

• Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira. Nomeadamente, no referente ao Módulo 11, Apontamentos de Análise Matemática 1, Matemática 1 - Eng. Manuel Messias • páginas: 520 a 536

• Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

Módulo 11

TÓPICOS

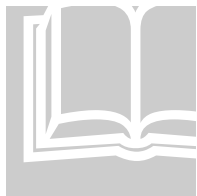
Primitivação de funções racionais.

Zeros de um polinómio.

Fracções simples.

Decomposição em fracções simples.

Primitivação de fracções simples.



6. Primitivação de funções racionais.

Zeros de um polinómio.

Dado o polinómio

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

, em que $a_0, a_1, \dots, a_n$ são coeficientes reais

1. Diz-se que x_0 é um zero de $P(x)$ se $P(x_0) = 0$.
2. $P(x)$ admite o zero $x = x_0$ sse é divisível por $x - x_0$, ou seja, $P(x) = (x - x_0)Q(x)$
3. Se $P(x)$ tiver um zero complexo $x_0 = \alpha + j\beta$, então tem também o zero complexo conjugado de x_0 , $\bar{x}_0 = \alpha - j\beta$.
4. Diz-se que x_0 é um zero de $P(x)$ de grau de multiplicidade k , com $k = 1, 2, 3, \dots$, se $P(x)$ é divisível por $(x - x_0)^k$ e não é divisível por $(x - x_0)^{k+1}$.
5. Sendo $P(x)$ de grau n , tem n , e só n , zeros.

Fracções simples.

Chamam-se *fracções simples* as funções racionais do tipo

$$1. \frac{A}{x - a}, A, a \in \mathbb{R}$$

$$2. \frac{A}{(x - a)^n}, A, a \in \mathbb{R}, n \geq 2 \in \mathbb{N}$$

$$3. \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}, A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$4. \frac{Ax + B}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^n}, A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Decomposição em fracções simples.

Se: *i)* $P(x)/Q(x)$ é uma *função racional irredutível*, ou seja, $P(x)$ e $Q(x)$ não têm zeros comuns, pelo que não é possível simplificar a fracção.

ii) $P(x)/Q(x)$ é uma *função racional própria*, ou seja, o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

$$iii) Q(x) = a_0(x - a)^p \cdots (x - b)^q ((x - \alpha)^2 + \beta^2)^r \cdots ((x - \gamma)^2 + \varphi^2)^s$$

Então $P(x)/Q(x)$ é uma fracção simples ou pode ser decomposto numa soma de fracções simples

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_p}{(x - a)^p} + \cdots + \frac{B_1}{x - b} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \cdots + \frac{B_q}{(x - b)^q} + \\ & + \frac{M_1x + N_1}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{M_2x + N_2}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^2} + \cdots + \frac{M_rx + N_r}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^r} + \cdots \\ & + \frac{P_1x + Q_1}{(x - \gamma)^2 + \varphi^2} + \frac{P_2x + Q_2}{((x - \gamma)^2 + \varphi^2)^2} + \cdots + \frac{P_sx + Q_s}{((x - \gamma)^2 + \varphi^2)^s} \end{aligned}$$

, onde $A_k, \dots, B_k, M_k, N_k, \dots, P_k, Q_k$ são constantes a determinar.

Primitivação de fracções simples.

A primitivação de qualquer um dos 4 tipos de fracções simples é imediata ou pode ser facilmente calculável recorrendo ao método de substituição.

1. Fracções resultantes da existência de um zero simples de $Q(x)$ em $x = a$.

$$P\left[\frac{A}{x - a}\right] = AP\left[\frac{1}{x - a}\right] = A \ln\left|\frac{1}{x - a}\right| + C$$

2. Fracções resultantes da existência de um zero múltiplo de $Q(x)$ em $x = a$.

$$P\left[\frac{A}{(x - a)^n}\right] = AP[(x - a)^{-n}] = A \frac{(x - a)^{-n+1}}{-n + 1} + C$$

3. Fracções resultantes da existência de um par de zeros complexos de $Q(x)$ em $x = \alpha \pm j\beta$.

Recorrendo à substituição $x - \alpha = \beta t$ a primitiva é transformada na forma $P[(Ct + D)/(t^2 + 1)]$ que resulta num $\ln()$ e/ou num $\arctan()$.

$$\begin{aligned} P\left[\frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}\right] &= P\left[\frac{A(\alpha + \beta t) + B}{\beta^2(1 + t^2)}\beta\right]_{t=\frac{x-\alpha}{\beta}} = \frac{A\alpha + B}{\beta} P\left[\frac{1}{1 + t^2}\right] + \frac{A}{2} P\left[\frac{2t}{1 + t^2}\right] \\ &= \frac{A\alpha + B}{\beta} \arctan\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right) + \frac{A}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right)^2\right) \end{aligned}$$

4. Fracções resultantes da existência de um par de zeros complexos de $Q(x)$, de multiplicidade n , em $x = \alpha \pm j\beta$. Recorrendo à substituição $x - \alpha = \beta t$ a primitiva é transformada na forma $P[(Dt + E)/(t^2 + 1)^n]$, de onde resulta

$$\begin{aligned} P\left[\frac{Ax + B}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^n}\right] &= P\left[\frac{A(\alpha + \beta t) + B}{\beta^{2n}(t^2 + 1)^n} \beta\right] \\ &= \frac{A}{2\beta^{2n-2}} P\left[\frac{2t}{(t^2 + 1)^n}\right] + \frac{A\alpha + B}{\beta^{2n-1}} P\left[\frac{1}{(t^2 + 1)^n}\right] \\ &= \frac{A}{2\beta^{2n-2}} \frac{(t^2 + 1)^{n-1}}{n-1} + \frac{A\alpha + B}{\beta^{2n-1}} P\left[\frac{1}{(t^2 + 1)^n}\right] + C \end{aligned}$$

em que a primitiva restante pode ser resolvida recorrendo ao método de primitivação por partes, resultando a fórmula de recorrência

$$P\left[\frac{1}{(t^2 + 1)^n}\right] = \frac{1}{2n-2} \frac{t}{(t^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} P\left[\frac{1}{(t^2 + 1)^{n-1}}\right]$$



Exercícios.

1. Calcule $P\left[\frac{x^2 + x}{x^2 - 4x + 3}\right]$

- Começando, por divisão polinomial, por obter uma fracção irredutível

$$P\left[\frac{x^2 + x}{x^2 - 4x + 3}\right] = P\left[1 + \frac{5x - 3}{x^2 - 4x + 3}\right] = x + P\left[\frac{5x - 3}{x^2 - 4x + 3}\right] + C$$

Determinando em seguida os zeros de $Q(x) = x^2 - 4x + 3$, concluindo que o polinómio tem *duas raízes simples*

$$Q(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

Pelo que a fracção racional pode ser decomposta em fracções simples do tipo

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x - 3)}$$

Determinando A , e B

$$5x - 3 = A(x - 3) + B(x - 1) \Rightarrow A = -1 \wedge B = 6$$

podemos escrever finalmente

$$\begin{aligned} P\left[\frac{x^2 + x}{x^2 - 4x + 3}\right] &= x + P\left[\frac{-1}{(x - 1)} + \frac{6}{(x - 3)}\right] + C \\ &= x - \ln|x - 1| + 6 \ln|x - 3| + C \end{aligned}$$

2. Calcule $P\left[\frac{4x^3 + x^2}{4x^2 - 4x + 1}\right]$

- Começando, por divisão polinomial, por obter uma fracção irredutível

$$P\left[\frac{4x^3 + x^2}{4x^2 - 4x + 1}\right] = P\left[\frac{5}{4} + x + \frac{4x - \frac{5}{4}}{4x^2 - 4x + 1}\right] = \frac{5}{4}x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}P\left[\frac{16x - 5}{x^2 - x + 0.25}\right] + C$$

Determinando em seguida os zeros de $Q(x) = x^2 - x + 0.25$, concluindo que o polinómio tem *uma raiz dupla*

$$Q(x) = x^2 - x + 0.25 = (x - 0.5)(x - 0.5)$$

Pelo que a fracção racional pode ser decomposta em fracções simples do tipo

$$\frac{16x - 5}{x^2 - x + 0.25} = \frac{A}{(x - 0.5)} + \frac{B}{(x - 0.5)^2}$$

Determinando A , e B

$$16x - 5 = A(x - 0.5) + B \Rightarrow A = 16 \wedge B = 3$$

podemos escrever finalmente

$$\begin{aligned} P\left[\frac{4x^3 + x^2}{4x^2 - 4x + 1}\right] &= \frac{5}{4}x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}P\left[\frac{16}{(x-0.5)} + \frac{3}{(x-0.5)^2}\right] + C \\ &= \frac{5}{4}x + \frac{x^2}{2} + \ln|x-0.5| + \frac{3}{16}P[(x-0.5)^{-2}] + C \\ &= \frac{5}{4}x + \frac{x^2}{2} + \ln|x-0.5| - \frac{3}{16}(x-0.5)^{-1} + C \end{aligned}$$

3. Calcule $P\left[\frac{x^3 + 1}{x^3 - 4x^2 + 13x}\right]$

- Começando, por divisão polinomial, por obter uma fracção irredutível

$$P\left[\frac{x^3 + 1}{x^3 - 4x^2 + 13x}\right] = P\left[1 + \frac{4x^2 - 13x + 1}{x^3 - 4x^2 + 13x}\right] = x + P\left[\frac{4x^2 - 13x + 1}{x^3 - 4x^2 + 13x}\right] + C$$

Determinando em seguida os zeros de $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 13x$, concluindo que o polinómio tem *uma raiz real simples* e *duas raízes complexas conjugadas*

$$Q(x) = x^3 - 4x^2 + 13x = x(x - (2 + 3j))(x - (2 - 3j)) = x[(x - 2)^2 + 3^2]$$

Pelo que a fracção racional pode ser decomposta em fracções simples do tipo

$$\frac{4x^2 - 13x + 1}{x^3 - 4x^2 + 13x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 4x + 13}$$

Determinando A , B e C

$$4x^2 - 13x + 1 = (A + B)x^2 + (C - 4A)x + 13A \Rightarrow A = 1/13, B = 51/13, C = -165/13$$

podemos escrever

$$P\left[\frac{4x^2 - 13x + 1}{x^3 - 4x^2 + 13x}\right] = \frac{1}{13}P\left[\frac{1}{x} + \frac{51x - 165}{x^2 - 4x + 13}\right] = \frac{1}{13}\ln|x| + \frac{1}{13}P\left[\frac{51x - 165}{(x-2)^2 + 3^2}\right] + C$$

Recorrendo agora ao método de substituição, fazendo $x - 2 = 3t$, ou seja, $x = g(t) = 2 + 3t$, pelo que $g'(t) = 3$ e $t = g^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$, resulta

$$\begin{aligned} P\left[\frac{51x - 165}{(x-2)^2 + 3^2}\right] &= P\left[\frac{51(2+3t) - 165}{9t^2 + 3^2}3\right] = \frac{1}{3}P\left[\frac{153t - 63}{t^2 + 1}\right] \\ &= \frac{153}{6}P\left[\frac{2t}{t^2 + 1}\right] - \frac{63}{3}P\left[\frac{1}{t^2 + 1}\right] = \frac{51}{2}\ln(t^2 + 1) - 21\arctan(t) \\ &= \frac{51}{2}\ln\left(\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + 1\right) - 21\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C \end{aligned}$$

Pelo que, finalmente

$$P\left[\frac{x^3 + 1}{x^3 - 4x^2 + 13x}\right] = x + \frac{1}{13}\ln|x| + \frac{51}{26}\ln\left(\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + 1\right) - \frac{21}{13}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$$

4. Calcule $P\left[\frac{x^3 - 1}{x^4 + 6x^2 + 9}\right]$

- Determinando os zeros de $Q(x) = x^4 + 6x^2 + 9$, concluímos que o polinómio tem *uma raiz dupla complexa conjugada* em $x = \pm\sqrt{3}j$

$$Q(x) = x^4 + 6x^2 + 9 = (x - \sqrt{3}j)^2(x + \sqrt{3}j)^2 = (x^2 + 3)^2$$

Pelo que a fracção racional pode ser decomposta em fracções simples do tipo

$$\frac{x^3 - 1}{x^4 + 6x^2 + 9} = \frac{Ax + B}{x^2 + 3} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 3)^2}$$

Determinando A , B , C , e D

$$x^3 - 1 = Ax^3 + Bx^2 + (3A + C)x + 3B + D \Rightarrow A = 1, B = 0, C = -3, D = -1$$

podemos escrever

$$P\left[\frac{x^3 - 1}{x^4 + 6x^2 + 9}\right] = P\left[\frac{x}{x^2 + 3}\right] - 3P\left[\frac{x}{(x^2 + 3)^2}\right] - P\left[\frac{1}{(x^2 + 3)^2}\right]$$

Sendo

$$P\left[\frac{x}{x^2 + 3}\right] = \frac{1}{2}P\left[\frac{2x}{x^2 + 3}\right] = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 3) + C$$

$$P\left[\frac{x}{(x^2 + 3)^2}\right] = \frac{1}{2}P[(x^2 + 3)^{-2}2x] = \frac{1}{2}\frac{(x^2 + 3)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2 + 3} + C$$

$$\begin{aligned} P\left[\frac{1}{(x^2 + 3)^2}\right] &= \frac{1}{3}P\left[\frac{x^2 + 3 - x^2}{(x^2 + 3)^2}\right] = \frac{1}{3}P\left[\frac{1}{x^2 + 3}\right] - \frac{1}{3}P\left[\frac{x^2}{(x^2 + 3)^2}\right] \\ &= \frac{1}{3}P\left[\frac{1}{x^2 + 3}\right] - \frac{1}{3}P[(x^2 + 3)^{-2}x^2] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9}\arctan\left(x\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{1}{6}\frac{x}{x^2 + 3} - \frac{\sqrt{3}}{18}\arctan\left(x\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + C \\ &= \frac{\sqrt{3}}{18}\arctan\left(x\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{1}{6}\frac{x}{x^2 + 3} + C \end{aligned}$$

Resulta finalmente

$$\begin{aligned} P\left[\frac{x^3 - 1}{x^4 + 6x^2 + 9}\right] &= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 3) + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2 + 3} - \frac{1}{6}\frac{x}{x^2 + 3} - \frac{\sqrt{3}}{18}\arctan\left(x\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 3) + \frac{1}{6}\frac{9 - x}{x^2 + 3} - \frac{\sqrt{3}}{18}\arctan\left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right) + C \end{aligned}$$