Mitmachen in Excel,
Calc oder Numbers



Rheinwerk
Computing

Kapitel 4

Monte-Carlo-Methoden

Bei der Monte-Carlo-Methode wird für ein Problem ein Zufallsmodell aufgestellt, das dann mit der Hilfe von Zufallszahlen eine künstliche Stichprobe liefert. In diesem Kapitel wird mit einem Zufallsmodell die Zahl π näherungsweise bestimmt.

4.1 Was ist π ?

Aus dem Mathematikunterricht ist bekannt, dass das Verhältnis des Umfangs U eines Kreises zu seinem Durchmesser d gleich π ist. Ein Näherungswert für π ist $\pi \approx 3,14159$. Den Ägyptern war um 1650 v. Chr. π auf eine Nachkommastelle bekannt. Im 3. Jahrhundert v. Chr. kannte Archimedes schon die Näherung 3,14. Einhundert Jahre später wusste Ptolemaios bereits vier korrekte Nachkommastellen. Durch den Einsatz moderner Rechenverfahren und schneller Computer kennt man heute 300 Billionen Dezimalstellen von π . Dieser Rekord wurde am 2. April 2025 aufgestellt. Die Rechenzeit für dieses Ergebnis betrug 226 Tage, und es wurden 2,2 Petabyte an Speicherplatz benötigt [REK].

Die Kenntnis der Stellen ist dabei weniger interessant, vielmehr dient die Berechnung möglichst vieler Stellen heute dazu, die Leistungsfähigkeit der Computer zu bestimmen. Bekanntlich ist π eine irrationale Zahl und besitzt damit unendlich viele Stellen, die keine Periode bilden.

Wir benötigen im Folgenden lediglich die bekannte Flächenformel für den Kreis. Der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r ist gleich $r^2 \cdot \pi$.

4.2 Eine Monte-Carlo-Methode für π

Die Monte-Carlo-Methode grenzt sich von numerischen (klassischen) Verfahren zur Lösung mathematischer Probleme ab, indem sie eine Stichprobenanalyse möglich macht, statt das große Gesamtproblem zu betrachten. Eine Monte-Carlo-Methode hat dadurch den Vorteil, schnell eine ungefähre Lösung für ein Problem zu liefern. Es ist aber ein Irrtum, zu glauben, dass solche Methoden den klassischen Verfahren vorzuziehen sind. Monte-Carlo-Methoden werden verwendet, um schnell ein approximatives Ergebnis zu erhalten, oder auch dann, wenn das Problem (noch) zu groß oder zu schwierig ist, um es vollumfänglich lösen zu können. Das Verfahren, das wir hier zur näherungsweisen Bestimmung von π verwenden, soll zeigen, wie eine Monte-Carlo-Methode funktioniert.

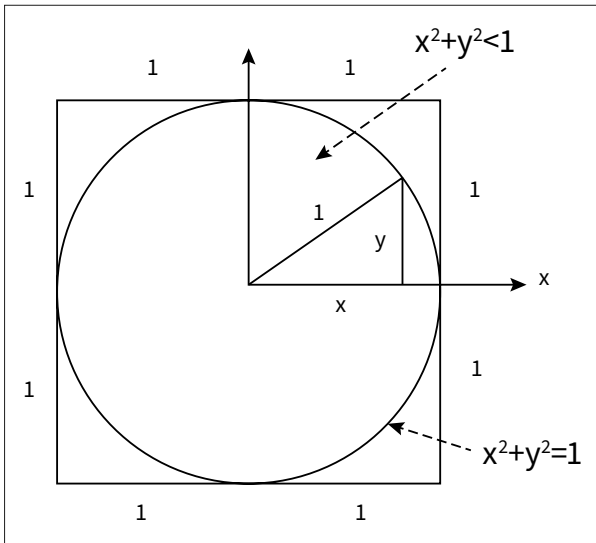


Abbildung 4.1: Ein Dartboard

In Abbildung 4.1 sehen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 1$ sowie das umschriebene Quadrat mit der Seitenlänge $2 \cdot r = 2$. Auf das Quadrat werden nun Pfeile geworfen, die zufällig verteilt sind. Als Treffer wird ein Pfeil gewertet, wenn dieser innerhalb des Kreises landet. Um die Situation zu vereinfachen, betrachten wir nur das Kreisviertel in der rechten oberen Ecke. Für Punkte auf der Kreislinie gilt: $x^2 + y^2 = 1$. Das ist an dem eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck ersichtlich, wenn man den Satz des Pythagoras anwendet. Für Punkte irgendwo innerhalb des Kreises gilt $x^2 + y^2 < 1$.

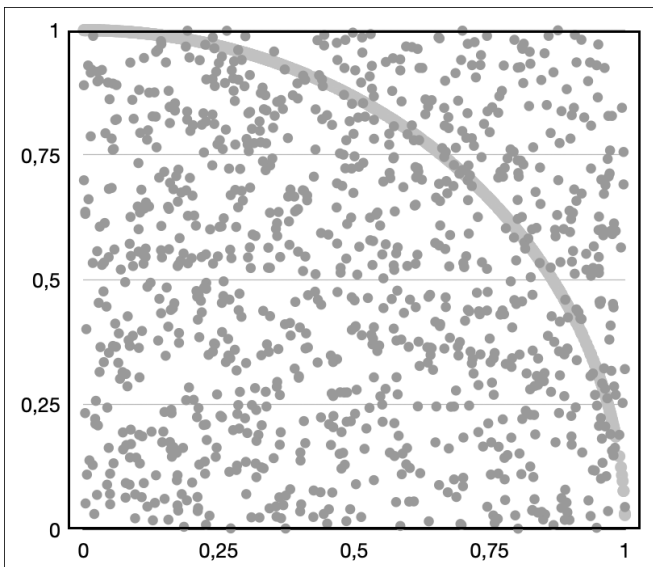


Abbildung 4.2: Dartboard mit »Einschlägen« von $n = 1000$ Pfeilen

Die Anzahl der Treffer, das heißt die Anzahl der Einschläge mit der Position $x^2 + y^2 < 1$, bezeichnen wir mit t , die Anzahl der Pfeile, die abgeschossen wurden, mit n . Es ist einleuchtend, dass das Verhältnis t/n ungefähr gleich dem Verhältnis der Flächen von Kreissektor und Quadrat ist. Es gilt also:

$$\frac{t}{n} \approx \frac{A_{\text{Kreissektor}}}{A_{\text{Quadrat}}}$$

$$\text{Nun ist } \frac{A_{\text{Kreissektor}}}{A_{\text{Quadrat}}} = \frac{r^2 \cdot \pi / 4}{r^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Damit ergibt sich: } \frac{t}{n} \approx \frac{\pi}{4} \text{ bzw. } \pi \approx 4 \cdot \frac{t}{n}.$$

In Abschnitt 4.3, »Ein Tabellenblatt für das Dartboard-Verfahren«, wird eine solche Simulation mithilfe der Tabellenkalkulation durchgeführt. In Abbildung 4.3 sehen Sie, dass von $n = 1000$ Pfeilen $t = 787$ den Kreissektor trafen. In diesem Fall ergibt sich die folgende Rechnung: $\pi \approx 4 \cdot \frac{t}{n} = 4 \cdot \frac{787}{1000} = 3,148$.

4.3 Ein Tabellenblatt für das Dartboard-Verfahren

	x	y	Treffer?	Anzahl t der Treffer	
1					
2	0,97988	0,21145	0	787	3,148
3	0,00520	0,85474	1		
4	0,62223	0,58590	1		
5	0,78283	0,09416	1		
6	0,46801	0,58193	1		
7	0,31844	0,92662	1		
8	0,83939	0,35626	1		

Callouts and formulas shown in the image:

- `=ZUFALLSZAHN()` (for x and y)
- `=WENN(A2*A2+B2*B2<1;1;0)` (for Treffer?)
- `=SUMME(C:C)` (for the total hits)
- `=4*D2/1000` (for the final pi calculation)

Abbildung 4.3: Ein Tabellenblatt zur näherungsweisen Bestimmung von π

Die Umsetzung der im letzten Abschnitt geschilderten Methode zur näherungsweisen Bestimmung von π wird mit dem in Abbildung 4.3 gezeigten Tabellenblatt ermöglicht. In die Zellen A2 und B2 wird jeweils `ZUFALLSZAHN()` eingetragen. Der dadurch dargestellte Punkt liegt im Einheitskreis, wenn $A2^2 + B2^2 < 1$ gilt. Ist dies der Fall, liegt also ein Treffer vor, wird in die Zelle C2 eine 1 geschrieben, sonst eine 0.

Jetzt muss man nur noch $4 \cdot \frac{t}{n}$ bestimmen, um der Lösung unseres mathematischen Problems näherzukommen. Für das gezeigte Tabellenblatt gilt $n = 1000$ (wir betrachten also 1000 Tabellenzeilen). Der Wert von t ergibt sich durch Summation der Spalte C. Das erklärt den Eintrag in der Zelle D2.

In der abgebildeten Simulation wird π auf zwei Dezimalstellen genau ermittelt. Mehr ist für 1000 Simulationen auch nicht zu erwarten.

4.4 Die Entenjagd

Zehn Jäger, lauter perfekte Schützen (das heißt, jeder Jäger trifft das Ziel, auf das er schießt), schießen auf zehn vorbeifliegende Enten. In der Kürze der Zeit können sich die Jäger nicht absprechen, wer auf welche Ente schießt. Sie schießen gleichzeitig und wählen ihr Opfer zufällig aus. Wie viele Enten überleben dieses Massaker?

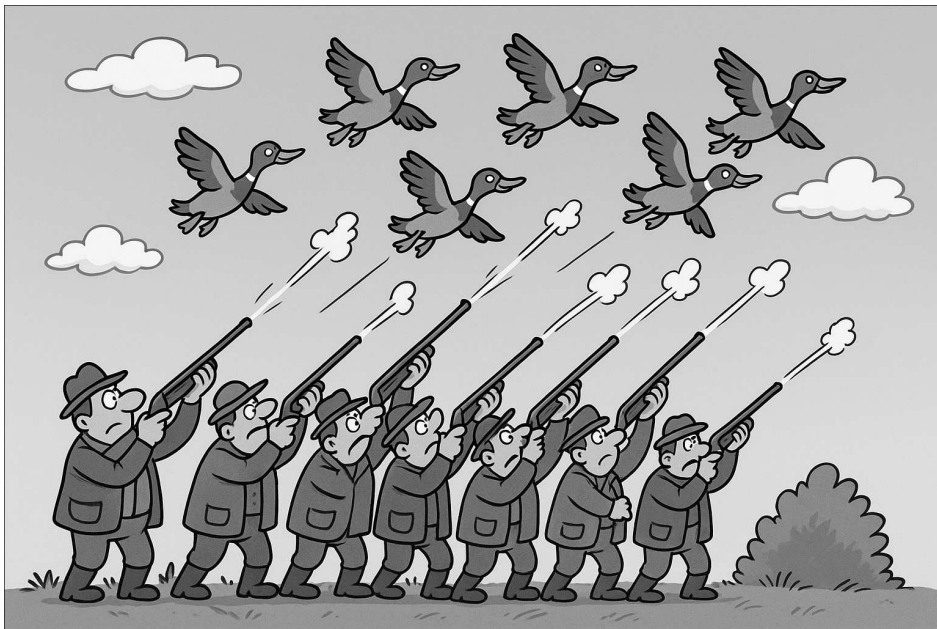


Abbildung 4.4: Jäger schießen auf Enten.

Eine für dieses Einzelexperiment richtige Antwort kann nicht gegeben werden, denn die Jäger agieren ja zufällig. Um die Überlebenschancen der Enten einzuschätzen, kann man das Experiment oft wiederholen und den Mittelwert der überlebenden Enten bilden. Dieser ist dann ein Maß für die Überlebenschancen.

Zuerst nummerieren wir die Enten von 1 bis 10. Dann entscheidet sich jeder Jäger zufällig für eine dieser Nummern. Das nimmt uns die Funktion `ZUFALLSBEREICH(1;10)` ab, die Sie ja schon kennen.

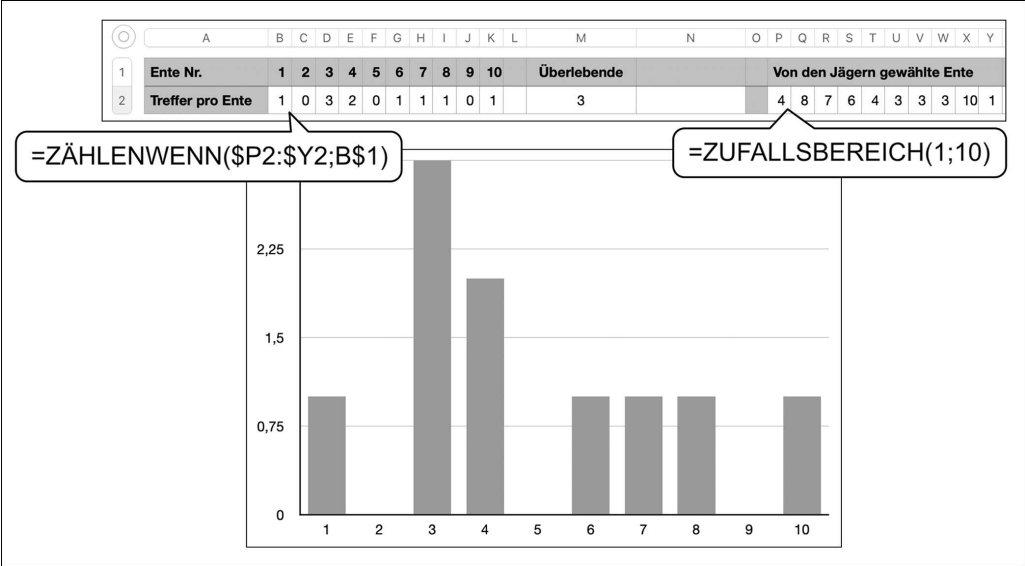


Abbildung 4.5: Eine Simulation für 10 perfekte Schützen und 10 Enten

In den Zellen B1 bis K1 stehen die Nummern der Enten. In den Zellen von P2 bis Y2 wird =ZUFALLSBEREICH(1;10) eingetragen. Damit ergeben sich die Nummern der Enten, welche die einzelnen Jäger abschießen. Die Anzahl der Treffer pro Ente ergeben sich in den Zellen B2 bis K2.

Die Trefferzahlen pro Ente sind im abgebildeten Diagramm registriert. In dem angeführten Beispiel haben die Enten mit den Nummern 2, 5 und 9 Glück, sie überleben. Wenn Sie das Tabellenblatt mehrmals aktualisieren, erhalten Sie eine Vorstellung von der Anzahl der überlebenden Enten.

Im Tabellenblatt der Abbildung 4.5 sehen Sie eine einzige Simulation. Da Sie am Mittelwert der überlebenden Enten bei vielen Simulationen interessiert sind, müssen Sie dieses Tabellenblatt erweitern. Dazu lassen Sie einfach die Zeile 2 nach unten ausfüllen, z. B. bis zur Zeile 101. Dann haben Sie 100 Simulationen erzeugt. Aus diesen Simulationen können Sie nun den Mittelwert der überlebenden Enten bilden. In Abbildung 4.6 geschieht dies durch =MITTELWERT(L:L) in der Zelle M2.

Nach den 100 Simulationen, von denen die ersten 10 in Abbildung 4.6 zu sehen sind, ergibt sich als Mittelwert der Anzahl der überlebenden Enten 3,44. Diesen Wert haben wir erhalten, ohne weitergehende Konzepte aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bemühen zu müssen. Zum Vergleich richten wir unser Augenmerk auf den Theoriewert für diese Situation:

Wir betrachten irgendeine Ente, z. B. die Ente mit der Nummer 6. Sie überlebt, wenn jeder der 10 Jäger eine andere Ente wählt, um darauf zu schießen. Dies geschieht mit der Wahr-

scheinlichkeit $0,9^{10} \approx 0,349$. (Für diese Berechnung wurde die Pfadregel benutzt. Ist Ihnen diese nicht bekannt, finden Sie die Erklärung dazu in Kapitel 23, »Die Einstandregelung«.)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Überlebende	Mittelwert													
2	1	0	1	3	0	2	0	1	1	1	3	3,44		4	4	1	10	8	6	6	4	9	3		
3	1	3	1	1	1	0	0	0	0	3	4			2	2	3	10	10	2	1	5	4	10		
4	2	0	1	2	1	1	1	1	0	1	2			7	3	6	1	10	1	4	8	4	5		
5	1	1	2	0	3	1	1	0	1	0	3			5	3	5	7	2	9	1	3	5	6		
6	1	0	0	1	2	1	1	0	2	2	3			5	10	7	1	9	10	5	6	4	9		
7	0	0	1	2	2	1	1	2	0	1	3			8	5	10	4	4	8	6	3	5	7		
8	2	0	0	0	1	1	3	2	1	0	4			7	1	1	9	7	7	6	5	8	8		
9	1	1	1	0	1	0	2	2	1	1	2			7	1	7	2	8	3	8	10	9	5		
10	3	0	0	1	3	0	2	0	0	1	5			10	4	5	1	1	1	7	5	7	5		
11	2	0	0	0	1	2	2	0	0	3	5			6	5	1	1	7	7	6	10	10	10		

Abbildung 4.6: Die ersten 10 von 100 Simulationen zur Bestimmung des Mittelwertes der überlebenden Enten

Im Durchschnitt werden deshalb $10 \cdot 0,9^{10} \approx 3,49$ Enten überleben.
Wie Sie sehen, haben wir mit der Monte-Carlo-Methode aus unserem Tabellenblatt einen akzeptablen Schätzwert erhalten.

Kapitel 5

Wie viele Leben besitzt eine Pfandflasche?

Mit Pfandflaschen kann man eine Menge Abfall einsparen, vorausgesetzt, die Flaschen werden oft genug verwendet. In diesem Kapitel wird ein einfaches mathematisches Modell entworfen, das den realen Rückgabebezahlen sehr nahekommt.

5.1 Lohnt sich die Rückgabe von Pfandflaschen?

Das Stadtbild großer Städte wird zunehmend durch herumliegende leere Bier- und Limonadenflaschen geprägt. Das berichten die städtischen Entsorger. Selbst Mehrwegflaschen bleiben vermehrt als Müll im öffentlichen Raum zurück. Für viele Verbraucher scheint sich die Rückgabe von Mehrweg-Glasflaschen nicht mehr zu lohnen. Das liegt unter anderem daran, dass das Mehrwegpfand seit Jahrzehnten nicht angepasst wurde. Für Glas-Bierflaschen liegt das Pfand bei 8 Cent. Österreich hat das Pfand auf Mehrweg-Glasflaschen seit dem 2. Februar 2025 von 9 auf 20 Cent erhöht. Ein Kasten Bier kostet seitdem 7 Euro Pfand, 4 Euro für die 20 Flaschen und 3 Euro für die Kiste. Das soll die Motivation, die leeren Flaschen wieder in den Handel zurückzubringen, deutlich erhöhen, denn auch in Österreich ließ die Rückgabebereitschaft in den letzten Jahren deutlich nach. Flaschen wurden im Altglas entsorgt und fehlten damit im Mehrwegkreislauf. Das lässt die »Gesellschaft der österreichischen Brauwirtschaft« verlautbaren [PFA].

Der Vorteil des Mehrwegsystems liegt darin, dass die Flaschen nach dem Gebrauch gewaschen und wieder befüllt werden. Das spart jede Menge Abfall. Wie oft können Pfandflaschen wieder verwendet werden, wie viele Leben hat also eine Pfandflasche?

5.2 Ein Modell für den Lebenslauf einer Pfandflasche

Nach Angaben verschiedener Brauereien beträgt die durchschnittliche Rücklaufquote von Pfandflaschen ca. 98 %. Der Lebenslauf einer Flasche lässt sich als eine Irrfahrt auf dem Graphen in Abbildung 5.1 deuten.

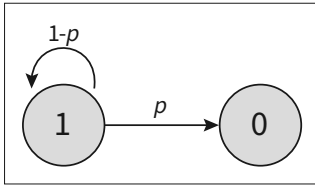


Abbildung 5.1: Ein Graph für das Pfandflaschenproblem

Zu Beginn, also nach dem ersten Kauf, befindet sich die Flasche im Startzustand 1. Mit Wahrscheinlichkeit p gerät die Flasche dann in den Endzustand 0, das heißt, sie wird nicht zurückgegeben. Mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ wird sie ein weiteres Mal verkauft, das heißt, sie bleibt im Zustand 1.

Wir bezeichnen mit m die Anzahl der Schritte auf diesem Graphen, bis die Flasche im Zustand 0 landet. Dann gibt es die beiden folgenden Möglichkeiten:

1. Die Flasche wird überhaupt nicht zurückgegeben, sondern landet gleich im Müll. Dann ist $m = 1$.
2. Die Flasche wird beim 1. Mal zurückgegeben. Dann ist man wieder im Zustand 1. Es dauert dann noch im Mittel m Schritte, bis die Flasche in den Zustand 0 gerät, das heißt, insgesamt werden $1 + m$ Schritte auf dem Graphen zurückgelegt. Denn: Der Zufall besitzt kein Gedächtnis an die bereits vergangenen Rückgaben. Immer, wenn die Flasche im Zustand 1 ist, dauert es noch durchschnittlich m Schritte bis zum Zustand 0.

Aus den beiden Möglichkeiten 1 und $1 + m$ muss nun der Mittelwert gebildet werden, um herauszufinden, wie lange die Flasche im Mittel von Zustand 1 (Startzustand) bis Zustand 0 (nicht zurückgegeben) braucht. Dabei ist zu beachten, dass diese beiden Möglichkeiten mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten auftreten.

Die Möglichkeit, dass nach einem Schritt alles zu Ende ist, tritt mit der Wahrscheinlichkeit p auf. Die Wahrscheinlichkeit, dass $1 + m$ gleich der Dauer der Irrfahrt ist, ist gleich $1 - p$.

Mit diesen Wahrscheinlichkeiten müssen die beiden Möglichkeiten gewichtet werden.

Damit erhält man für m :

$$m = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot (1 + m)$$

Jetzt werden die Klammern ausmultipliziert:

$$m = p + 1 + m - p - p \cdot m$$

$$p \cdot m = 1$$

$$m = \frac{1}{p}$$

Die Zahl der Rückgaben r der Flasche ist um einen Schritt geringer, so dass $r = \frac{1}{p} - 1$ gilt.

Angenommen, dass $p = 2\%$ gilt. Dies passt zu der oben angegebenen Pfandflaschen-Rücklaufquote von 98 %. Für die mittlere Zahl der Rückgaben ergibt sich in diesem Fall $r = \frac{1}{0,02} - 1 = 50 - 1 = 49$. Auf der Basis der von den Brauereien angegebenen Rücklaufquote erhalten wir damit 49 als mittlere Zahl der Rückgaben einer Pfandflasche.

In der Praxis geht man davon aus, dass Mehrwegflaschen bis zu 40-mal befüllt werden können [PFA]. Diese etwas geringere Zahl als die eben berechnete, ist darin begründet, dass sich die Flaschen abnutzen. Durch Reibung der Flaschen aneinander während des Befüllens entstehen unschöne graue Streifen oberhalb des Etiketts. Dadurch wird die Flasche unansehnlich und wird schließlich aussortiert.



Abbildung 5.2: Flasche mit grauem Streifen

5.3 Überprüfen Sie das Ergebnis des letzten Abschnitts mit einer Simulation

Sie sollten zunächst ein Tabellenblatt bis zur Spalte GE bereitstellen, denn die Zahl der Rückgaben der Flasche kann im Einzelfall sehr groß werden.

Zunächst schreiben Sie in die Zelle B2 den Wert von p und in die Zelle B3 den Wert von $1 - p$. In der Spalte G werden Einsen eingetragen. Das bezeichnet den Start der Irrfahrt im Zustand 1. Berücksichtigt werden 1000 Simulationen, das heißt, das Tabellenblatt geht bis zur Zeile 1003.

Damit die Simulation beendet wird, wenn die 0 auftaucht oder wenn die linke Nachbarzelle leer ist, brauchen Sie den zur Zelle H4 gehörenden Eintrag aus Abbildung 5.3: `=WENN(ODER(G4=0;G4=''));'';WENN(ZUFALLSZAHL(<$B$3;1;0))`.

In der Zelle C4 wird die Summe der Einsen der 4. Zeile gebildet. Das ist die Anzahl der Rückgaben in der Simulation dieser Zeile.

Füllen Sie nun die Zeile 4 weiter nach unten bis zur Zeile 1003 aus.

Anschließend bilden Sie den Mittelwert der Rückgaben in der Zelle E4.

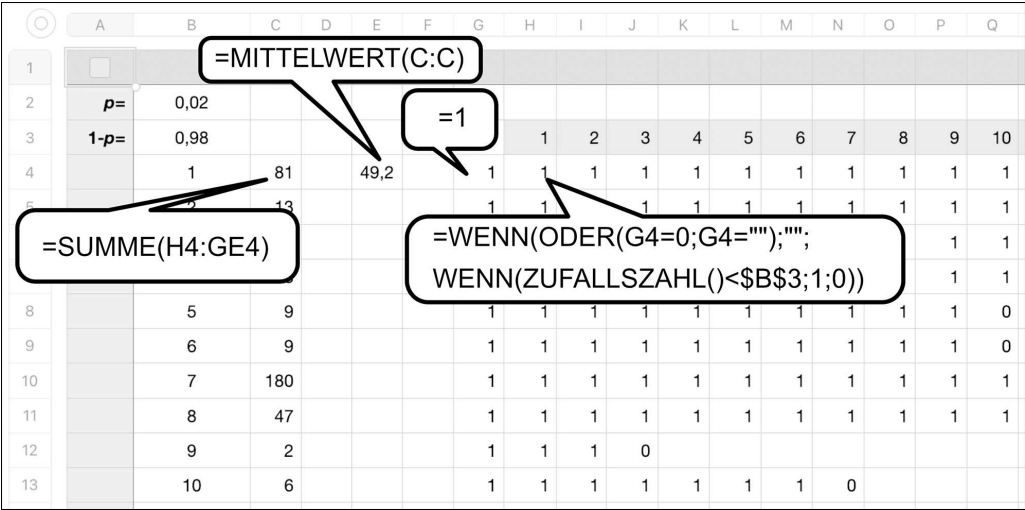


Abbildung 5.3: Simulation der Anzahl der Rückgaben in Abhängigkeit von p

In Numbers können Sie dem Tabellenblatt ein Markierungsfeld hinzufügen, um dieses Blatt neu berechnen zu lassen. In Excel erreichen Sie das mit der Funktionstaste `[F9]`.

Kapitel 6

Verschwörungstheorien

*Wie kann man die Behauptungen von Verschwörungstheoretikern widerlegen?
Dies wird hier am Beispiel der Mondlandung im Jahr 1969 diskutiert.*

6.1 War die Mondlandung ein Fake?

Besonders in Krisenzeiten erfahren Verschwörungstheorien Beachtung, aber auch ohne Krise halten sie sich hartnäckig. Ein prominentes Beispiel dafür ist die Mondlandung. Diese erfolgte am 20. Juli 1969.

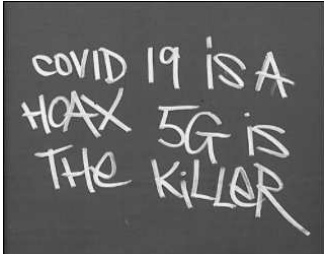


Abbildung 6.1: Frankfurter Allgemeine 19.05.2020

Ab den frühen 1970er-Jahren tauchten schließlich immer mehr angebliche Indizien dafür auf, dass die Amerikaner den ersten Flug zu einem anderen Himmelskörper zu Propagandazwecken nur inszeniert hätten. Allein in Großbritannien glauben laut einer Umfrage aus dem Jahr 2016 etwa 52 % der Bevölkerung nicht an eine Mondlandung. Selbst in den USA bestreiten etwa 5–7 % die Geschehnisse vom Sommer 1969.

Tatsächliche Verschwörungen werden aufgedeckt durch

1. Whistleblowing
2. Fehler in der Informationsverarbeitung, z. B. eine an eine falsche Adresse geschickte Mail

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Verschwörung innerhalb eines Jahres aufgedeckt wird, hängt ab von:

1. der Anzahl n der an der Verschwörung beteiligten Personen
2. der Wahrscheinlichkeit w , dass eine beliebige Person innerhalb eines Jahres das Geheimnis verrät

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in einem Jahr keinen Verrat begeht, ist $1 - w$. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle n beteiligten Personen in einem Jahr nichts verraten, ist dann $q = (1 - w)^n$. (Hier wurde die erste Pfadregel verwendet. Näheres dazu finden Sie in Kapitel 23, »Die Einstandregel«.)

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Verrat in einem Jahr ergibt sich über das Gegenereignis zu $p = 1 - (1 - w)^n$. (Sollten Sie Probleme bei der Verwendung des Gegenereignisses haben, können Sie sich in Kapitel 18, »Was ist denn jetzt Zufall und was ist Wahrscheinlichkeit?«, Hilfe holen.)

Jetzt bestimmen wir nacheinander die Wahrscheinlichkeiten, dass der erste Verrat im Jahr 1, 2, 3, ..., k stattfindet:

Erster Verrat im 1. Jahr: p

Erster Verrat im 2. Jahr: $q \cdot p$

Erster Verrat im 3. Jahr: $q^2 \cdot p$

...

Erster Verrat im Jahr k : $q^{k-1} \cdot p$

Die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb der Jahre 1, ..., k der 1. Verrat stattfindet, erhält man durch Addition der eben berechneten Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(\text{1. Verrat in den ersten } k \text{ Jahren}) &= p + q \cdot p + q^2 \cdot p + \dots + q^{k-1} \cdot p \\ &= p \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1}) \end{aligned}$$

Wissen Sie, wie man die Summe in der Klammer berechnen kann? Wenn ja, dann überspringen Sie den Text in dem folgenden Kasten.

Die endliche geometrische Reihe

$s = 1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1}$ ist eine endliche geometrische Reihe. Das erkennt man daran, dass der Quotient zweier aufeinander folgender Reihenglieder konstant ist. Im vorliegenden Fall ist der Quotient gleich q . Die einfache Formel für die endliche geometrische Reihe finden Sie am Ende des Kastens.

Multiplizieren Sie diese Gleichung mit q . Dann ergibt sich:

$$q \cdot s = q + q^2 + q^3 + \dots + q^k$$

Jetzt subtrahieren Sie die beiden Gleichungen voneinander. Dabei fallen auf der rechten Seite alle Reihenglieder mit Ausnahme von 1 und q^k weg.

$$s - q \cdot s = 1 - q^k$$

Schließlich hat man $s = \frac{1 - q^k}{1 - q}$. Das ist die gesuchte Summenformel für die endliche geometrische Reihe.

6.2 Weiterführung der Rechnung aus Abschnitt 6.1

In Abschnitt 6.1 stand zuletzt folgende Gleichung:

$$P(\text{1.Verrat in den ersten } k \text{ Jahren}) = p \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1})$$

Mithilfe der Summenformel erhält man jetzt:

$$P(\text{1.Verrat in den ersten } k \text{ Jahren}) = p \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$$

Nun ist $p = 1 - q$, so dass Folgendes übrig bleibt:

$$P(\text{1.Verrat in den ersten } k \text{ Jahren}) = 1 - q^k = 1 - ((1 - w)^n)^k = 1 - (1 - w)^{n \cdot k}$$

95 % ist eine sehr große Wahrscheinlichkeit.

Wenn $P(\text{1.Verrat in den ersten } k \text{ Jahren}) \geq 95 \%$ gilt, dann ist es sicher, dass die Verschwörung innerhalb der ersten k Jahre verraten wird.

Wenn $P(\text{1.Verrat in den ersten } k \text{ Jahren}) \geq 95 \%$ gilt und die Verschwörung wurde innerhalb dieser ersten k Jahre nicht verraten, dann gilt im Umkehrschluss: Es gibt mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit keine Verschwörung.

Um $P(\text{1.Verrat in den ersten } k \text{ Jahren})$ berechnen zu können, benötigt man aber, wie in der oben eingeführten Formel gezeigt, den Parameter w . Diesen kann man aufgrund von bereits aufgedeckten Verschwörungen schätzen. Im folgenden Abschnitt gebe ich Ihnen einige Beispiele dafür, wie wir unsere Berechnung mit konkreten Werten durchführen können.

6.3 Aufgedeckte Verschwörungen

Das folgende Datenmaterial stammt von David Robert Grimes [GRI].

■ NSA-Prism-Affäre

Bei dieser Affäre ging es um eine streng geheime, enge Zusammenarbeit zwischen amerikanischen und deutschen Geheimdiensten zur Ausspähung unbescholtener Bürger. Nach $k = 6$ Jahren Geheimhaltung wurde die Verschwörung durch Edward Snowden aufgedeckt. Beteiligt waren ca. $n = 30\,000$ Personen.

■ Tuskegee syphilis experiment

In den 1940er-Jahren hatten Forscher Afroamerikaner beobachtet, die an Syphilis erkrankt waren, ohne ihnen Antibiotika zur Behandlung der Krankheit zur Verfügung zu stellen. Es dauerte $k = 25$ Jahre, bis die unethische Forschung aufflog. Beteiligt waren etwa $n = 6\,700$ Personen.

■ FBI forensics scandal

Das FBI hatte beim Nachweis von Verbrechen unseriöse Methoden benutzt und damit Unschuldige in die Todeszelle gebracht. Aufgedeckt wurde der Skandal nach $k = 6$ Jahren durch den Whistleblower Dr. Whitehurst. Es gab ca. $n = 500$ Beteiligte.

6.4 Bestimmung der Wahrscheinlichkeit w , dass eine beliebige Person innerhalb eines Jahres das Geheimnis verrät

Wir verwenden die Daten $n = 30\,000$ und $k = 6$ der NSA-Prism-Affäre.

Die Wahrscheinlichkeit, dass im Jahr $k = 6$ der 1. Verrat stattfindet, ist gleich $q^{6-1} \cdot p = ((1 - w)^{30000})^{6-1} \cdot (1 - (1 - w)^{30000})$. Das wissen wir schon aus der Formel in Abschnitt 6.2, »Weiterführung der Rechnung aus Abschnitt 6.1«.

Die Hochzahlen des ersten Faktors werden multipliziert und da der Ausdruck nur von w abhängt, wird dieser mit $L(w)$ bezeichnet:

$$L(w) = (1 - w)^{150000} \cdot (1 - (1 - w)^{30000}).$$

$L(w)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass im Jahr $k = 6$ der 1. Verrat stattfindet.

Der 1. Verrat fand tatsächlich im 6. Jahr statt. Die Frage bleibt, wie man daraus den Wert von w bestimmen kann. Dazu gibt es in der Mathematik ein einfaches Prinzip, die *Maximum-Likelihood-Methode*:

Stehen in einer bestimmten Situation verschiedene Modelle zur Auswahl (hier sind das die verschiedenen Werte von w), dann wähle dasjenige aus, für das die beobachteten Daten die größte Wahrscheinlichkeit besitzen.

Folgt man diesem Prinzip, muss man zunächst nachsehen, für welchen Wert von w die Funktion $L(w)$ ein Maximum annimmt. Wir machen uns dies einfach, ohne die Differentialrechnung zu bemühen. Dazu stellen wir eine Tabelle für $L(w)$ auf, diese sehen Sie in Abbildung 6.2. Der Abbildung kann man entnehmen, dass für $w = 0,0000060$ die Funktion $L(w)$ maximal wird. Der Maximalwert ist 0,0669.

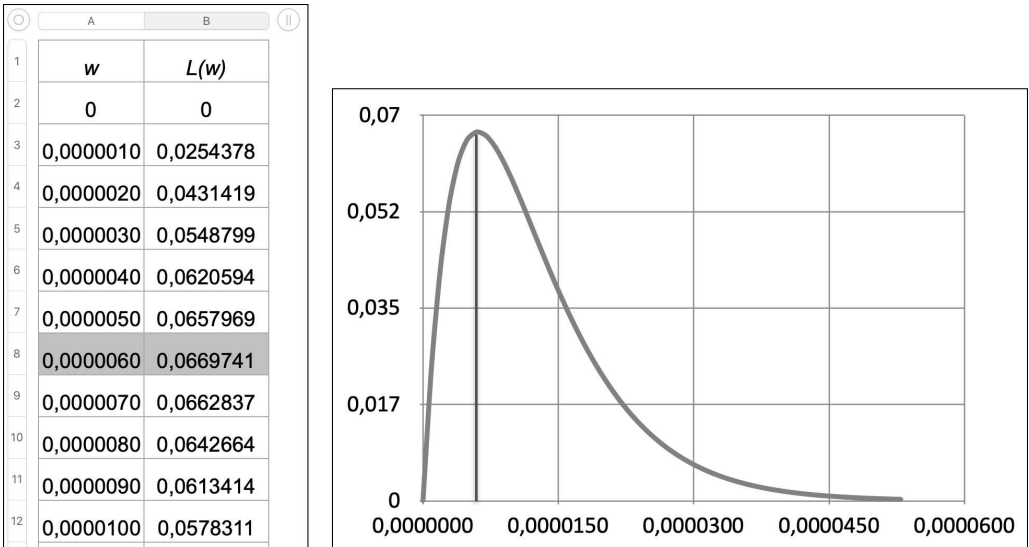


Abbildung 6.2: Graph der Funktion $L(w)$

6.5 Anwendung der Ergebnisse auf die Mondlandung

Mitte der 60er-Jahre des letzten Jahrhunderts arbeiteten über 400 000 Personen für das Apollo-Projekt.

Mit $w = 0,000006$ und $n = 400000$ können wir jetzt die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass innerhalb der Jahre 1, ..., k der 1. Verrat stattfand.

Aus Abschnitt 6.2, »Weiterführung der Rechnung aus Abschnitt 6.1«, ist bekannt:

$$P(\text{1.Verrat in den ersten } k \text{ Jahren}) = 1 - q^k = 1 - (1 - w)^n \cdot k$$

Mit unseren Zahlen für w und n ergibt sich:

$$P(\text{1.Verrat in den ersten } k \text{ Jahren}) = 1 - (1 - 0,000006)^{400000 \cdot k}$$

Wieder hilft uns eine Tabelle, um die Werte dieser Funktion beurteilen zu können.

	A	B
1	$w=$	0,000006
2	$n=$	400000
3		
4	k	$P(\text{1.Verrat innerhalb d. Jahre } 1, \dots, k)$
5	0	0
6	1	0,90928
7	2	0,99177
8	3	0,99925
9	4	0,99993
10	5	0,99999
11	6	1,00000
12	7	1,00000
13	8	1,00000
14	9	1,00000
15	10	1,00000
16	11	1,00000
17	12	1,00000
18	13	1,00000
19	14	1,00000

Abbildung 6.3: Die Wahrscheinlichkeit $P(\text{1.Verrat in den ersten } k \text{ Jahren})$

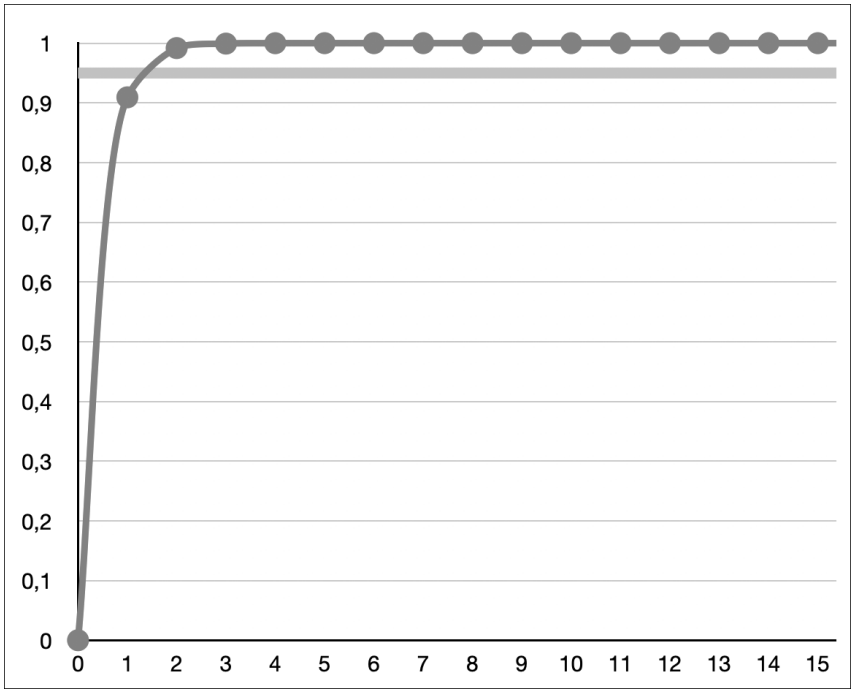


Abbildung 6.4: Graphische Darstellung der Funktion $P(1. \text{Verrat in den ersten } k \text{ Jahren})$

Wie man sieht, ist schon nach 2 Jahren die Wahrscheinlichkeit für den 1. Verrat größer als 95 %. Nach den Ergebnissen aus Abschnitt 6.2, »Weiterführung der Rechnung aus Abschnitt 6.1«, gibt es deshalb keine Verschwörung. Die Mondlandung fand statt.

Kapitel 7

Truthähne und schwarze Schwäne

»Wenn mich jemand fragt, wie ich meine Erfahrungen in fast vierzig Jahren auf See am besten beschreiben kann, sage ich einfach: ereignislos. Natürlich gab es Winterstürme, Stürme, Nebel und dergleichen. Aber bei all meinen Erfahrungen war ich nie in einen Unfall verwickelt, über den es sich zu reden lohnt. In all meinen Jahren auf See habe ich nur ein Schiff in Not gesehen. Ich habe noch nie ein Wrack gesehen und habe auch noch nie Schiffbruch erlitten, und ich war auch noch nie in einer Situation, die in einer wie auch immer gearteten Katastrophe zu enden drohte.«

E. J. Smith, 1907, Kapitän der Titanic [QUO]

Am 14.04.1912 sinkt die Titanic und mit ihr E. J. Smith. Die Risikoeinschätzung des Kapitäns der Titanic beruht auf der sogenannten *Truthahn-Illusion*. Dieser Begriff lässt sich auf folgende Begebenheit zurückführen:

Ein Bauer hat einen Truthahn gekauft und nimmt diesen mit auf seinen Hof. Anfangs ist der Truthahn recht scheu, doch dies legt sich bald, nachdem der Bauer ihm jeden Tag sein Futter bringt. Wäre der Truthahn mit der Wahrscheinlichkeitstheorie vertraut gewesen, so hätte er sein wachsendes Zutrauen sogar zahlenmäßig beschreiben können: Trat nämlich in einer bestimmten Situation ein Ereignis bereits n -mal ein, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es beim nächsten Mal wieder eintritt, gleich $\frac{n+1}{n+2}$, das heißt, nach einem Tag beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Wiedereintreten des Ereignisses $\frac{2}{3}$, nach zwei Tagen $\frac{3}{4}$ usw.

(Diese Formel wird in der englischsprachigen Literatur als *Law of succession of Laplace* bezeichnet [FEL, S. 124]). In der deutschsprachigen Literatur hat sich keine Bezeichnung eingebürgert. Die Herleitung der Formel übersteigt das Niveau dieses Buchs.)

Stellt man diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von n graphisch dar, so ergibt sich der Graph aus Abbildung 7.1:

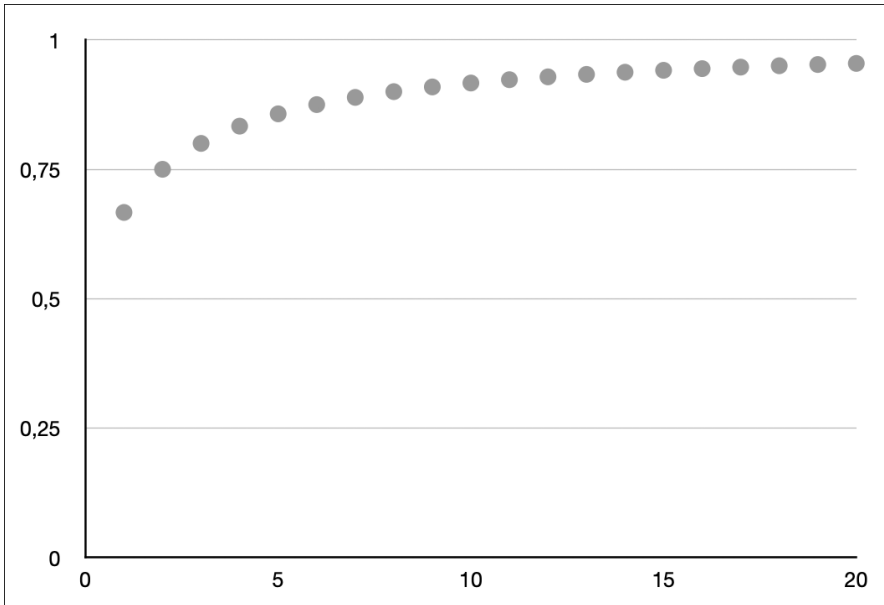


Abbildung 7.1: Darstellung von $(n + 1) / (n + 2)$ in Abhängigkeit von n

Die Abbildung zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der sich das Ereignis wiederholt, wenn es zuvor n -mal eingetreten ist, schnell gegen 1 strebt. Das heißt, nach ein paar Tagen ist es für den Truthahn fast sicher, dass er am nächsten Tag wieder sein Futter bekommt.

Ihnen ist klar, wie die Geschichte für den Truthahn ausgeht. Zwar begnadigt der amerikanische Präsident jedes Jahr medienwirksam einen Truthahn, dies gilt jedoch nicht für unseren Truthahn. Am Tag vor dem Thanksgiving Day kommt der Bauer mit dem Beil statt dem Futter. Die Sicherheit, in der sich der Truthahn wähnte, beruht auf historischen Daten. Dies gilt auch für die angegebene Berechnung im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Dem Truthahn war offenbar die Tradition des Thanksgiving Days unbekannt, und auch bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Problem der Wiederholung eines Ereignisses war das mögliche Auftreten eines Ereignisses wie des Thanksgiving Days nicht berücksichtigt worden.

Wie dem Truthahn fällt es auch dem Menschen schwer, sich eine Zukunft vorzustellen, in der Ereignisse vorkommen, die in unserer Vergangenheit noch nicht aufgetreten sind. Beispiele für solche Ereignisse sind:

- die Ölkrise der 1970er-Jahre
- der Schwarze Freitag 1929
- die Südamerika-Krise 1982
- die Bankenkrise 2008
- der 11. September 2001

- der Fall der deutschen Mauer 1989
- die Coronakrise usw.

Experten waren nicht in der Lage, diese Ereignisse im Voraus zu erkennen. Sie verwendeten genau wie der Truthahn Modelle, die kurzfristig korrekte Aussagen liefern, die aber nicht unerwartete Ereignisse beinhalten, die dann Katastrophen auslösen können. Dasselbe gilt für den normalen Bürger, dem im Rahmen einer Kaufentscheidung in der Bank die Kursentwicklung eines bestimmten Fonds gezeigt wird und der darauf spekuliert, dass diese Entwicklung so weitergeht.

Ein unerwartetes Ereignis, das die bisherigen Erfahrungen durcheinanderwirbelt, nennt man auch einen »schwarzen Schwan«. Diese Bezeichnung beruht darauf, dass bis ins 17. Jahrhundert in Europa geglaubt wurde, dass jeder Schwan weiß ist. Im Jahr 1609 landete der Niederländer Willem Jansz an der Nordspitze des heutigen Queensland. In den folgenden Jahrzehnten erreichten weitere niederländische Expeditionen Australien. So sah dann der niederländische Seefahrer Willem de Vlamingh 1697 schwarze Schwäne in Australien. Mit dieser Entdeckung wurde die in Europa jahrtausendlang gültige Aussage, dass alle Schwäne weiß sind, auf einen Schlag widerlegt.

Die Auftretenshäufigkeit unerwarteter Ereignisse wird oft unterschätzt. Bei der Beurteilung der Entwicklung von Kursen eines Portfolios oder einer einzelnen Aktie liegt dies daran, dass in »normalen« Zeiten der Kursverlauf einer Normalverteilung entspricht. Diese wird durch einen Mittelwert μ und eine Standardabweichung σ beschrieben. Der Mittelwert μ ist die erwartete Rendite der Aktie, die Standardabweichung σ ist ein Maß für auftretende Abweichungen vom Erwartungswert μ . Je größer σ ist, desto breiter ist die Kurve. Im Börsenjargon wird σ auch als die Volatilität der Aktie bezeichnet. Abbildung 7.2 zeigt zwei Graphen der Normalverteilung, den ersten mit $\mu = 2$ und $\sigma = 0,5$, den zweiten mit $\mu = 3$ und $\sigma = 0,8$. Der Flächeninhalt unter jeder der Kurven ist gleich 1.

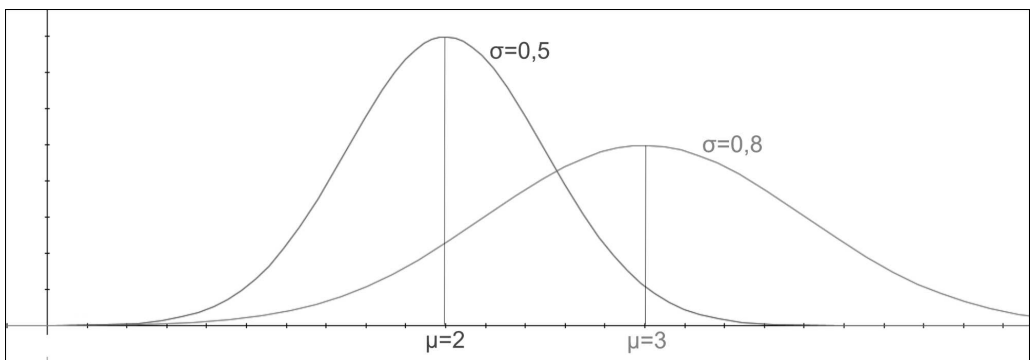


Abbildung 7.2: Graphen der Normalverteilung

Liegt eine Normalverteilung vor, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beobachteter Wert zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$ liegt, gleich 68 %. Das Auftreten eines Wertes zwischen $\mu - 2\sigma$ und $\mu + 2\sigma$ ist sogar gleich 95,5 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass Werte mit einer Ab-

weichung um mehr als 2σ vom Erwartungswert auftreten, ist deshalb nur $1 - 0,955 = 0,045 = 4,5\%$. Im Bereich zwischen $\mu - 3\sigma$ und $\mu + 3\sigma$ liegen sogar $99,7\%$ aller Werte, das heißt, eine Abweichung um mehr als 3σ vom Erwartungswert hat die Wahrscheinlichkeit $0,3\% = 0,003$.

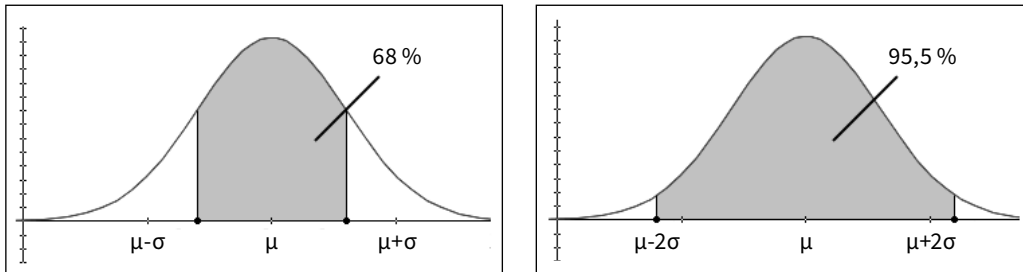


Abbildung 7.3: Wahrscheinlichkeiten für Abweichungen vom Mittelwert

Liegt eine Normalverteilung vor, dann treten Werte mit einer Abweichung von mehr als 3σ vom Erwartungswert praktisch nicht auf. In der Praxis finden sich solche Abweichungen aber immer wieder. Dies zeigt, dass die von Banken verwendeten Vorhersageinstrumente, denen meistens eine Normalverteilung zugrunde liegt, versagen. Das Modell der Normalverteilung passt also nicht zur Realität, auch wenn die Verfechter der gängigen Portfolio-Theorie dies bestreiten. Dies sollte jeder, dem eine Aktienanlage ohne große Risiken empfohlen wird, wissen. Das bedeutet natürlich nicht, dass man keine Aktien kaufen sollte. Aber man sollte nicht alles auf eine Karte setzen. Will man auf Nummer sicher gehen, dann legt man zum Beispiel ein Drittel in Aktien, ein Drittel in Gold und ein Drittel in Immobilien an, das heißt, man diversifiziert so breit wie möglich.

Kapitel 8

Was man beim Fälschen der Steuererklärung beachten sollte

Man könnte denken, dass die Häufigkeit der Anfangsziffern in Datensätzen jeweils 1/9 ist. Überraschenderweise ist dies nicht der Fall. Für viele Datensätze gilt ein ganz anderes Gesetz, das sogenannte Benford-Gesetz, das in diesem Kapitel vorgestellt wird.

8.1 Das Benford-Gesetz

Im Auftrag einer Hotelkette kam Mark J. Nigrini einem millionenschweren Versicherungsbetrug auf die Spur. Eine Angestellte hatte Schecks der firmeneigenen Krankenversicherung gefälscht und Vorgänge abgerechnet, die nicht stattgefunden hatten. Bemerkenswert war die Methode, derer sich Nigrini 1996 zur Aufdeckung der Veruntreuung bediente. Er analysierte die vorliegenden Daten mit einer Software, die das Benford-Gesetz verwendete.

Das Benford-Gesetz macht eine überraschende Aussage über die Häufigkeit der Anfangsziffern in Zahlen des Zehnersystems. Es ist naheliegend zu glauben, dass jede der neun Ziffern 1, 2, 3, ..., 8, 9 dieselbe Chance hat, als erste Ziffer einer Zahl aufzutreten. Das ist aber nicht immer der Fall. Der Erste, dem dies auffiel, war Simon Newcomb (1835–1909), ein Mathematiker und Astronom. Für seine Berechnungen benutzte Newcomb, wie damals üblich, Logarithmentafeln. Dabei fiel ihm auf, dass in diesen Tafeln die vorderen Seiten stärker abgegriffen waren als die weiter hinten liegenden. Er folgerte, dass mehr Berechnungen mit Zahlen durchgeführt wurden, die mit kleinen Ziffern wie 1 und 2 beginnen. Er behauptete, dass der Prozentsatz der Zahlen, die mit der Ziffer n beginnen, gegeben ist durch $\log_{10}(1 + 1/n)$. Dies gilt für viele Datensätze wie zum Beispiel für die Länge von Flüssen, für Todesraten, Rechnungen oder physikalische und mathematische Konstanten.

1938 machte Frank Benford dieselbe Entdeckung wie Newcomb. Benford verfügte außerdem über ein riesiges Datenmaterial, an dem er seine Entdeckung überprüfen konnte.

Vor diesem Hintergrund ist auch klar, wie Nigrini vorgegangen ist. Er analysierte die vorliegenden Daten darauf, ob diese mit dem Benford-Gesetz übereinstimmen. War dies nicht der Fall, so lag eine Manipulation vor.

Die Aufklärung von Betrugsversuchen ist eine der wichtigsten Anwendungen des Benford-Gesetzes. Mit EDV kann geklärt werden, ob die zu prüfende Stichprobe, zum Beispiel eine Kasseneinnahme in der Buchführung, der Benford-Verteilung folgt. Ist dies nicht der Fall, so liegt der Verdacht einer Manipulation nahe. Beachten Sie dies bei der nächsten Steuererklärung!

8.2 Ein Beispiel für das Benford-Gesetz

Vielleicht kennen Sie die Fibonacci-Folge. Das ist eine der bekanntesten Zahlenfolgen der Mathematik mit vielen Anwendungen. Das Bildungsgesetz dieser Folge ist ganz einfach.

Die Fibonacci-Folge

Die ersten beiden Folgenglieder sind Einsen.

Das dritte Folgenglied ist die Summe des ersten und des zweiten Folgengliedes.

Das vierte Folgenglied ist die Summe des zweiten und des dritten Folgengliedes usw.

Wie Sie sehen, kann diese Folge leicht in einer Tabellenkalkulation erzeugt werden, wie in Abbildung 8.1 gezeigt.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Fibonacci Zahlen	Erste Ziffer		<i>n</i>	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit	$\log(1+1/n)$
2	1	1		1	301	0,301	0,3010
3	1	1		2	177	0,177	0,1761
4	2	2		3	125	0,125	0,1249
5	3	3		4	96	0,096	0,0969
6	5	5		5	80	0,08	0,0792
7	8	8		6	67	0,067	0,0669
8	13	1		7	56	0,056	0,0580
9	21	2		8	52	0,052	0,0512
10	34	3		9	45	0,045	0,0458
11	55	5					

Abbildung 8.1: Ein Tabellenblatt zur Untersuchung der ersten Ziffer der Folgenglieder der Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Zahlen stehen in der Spalte A. Insgesamt wurden für dieses Blatt 1000 Folgenglieder erzeugt. Die ersten 10 sind hier abgebildet. In der Spalte B steht jeweils die erste Ziffer der links danebenstehenden Fibonacci-Zahl.

Die Spalte B wird danach ausgewertet, wie oft in ihr 1, 2, 3, ... steht. Diese absoluten Häufigkeiten finden Sie in der Spalte E. So beginnen 301 der ersten 1000 Fibonacci-Zahlen mit der Ziffer 1, 177 beginnen mit der Ziffer 2 usw.

Dividiert man die absoluten Häufigkeiten durch 1000, so erhält man die relativen Häufigkeiten der Spalte F. Diese relativen Häufigkeiten sind Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die erste Ziffer gleich 1, 2, 3, ... ist.

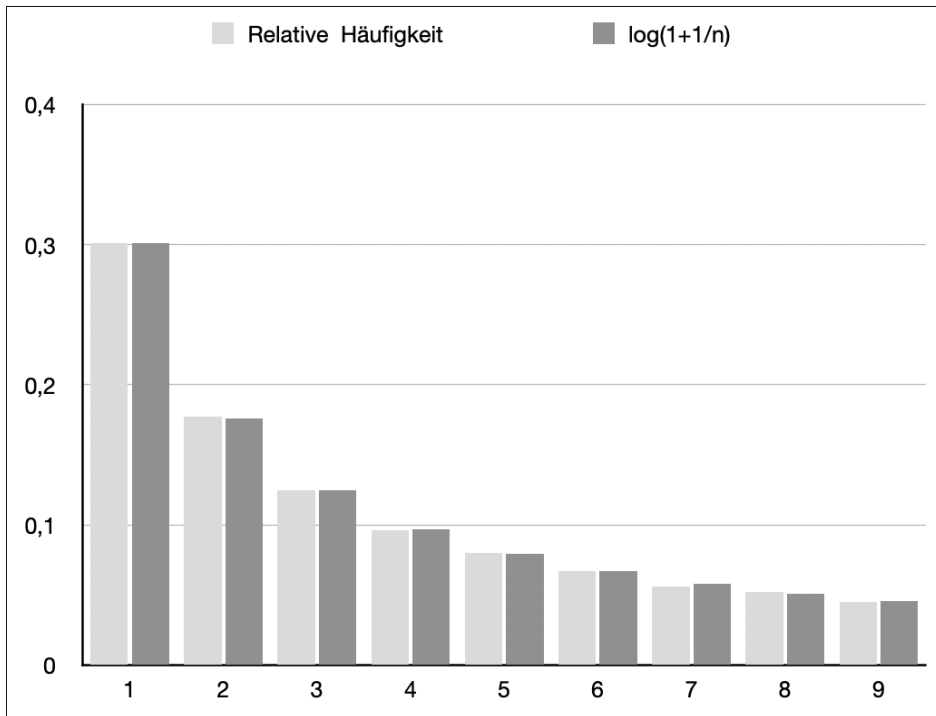


Abbildung 8.2: Gegenüberstellung der relativen Häufigkeiten aus Abbildung 8.1 mit den Wahrscheinlichkeiten der Benford-Verteilung

In Abbildung 8.2 sehen Sie als erste Säule die relativen Häufigkeiten dargestellt. Die Theorieverteilung nach dem Benford-Gesetz wird jeweils durch die rechts danebenstehende Säule dargestellt. Dem Diagramm kann man entnehmen, dass die Fibonacci-Zahlen dem Benford-Gesetz folgen.

8.3 Die Wahrscheinlichkeiten für die erste Ziffer

Nicht alle Datensätze folgen dem Benford-Gesetz. So beginnen Zeiten für den 400-Meter-Lauf nicht mit einer 1. Zwar ist die einzelne Zeit durchaus zufällig, beginnt aber wegen der Streckenweite nicht mit 1.

Beim Ziehen von ganzen Zufallszahlen aus dem Intervall [1;10] hat jede Ziffer 1, 2, 3, ..., 9 die gleiche Wahrscheinlichkeit, an erster Stelle zu stehen. Dagegen unterliegen Daten mit einem weiten Variationsbereich, die vielen Einflüssen ausgesetzt sind, dem Benford-Gesetz. Dazu gehören beispielsweise die Populationsgrößen von Städten oder Ländern, die durch viele Faktoren bestimmt sind.

Wenn Daten dem Benford-Gesetz gehorchen, dann ergeben sich für die erste Ziffer die in Abbildung 8.3 ablesbaren Wahrscheinlichkeiten.

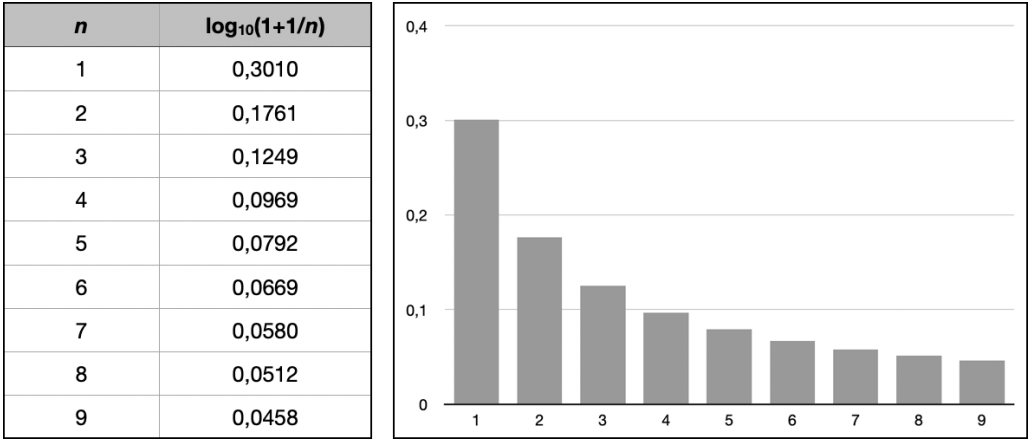


Abbildung 8.3: Wahrscheinlichkeitsfunktion für das Benford-Gesetz

8.4 Erstellen Sie das Tabellenblatt der Abbildung 8.1

	A	B	D	E		G
	Fibonacci Zahlen	Erste Ziffer	n	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit	$\log(1+1/n)$
2	1	1	1	301	0,301	0,3010
3	1	1	2	177	0,177	0,1761
4	2	2	3	125	0,125	0,1249
	3	3	4	96	0,096	0,0969
	5	5	5	80	0,08	0,0792
7	8	8	6	67	0,067	0,0669
8	13	1	7	56	0,056	0,0580
9	21	2	8	52	0,052	0,0512
10	34	3	9	45	0,045	0,0458
11	55	5				

Abbildung 8.4: Tabellenblatt zur Berechnung der relativen Häufigkeiten der ersten Ziffer

Schreiben Sie in die Zellen A2 und A3 jeweils eine 1. In die Zelle A4 kommt dann $=A2+A3$. Füllen Sie nach unten aus und schon haben Sie die ersten 1000 Folgenglieder der Fibonacci-Folge erzeugt.

Um die erste Ziffer der Fibonacci-Zahlen zu untersuchen, eignet sich die Funktion `LINKS(Text; Länge)`. Diese Funktion liefert vom Wort »Text« so viele Zeichen von links, wie »Länge« angibt.

Mit `LINKS(A2; 1)` erhalten Sie demnach die erste Ziffer der in A2 stehenden Fibonacci-Zahl. Schreiben Sie in Zelle B2 die Anweisung `=LINKS(A2; 1)` und füllen Sie anschließend nach unten aus.

In die Spalte D schreiben Sie die Ziffern 1 bis 9. Jetzt müssen Sie zählen, wie oft in der Spalte B die Ziffern 1, 2, 3, ... auftreten. Dafür gibt es die Funktion `ZÄHLENWENN(Bereich; Bedingung)`. Unser Zellbereich ist B2 bis B1001. Schreiben Sie deshalb `=ZÄHLENWENN(B2:B1001; D2)` in die Zelle E2. Weil in D2 die 1 steht, ermitteln Sie auf diese Weise, wie oft die 1 in der Spalte B vorkommt. Um die Häufigkeit der restlichen Ziffern zu erhalten, müssen Sie nach unten bis in die Zeile 10 ausfüllen.

Inhalt

Materialien zum Buch	13
Über dieses Buch	15
1 Die Regenwahrscheinlichkeit	17
2 Unwahrscheinliches?	19
3 Zufallszahlen	21
3.1 Losentscheide	21
3.2 Lineare Kongruenzgeneratoren	23
3.3 Wir experimentieren mit linearen Kongruenzgeneratoren	25
3.4 Wie erkennt man eine »echte« Zufallsfolge?	28
3.5 Zufallszahlen in der Tabellenkalkulation	29
3.6 Bauen Sie einen Würfel	29
4 Monte-Carlo-Methoden	31
4.1 Was ist π ?	31
4.2 Eine Monte-Carlo-Methode für π	31
4.3 Ein Tabellenblatt für das Dartboard-Verfahren	33
4.4 Die Entenjagd	34
5 Wie viele Leben besitzt eine Pfandflasche?	37
5.1 Lohnt sich die Rückgabe von Pfandflaschen?	37
5.2 Ein Modell für den Lebenslauf einer Pfandflasche	37
5.3 Überprüfen Sie das Ergebnis des letzten Abschnitts mit einer Simulation	40
6 Verschwörungstheorien	41
6.1 War die Mondlandung ein Fake?	41
6.2 Weiterführung der Rechnung aus Abschnitt 6.1	43

6.3	Aufgedeckte Verschwörungen	43
6.4	Bestimmung der Wahrscheinlichkeit w , dass eine beliebige Person innerhalb eines Jahres das Geheimnis verrät	44
6.5	Anwendung der Ergebnisse auf die Mondlandung	45
7	Truthähne und schwarze Schwäne	47
8	Was man beim Fälschen der Steuererklärung beachten sollte	51
8.1	Das Benford-Gesetz	51
8.2	Ein Beispiel für das Benford-Gesetz	52
8.3	Die Wahrscheinlichkeiten für die erste Ziffer	54
8.4	Erstellen Sie das Tabellenblatt der Abbildung 8.1	55
9	Backe, backe Kuchen	57
9.1	Heute backen wir Rosinenbrötchen	57
9.2	Verbesserung des Rezepts	59
9.3	Die Ausweitung des Rosinenproblems	60
9.4	Probieren Sie verschiedene Rezepte aus	65
9.5	Die mittlere Anzahl der Rosinen pro Brötchen	66
10	»Selbst-Bewichtelung« oder das Rencontre-Problem	67
10.1	Die Problemstellung	67
10.2	Jetzt können Sie selbst wichteln	69
10.3	Die Theorie des Wichtelns	71
11	Das Newton-Pepys-Problem	75
11.1	Problemstellung	75
11.2	Problemlösung	76
11.3	Bestätigen Sie die Rechnungen durch Simulationen	77

12 Würfelspiele	79
12.1 Berichte über Würfelspiele	79
12.2 Ein historisches Problem	80
12.3 Cosimo II. und Galilei – eine Geschichte in Bildern	80
12.4 Simulation des Würfelproblems	86
13 Die Würfelschlange	87
13.1 Das Experiment	87
13.2 Wir lüften das Geheimnis	89
13.3 Die Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren der Würfelschlange	92
13.4 Berechnen Sie die Werte $1 - (5/6)^n$	93
13.5 Eine Variante der Würfelschlange	94
14 Gruppenprüfung	95
14.1 Was ist eine Gruppenprüfung?	95
14.2 Bestimmung der Gruppengröße	96
14.3 Erstellen Sie ein Tabellenblatt zur Ermittlung der optimalen Gruppengröße	98
15 Würfel und Panini-Bilder	99
15.1 Der vollständige Satz beim Würfeln	99
15.2 Gute Geschäfte mit dem vollständigen Satz	102
15.3 Erstellen Sie das Tabellenblatt der Abbildung 15.5	104
16 Wahrscheinlichkeiten beim Warten auf den ersten Erfolg	105
16.1 Warten auf die erste 6 beim »Mensch ärgere dich nicht!«	105
16.2 Die Wahrscheinlichkeit für die erste 6 in drei Würfeln	108
17 Der Zufall ist nicht unsere Welt	109
17.1 Zufallsrechtecke	109
17.2 Stellen Sie ein Streudiagramm her	111

17.3	Münzwürfe	112
17.4	Ein Tabellenblatt für die maximale run-Länge	114
17.5	Junge oder Mädchen?	115
17.6	Fazit	116
18	Was ist denn jetzt Zufall und was ist Wahrscheinlichkeit?	119
18.1	Zufallsexperimente und Ereignisse	119
18.2	Beziehungen zwischen Ereignissen	121
18.3	Axiome der Wahrscheinlichkeit	122
18.4	Das Laplace-Modell	123
18.5	Das Binomialmodell	124
18.6	Das Poisson-Modell	125
18.7	Das geometrische Modell	130
19	V2-Raketen auf London	133
19.1	Zur Geschichte des V2-Beschusses von London	133
19.2	Vergleich von Praxis und Theorie	135
19.3	Berechnen Sie die Werte aus Tabelle 19.2 mit einem Tabellenblatt	137
19.4	Verwendung des Poisson-Modells	137
20	Ballspiele in Antike und Mittelalter	139
20.1	Ballspiele in der Antike	139
20.2	Ballspiele im Mittelalter	142
21	Der Zufall im Fußball	143
21.1	Torzeitpunkte lassen sich mit dem Poisson-Modell beschreiben	144
21.2	Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Spielstände	149
21.3	Die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg	152
22	Ein Brief über das Ballspiel	155
22.1	Jetzt kommt die Praxis	156

23 Die Einstandregelung	159
23.1 Ein Graph für die Einstandregelung	159
23.2 Wieder etwas Praxis	160
23.3 Die Gewinnwahrscheinlichkeit für die Einstandregelung	160
23.4 Der Matthäus-Effekt	165
23.5 Die Einstandregelung und die Praxis	166
24 Wir spielen Tennis	167
24.1 Die Tennisregeln	167
24.2 Die Gewinnwahrscheinlichkeit für ein Spiel	170
24.3 Die Berechnung von $\text{spiel}(p)$	171
24.4 Ausblick und Fazit	173
25 Haben Sie schon einmal im Supermarkt geklaut?	175
25.1 Probleme bei Umfragen	175
25.2 Eine einfache Version der Randomized-Response-Technik	175
26 Rot oder schwarz?	179
26.1 Die Spielregeln	179
26.2 Eine Modellierung für das Spiel	180
26.3 Die Strategie	182
26.4 Wie gut ist die Strategie?	182
27 Grundbegriffe der Tabellenkalkulation	185
27.1 Erstellen und Aktualisieren eines Tabellenblatts	185
27.2 Automatisches Ausfüllen eines Zellbereichs	186
27.3 Absolute und relative Zellbezüge	188
27.4 Ein Diagramm erstellen	189
Anhang	193
Literatur und Webseiten	199
Index	201

Index

A

AIDS-Skandal	95
Anpassungsheuristik	110
Axiom	122

B

Ballspiel	139
Benford-Gesetz	51
Binomialmodell	63, 124

C

Coin Flipper	112
Coronapandemie	95

D

Der vollständige Satz	99
Dreisatz-Match	167

E

Einstandregelung	159
Endliche geometrische Reihe	42
Ereignis	120
Ergebnis	120
Ergebnisraum	120
eulersche Zahl e	127

F

FBI forensics scandal	43
Fehlschluss	117
Fibonacci-Folge	52

G

Gegenereignis	76, 121
Geometrisches Modell	130
Gewinnwahrscheinlichkeit für ein Match-Tiebreak	194
Gewinnwahrscheinlichkeit für ein Spiel	170
Gewinnwahrscheinlichkeit für ein Tiebreak	193

Gewinnwahrscheinlichkeit für ein Zweisatz-Match	195
Gewinnwahrscheinlichkeit für einen Satz	194
Gruppengröße	96
Gruppenprüfung	95

H

Harmonische Reihe	102
-------------------------	-----

K

Kombination	62
-------------------	----

L

Laplace-Modell	123
Linearer Kongruenzgenerator	23

M

Matthäus-Effekt	165
Maximale run-Länge	114
Maximum-Likelihood-Methode	44
Mittenquadrat-Verfahren	23
Mittlere Wartezeit	101
Modell des Axiomensystems	123
Modulo	24
Mondlandung	41
Monte-Carlo-Methode	23, 31

N

Newton-Pepys-Problem	75
Normalverteilung	49
NSA-Prism-Affäre	43

P

Panini-Bild	99
Permutation	61
Pfadregel	36, 160
Pfandflasche	37
Poisson-Modell	125
Poisson-Näherung	128

R

Randomized-Response-Technik	175
Regenwahrscheinlichkeit	17
Rencontre-Problem	67
Rosinenbrötchen	57
Rücklaufquote	39
run	114

S

Sicheres Ereignis	120
Simon Newcomb	51
Stichprobe ohne Wiederholung	61

T

Tennisregeln	167
Torzeitpunkt	144
Truthahn-Illusion	47
Tuskegee syphilis experiment	43

U

Unmögliches Ereignis	120
----------------------------	-----

V

V2-Rakete	133
Verschwörungstheorie	41
Volatilität	49

W

Warten auf den ersten Erfolg	105
Würfelschlange	87
Würfelspiel	79

Z

Zufall im Fußball	143
Zufallsexperiment	119
Zufallsrechteck	109
Zufallszahl	21
Zweisatz-Match	167

Mathematik nach Feierabend

Verstehen Sie den Zufall?

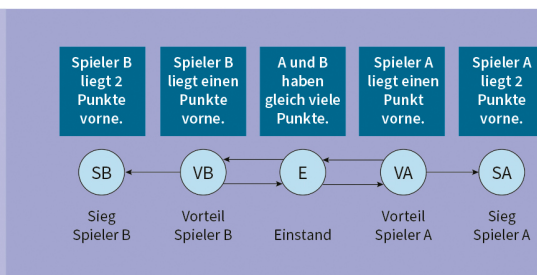
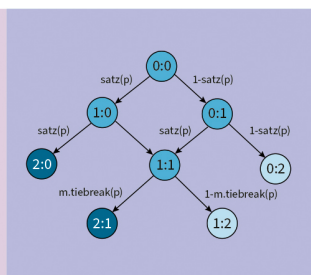
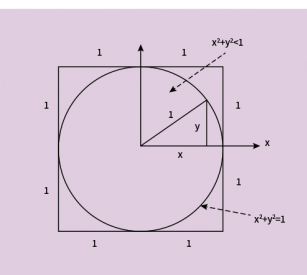
Regenwahrscheinlichkeit, Würfel- oder Münzwürfe – alles Zufall? Alles Mathematik!

Benno Grabinger zeigt Ihnen anhand zahlreicher Beispiele und Anekdoten, wo sich der Zufall im Alltag verbirgt und wie man ihn berechnen kann. Wie viele Leben hat eine Pfandflasche? Spielt der Zufall beim Sieg Ihrer Lieblings-Fußballmannschaft eigentlich eine Rolle? Und woran erkennt man eine gefälschte Steuererklärung? Antworten auf diese Fragen finden Sie hier: Lassen Sie sich überraschen!

Aus dem Inhalt

- Weihnachtswichteln und das Recontre-Problem
- Monte-Carlo-Methoden
- Pfandflaschen und Irrfahrten
- Verschwörungstheorien und die endliche geometrische Reihe
- Das Glück im Würfelspiel
- Tennis und die Einstandregelung
- Die Strategie der Kartenspiele

Mit Tabellenkalkulationen zum Mitmachen und Ausprobieren



Benno Grabinger ist Autor und Fachdidaktiker für die Fächer Mathematik und Statistik. Er verbindet die Arbeit mit Excel und Co. mit intuitiven Alltagsbeispielen, um Zusammenhänge anschaulich und praktisch zu vermitteln.

