

• Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira. Nomeadamente, no referente ao Módulo 10, Apontamentos de Análise Matemática 1, Matemática 1 - Eng. Manuel Messias • páginas: 502 a 519

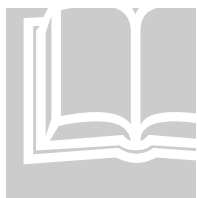
• Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

Módulo 10

TÓPICOS

Método de primitivação por partes.

Método de primitivação por substituição.



4. Método de primitivação por partes.

Primitivação por partes.

O método de *primitivação por partes* é aplicado ao *produto de duas funções* do qual se pretende conhecer a primitiva. Considerando duas funções $u' = f(x)$ e $v = g(x)$, então

$$P[\underbrace{f(x)}_{u'} \underbrace{g(x)}_v] = \underbrace{P[f(x)]}_u \underbrace{g(x)}_v - P[\underbrace{P[f(x)]}_u \underbrace{g'(x)}_{v'}]$$

$$P[u'v] = uv - P[uv']$$

A função $v = g(x)$ deve ser escolhida por ser a que mais se simplifica por derivação e a função $u' = f(x)$ tem de ser uma função cuja primitiva é conhecida.

Casos de interesse.

1. Para $P[x^n e^x]$ deve fazer-se

$$\begin{cases} u' = e^x \\ u = e^x \end{cases} \text{ e } \begin{cases} v = x^n \\ v' = nx^{n-1} \end{cases}$$

, de onde resulta a fórmula recorrente

$$P[x^n e^x] = e^x x^n - nP[x^{n-1} e^x]$$

De modo semelhante se procederia em geral para $P[f(x)e^x]$.

2. Para $P[x^n \sin(x)]$ deve fazer-se

$$\begin{cases} u' = \sin(x) \\ u = -\cos(x) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} v = x^n \\ v' = nx^{n-1} \end{cases}$$

, de onde resulta a fórmula recorrente

$$P[x^n \operatorname{sen}(x)] = -x^n \cos(x) + nP[x^{n-1} \cos(x)]$$

De modo semelhante se procederia em geral para $P[f(x) \operatorname{trig}(x)]$, em que $\operatorname{trig}(x)$ designa qualquer função trigonométrica.

3. Para $P[x^n \arctan(x)]$ deve fazer-se

$$\begin{cases} u' = x^n \\ u = x^{n+1} / (n+1) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} v = \arctan(x) \\ v' = 1 / (1+x^2) \end{cases}$$

, de onde resulta a fórmula

$$P[x^n \arctan(x)] = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arctan(x) - \frac{1}{n+1} P\left[\frac{x^{n-1}}{1+x^2}\right]$$

De modo semelhante se procederia em geral para $P[f(x) \operatorname{arctrig}(x)]$, em que $\operatorname{arctrig}(x)$ designa qualquer função trigonométrica inversa.

4. Para $P[x^n \ln(x)]$, com $n \neq -1$, deve fazer-se

$$\begin{cases} u' = x^n \\ u = x^{n+1} / (n+1) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} v = \ln(x) \\ v' = 1/x \end{cases}$$

, de onde resulta

$$P[x^n \ln(x)] = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

De modo semelhante se procederia em geral para $P[f(x) \ln(x)]$.

Resumindo:

	u'	v
$P f(x) e^x$	e^x	$f(x)$
$P f(x) \operatorname{trig}(x)$	$\operatorname{trig}(x)$	$f(x)$
$P f(x) \operatorname{arctrig}(x)$	$f(x)$	$\operatorname{arctrig}(x)$
$P f(x) \ln(x)$	$f(x)$	$\ln(x)$



Exercícios.

1. Calcule $P[(x^2 - 2x)e^{-x}]$

- Fazendo $\begin{cases} u' = e^{-x} \\ u = -e^{-x} \end{cases}$ e $\begin{cases} v = x^2 - 2x \\ v' = 2x - 2 \end{cases}$, resulta

$$P[(x^2 - 2x)e^{-x}] = -e^{-x}(x^2 - 2x) + P[e^{-x}(2x - 2)]$$

- fazendo agora $\begin{cases} u' = e^{-x} \\ u = -e^{-x} \end{cases}$ e $\begin{cases} v = 2x - 2 \\ v' = 2 \end{cases}$, resulta

$$\begin{aligned} P[(x^2 - 2x)e^{-x}] &= -e^{-x}(x^2 - 2x) - e^{-x}(2x - 2) + 2P[e^{-x}] \\ &= e^{-x}(2x - x^2) - e^{-x}(2x - 2) - 2e^{-x} + C \\ &= -x^2e^{-x} + C \end{aligned}$$

2. Calcule $P[x \cos(x)]$

- Fazendo $\begin{cases} u' = \cos(x) \\ u = \sin(x) \end{cases}$ e $\begin{cases} v = x \\ v' = 1 \end{cases}$, resulta

$$P[x \cos(x)] = \sin(x)x - P[\sin(x)] = x \sin(x) + \cos(x) + C$$

3. Calcule $P[\arctan(x)]$

- Fazendo $\begin{cases} u' = 1 \\ u = x \end{cases}$ e $\begin{cases} v = \arctan(x) \\ v' = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$, resulta

$$\begin{aligned} P[\arctan(x)] &= x \arctan(x) - P\left[\frac{x}{1+x^2}\right] \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

4. Calcule $P[(x+1)\ln(x+1)]$

- Fazendo $\begin{cases} u' = x+1 \\ u = \frac{(x+1)^2}{2} \end{cases}$ e $\begin{cases} v = \ln(x+1) \\ v' = \frac{1}{x+1} \end{cases}$, resulta

$$\begin{aligned} P[(x+1)\ln(x+1)] &= \frac{(x+1)^2}{2} \ln(x+1) - P\left[\frac{(x+1)^2}{2} \frac{1}{x+1}\right] \\ &= \frac{(x+1)^2}{2} \ln(x+1) - \frac{(x+1)^2}{4} + C \end{aligned}$$

5. Calcule $P[e^x \operatorname{sen}(x)]$

- Neste caso é irrelevante a escolha, pois nenhuma das funções se simplifica por derivação. A estratégia de primitivação consiste em tentar obter a expressão de partida.

$$\text{Fazendo } \begin{cases} u' = e^x \\ u = e^x \end{cases} \text{ e } \begin{cases} v = \operatorname{sen}(x) \\ v' = \cos(x) \end{cases}, \text{ resulta}$$

$$P[e^x \operatorname{sen}(x)] = e^x \operatorname{sen}(x) - P[e^x \cos(x)]$$

$$\text{Fazendo agora } \begin{cases} u' = e^x \\ u = e^x \end{cases} \text{ e } \begin{cases} v = \cos(x) \\ v' = -\operatorname{sen}(x) \end{cases}, \text{ resulta}$$

$$P[e^x \operatorname{sen}(x)] = e^x \operatorname{sen}(x) - e^x \cos(x) - P[e^x \operatorname{sen}(x)]$$

$$2P[e^x \operatorname{sen}(x)] = e^x \operatorname{sen}(x) - e^x \cos(x)$$

$$P[e^x \operatorname{sen}(x)] = e^x \frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2} + C$$

6. Calcule $P[\ln(x+2)]$

$$\bullet \text{ Fazendo } \begin{cases} u' = 1 \\ u = x+2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} v = \ln(x+2) \\ v' = 1/(x+2) \end{cases}, \text{ resulta}$$

$$\begin{aligned} P[\ln(x+2)] &= (x+2) \ln(x+2) - P\left[\frac{x+2}{x+2}\right] \\ &= (x+2) \ln(x+2) - x + C \end{aligned}$$



5. Método de primitivação por substituição.

Primitivação por substituição.

Seja $f(x)$ uma função primitivável num intervalo I e seja $x = g(t)$ uma função bijectiva e diferenciável num intervalo J tal que $g(J) = I$, então

$$P[f(x)] = P[f(g(t))g'(t)]_{t=g^{-1}(x)}$$

O objectivo da substituição de variável, $x = g(t)$, na expressão da função a primitivar, $f(x)$, é transformar essa expressão noutra, $f(g(t))g'(t)$, cuja expressão é reconhecidamente mais simples.

Calculada a primitiva, procede-se a nova transformação de variável, $t = g^{-1}(x)$, obtendo-se assim $P[f(x)]$.

Casos de interesse.

Na tabela seguinte mostram-se alguns casos típicos de escolha da substituição de variável, adequada à simplificação das expressões analíticas das funções a primitivar.

$f(x)$ contendo	$x = g(t)$	$g'(t)$	$t = g^{-1}(x)$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$a \sin(t)$	$a \cos(t)$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$a \tan(t)$	$a \sec^2(t)$	$\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$a \sec(t)$	$a \sec(t) \tan(t)$	$\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)$
e^{kx}	$\ln(t)$	$\frac{1}{t}$	e^x
$\ln^k(x)$	e^t	e^t	$\ln(x)$



Exercícios.

1. Calcule $P\left[\frac{1}{x + \sqrt[4]{x^3}}\right]$

- Fazendo $x = g(t) = t^4$, pelo que $g'(t) = 4t^3$ e $t = g^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$, resulta

$$P\left[\frac{1}{x + \sqrt[4]{x^3}}\right] = P\left[\frac{1}{t^4 + t^3} 4t^3\right]_{t=\sqrt[4]{x}}$$

$$P\left[\frac{1}{t^4 + t^3} 4t^3\right] = 4P\left[\frac{t^3}{t^4 + t^3}\right] = 4P\left[\frac{1}{t+1}\right] = 4\ln|t+1| + C$$

logo

$$P\left[\frac{1}{x + \sqrt[4]{x^3}}\right] = 4\ln|t+1|_{t=\sqrt[4]{x}} + C = 4\ln(\sqrt[4]{x} + 1) + C$$

2. Calcule $P\left[\frac{e^{3x} + 5e^{2x}}{e^x + 1}\right]$

- Fazendo $x = g(t) = \ln(t)$, pelo que $g'(t) = \frac{1}{t}$ e $t = g^{-1}(x) = e^x$, resulta

$$\begin{aligned} P\left[\frac{e^{3x} + 5e^{2x}}{e^x + 1}\right] &= P\left[\frac{(e^x)^3 + 5(e^x)^2}{e^x + 1}\right] = P\left[\frac{t^3 + 5t^2}{t+1} \frac{1}{t}\right]_{t=e^x} \\ &= P\left[\frac{t^2 + 5t}{t+1}\right] = P\left[t + 4 + \frac{-4}{t+1}\right] = \frac{t^2}{2} + 4t - 4\ln|t+1| + C \\ &= \frac{e^{2x}}{2} + 4e^x - 4\ln(e^x + 1) + C \end{aligned}$$

3. Calcule $P\left[\frac{\ln^3 x + 2\ln x + 5}{x(3 + \ln x)}\right]$

- Fazendo $x = g(t) = e^t$, pelo que $g'(t) = e^t$ e $t = g^{-1}(x) = \ln(x)$, resulta

$$\begin{aligned} P\left[\frac{\ln^3 x + 2\ln x + 5}{x(3 + \ln x)}\right] &= P\left[\frac{t^3 + 2t + 5}{e^t(3+t)} e^t\right] = P\left[\frac{t^3 + 2t + 5}{3+t}\right] \\ &= P\left[t^2 - 3t + 11 + \frac{-28}{3+t}\right] = \frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + 11t - 28\ln|3+t| + C \\ &= \frac{\ln^3(x)}{3} - \frac{3}{2}\ln^2(x) + 11\ln(x) - 28\ln|\ln(x) + 3| + C \end{aligned}$$

4. Calcule $P\left[\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\right]$

- Fazendo $x = g(t) = 2\sin(t)$, pelo que $g'(t) = 2\cos(t)$ e $t = g^{-1}(x) = \arcsin(x/2)$, resulta

$$\begin{aligned} P\left[\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\right] &= P\left[\frac{8\sin^3(t)}{\sqrt{4-4\sin^2(t)}} 2\cos(t)\right] = P\left[\frac{8\sin^3(t)}{2\sqrt{1-\sin^2(t)}} 2\cos(t)\right] \\ &= 8P\left[\frac{\sin^3(t)}{\cos(t)} 2\cos(t)\right] = 8P[\sin^3(t)] \\ &= 8P[\sin^2(t)\sin(t)] = 8P[(1-\cos^2(t))\sin(t)] \\ &= 8P[\sin(t)] - 8P[(\cos^2(t)\sin(t))] = -8\cos(t) + 8\frac{\cos^3(t)}{3} + C \end{aligned}$$

Sendo $\cos(t) = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$, resulta, finalmente

$$P\left[\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\right] = -4\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3} + C$$

5. Calcule $P\left[\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right]$

- Fazendo $x = g(t) = \frac{2}{t^2+1}$, pelo que $g'(t) = \frac{-4t}{(t^2+1)^2}$ e $t = g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$, resulta

$$P\left[\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right] = P\left[t \frac{-4t}{(t^2+1)^2}\right] = -2(t^2+1)^{-2} 2t \cdot t$$

- Fazendo $\begin{cases} u' = (t^2+1)^{-2} 2t \\ u = -(t^2+1)^{-1} \end{cases}$ e $\begin{cases} v = t \\ v' = 1 \end{cases}$, resulta

$$\begin{aligned} P\left[\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right] &= -2\left[-(t^2+1)^{-1} t - P[-(t^2+1)^{-1}]\right] \\ &= 2\frac{t}{t^2+1} - 2\left[P\frac{1}{1+t^2}\right] = 2\frac{t}{t^2+1} - 2\arctan(t) + C \\ &= 2\frac{\sqrt{\frac{2-x}{x}}}{\frac{2-x}{x}+1} - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right) + C \end{aligned}$$