

Módulo 12

• Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira. Nomeadamente, no referente ao Módulo 12, Apontamentos de Análise Matemática 1, Matemática 1 - Eng. Manuel Messias • páginas: 537 a 560

• Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Primitivação de funções irracionais.



7. Primitivação de funções irracionais.

Funções irracionais cuja primitivação se reduz à de funções racionais.

Embora não exista um método geral para primitivar funções irracionais, sendo que muitas delas não têm primitivas elementares, ou sequer conhecidas, existe uma família importante de funções irracionais que, em resultado de uma adequada *substituição de variável*, podem ser reduzidas as funções racionais, passando o problema da sua primitivação a ser trivial.

Expõem-se em seguida os casos mais comuns de funções irracionais redutíveis a funções racionais. As substituições de variável aconselhada permitem resolver cada um dos problemas de primitivação de modo sistemático, sendo que para casos particulares pode haver soluções que conduzam a soluções menos trabalhosas.

Sendo que $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ designa uma expressão analítica de uma função racional em x_1, x_2, \dots, x_n temos:

1. Caso $f(x) = R(e^x)$.

Em geral fazer: $e^x = t; x = \ln(t); x' = \frac{1}{t}$

2. Caso $f(x) = \frac{1}{x} R(\ln(x))$.

Em geral fazer: $\ln(x) = t; x = e^t; x' = e^t$

3. Casos $f(x) = \cos(x) R(\sin(x))$ ou $f(x) = \sin(x) R(\cos(x))$.

Em geral fazer: $\sin(x) = t; x = \arcsen(t); x' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$,

ou, $\cos(x) = t; x = \arccos(t); x' = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

4. Casos $f(x) = R(\tan(x))$ ou $f(x) = R(\cotan(x))$.

$$\text{Em geral fazer: } \tan(x) = t; x = \arctan(t); x' = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\text{ou, } \cotan(x) = t; x = \operatorname{arccotan}(t); x' = -\frac{1}{1+t^2}.$$

5. Caso $f(x) = R(\sin(x)\cos(x))$ e, em geral, para mais que uma de qualquer uma das funções trigonométricas, $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$ e $\operatorname{cosec}(x)$.

$$\text{Em geral fazer: } \tan\left(\frac{x}{2}\right) = t; x = 2\arctan(t); x' = \frac{2}{1+t^2}, \text{ tendo ainda em atenção que}$$

$$\sin(x) = 2 \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ e } \cos(x) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

$$6. \text{ Caso } f(x) = R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{p_1/q_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{p_{n-1}/q_{n-1}} \right]$$

$$\text{Em geral fazer } \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) = t^q, \text{ em que } q \text{ é o menor múltiplo comum de } q_1, q_2, \dots, q_n.$$

7. Casos $f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

Em geral fazer a mais simples das três seguintes possíveis substituições de variável:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t \quad , \text{ se } a > 0$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx \quad , \text{ se } c > 0$$

,ou, caso $ax^2 + bx + c$ tenha raízes reais distintas, e sendo α uma dessas raízes,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$$



Exercícios.

1. Calcule $P \left[\frac{e^{3x} + 1}{e^{2x} + e^x + 1} \right]$

- Fazendo $e^x = t$, ou seja, $x = \ln(t)$ e $x' = \frac{1}{t}$, resulta

$$P \left[\frac{e^{3x} + 1}{e^{2x} + e^x + 1} \right] = P \left[\frac{t^3 + 1}{t^2 + t + 1} \frac{1}{t} \right] = P \left[\frac{t^3 + 1}{t^3 + t^2 + t} \right]_{t=e^x}$$

que é primitivável com base nos métodos gerais vistos no módulo anterior.

2. Calcule $P \left[\frac{\ln^3(x) + 3}{x(\ln^2(x) - 1)} \right]$

- Fazendo $\ln(x) = t$, ou seja, $x = e^t$ e $x' = e^t$, resulta

$$P \left[\frac{\ln^3(x) + 3}{x(\ln^2(x) - 1)} \right] = P \left[\frac{t^3 + 3}{e^t(t^2 - 1)} e^t \right] = P \left[\frac{t^3 + 3}{t^2 - 1} \right]_{t=\ln(x)}$$

que é primitivável com base nos métodos gerais vistos no módulo anterior.

3. Calcule $P \left[\frac{\sin(x) + 1}{\sin^3(x) - 6\sin^2(x) + 8\sin(x)} \cos(x) \right]$

- Fazendo $\sin(x) = t$, ou seja, $x = \arcsen(t)$ e $x' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, resulta

$$\begin{aligned} P \left[\frac{\sin(x) + 1}{\sin^3(x) - 6\sin^2(x) + 8\sin(x)} \cos(x) \right] &= P \left[\frac{t + 1}{t^3 - 6t^2 + 8t} \sqrt{1-t^2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right] \\ &= P \left[\frac{t + 1}{t^3 - 6t^2 + 8t} \right]_{t=\sin(x)} \end{aligned}$$

que é primitivável com base nos métodos gerais vistos no módulo anterior.

4. Calcule $P \left[\frac{\tan(x)}{\tan(x) - 2} \right]$

- Fazendo $\tan(x) = t$, ou seja, $x = \arctan(t)$ e $x' = \frac{1}{1+t^2}$, resulta

$$\begin{aligned} P \left[\frac{\tan(x)}{\tan(x) - 2} \right] &= P \left[\frac{t}{t - 2} \frac{1}{1 + t^2} \right] \\ &= P \left[\frac{t}{(t - 2)(1 + t^2)} \right]_{t=\tan(x)} \end{aligned}$$

que é primitivável com base nos métodos gerais vistos no módulo anterior.

5. Calcule $P\left[\frac{\text{sen}(x)}{\text{sen}(x) + \cos(x)}\right]$

- Fazendo $\text{sen}(x) = 2 \frac{\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$ e $\cos(x) = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$ resulta

$$\begin{aligned} P\left[\frac{\text{sen}(x)}{\text{sen}(x) + \cos(x)}\right] &= P\left[\frac{2 \frac{\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}}{2 \frac{\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} + \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}}\right] \\ &= P\left[\frac{2 \tan(x/2)}{2 \tan(x/2) + 1 - \tan^2(x/2)}\right] \end{aligned}$$

, pelo que, fazendo $\tan(x/2) = t$, ou seja, $x = 2 \arctan(t)$ e $x' = \frac{2}{1+t^2}$, resulta

$$P\left[\frac{\text{sen}(x)}{\text{sen}(x) + \cos(x)}\right] = P\left[\frac{2t}{2t+1-t^2} \frac{2}{1+t^2}\right] = P\left[\frac{4t}{(-t^2+2t+1)(1+t^2)}\right]_{t=\tan(x/2)}$$

que é primitivável com base nos métodos gerais vistos no módulo anterior.

6. Calcule $P\left[\frac{\sqrt[3]{x+5}}{1-\sqrt{x+5}}\right]$

- Fazendo $x+5 = t^6$, dado que 6 é menor múltiplo comum entre 3 e 2, pelo que, $x = t^6 - 5$ e $x' = 6t^5$ resulta

$$\begin{aligned} P\left[\frac{\sqrt[3]{x+5}}{1-\sqrt{x+5}}\right] &= P\left[\frac{t^2}{1-t^3} 6t^5\right] \\ &= P\left[\frac{6t^7}{1-t^3}\right]_{t=\sqrt[6]{x+5}} \end{aligned}$$

que é primitivável com base nos métodos gerais vistos no módulo anterior.

7. Calcule $P\left[\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 8} - 2}{\sqrt{x^2 - 6x + 8} + x}\right]$

- Optando por uma das substituições:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 6x + 8} &= x + t \\ \sqrt{x^2 - 6x + 8} &= \sqrt{8} + tx \\ \sqrt{x^2 - 6x + 8} &= (x-2)t \\ \sqrt{x^2 - 6x + 8} &= (x-4)t \end{aligned}$$

é possível transformar o problema numa primitiva de uma função racional em t , solúvel com base nos métodos gerais vistos no módulo anterior.