

Programa:

- ▶ Noções topológicas em \mathfrak{R} . Complementos de funções reais de variável real.
- ▶ Cálculo diferencial em \mathfrak{R} .
- ▶ Cálculo integral em \mathfrak{R} .
- ▶ Cálculo diferencial em \mathfrak{R}^n .

Bibliografia:

- ▶ AM I e M I. Acetatos das Aulas. Eng.Manuel Messias.
- ▶ Cálculo diferencial em \mathfrak{R}^n . Eng.Manuel Messias.

p078-p081 : Conceito de

- ▶ Majorante.
- ▶ Minorante.
- ▶ Supremo.
- ▶ Ínfimo.
- ▶ Máximo.
- ▶ Mínimo.

de um conjunto.

-
- ▶ Dominar os conceitos.
 - ▶ Fazer exercícios se for importante para o domínio dos conceitos.

1

p001-p063 : Lógica matemática.
Teoria dos conjuntos.
Relações binárias e relações de equivalência.

2

p064-p077 : Valor absoluto de um número real; propriedades.
▶ Ver.
▶ Resolver 1 ou 2 exercícios.

Exemplo : Determine o conjunto de verdade da condição:

$$\left| \frac{x}{1-2x} \right| < \left| \frac{3-x}{2x+7} \right|$$

3

Majorante de um conjunto $U \subset \mathfrak{R}$

$a \in \mathfrak{R}$ é majorante da U se $\forall x \in U : x \leq a$

Minorante de um conjunto $U \subset \mathfrak{R}$

$a \in \mathfrak{R}$ é minorante da U se $\forall x \in U : a \leq x$

Supremo e Máximo de um conjunto $U \subset \mathfrak{R}$

Ao menor dos majorantes de um conjunto $U \subset \mathfrak{R}$ dá-se o nome de supremo do conjunto.

Se o supremo pertencer ao conjunto toma o nome de máximo do conjunto.

Ínfimo e Mínimo de um conjunto $U \subset \mathfrak{R}$

Ao maior dos minorantes de um conjunto $U \subset \mathfrak{R}$ dá-se o nome de ínfimo do conjunto.

Se o ínfimo pertencer ao conjunto toma o nome de mínimo do conjunto.

4

- ▶ Ler com atenção.
- ▶ Dominar os conceitos.
- ▶ Fazer exercícios.

Conceito de

Distância.	Ponto	Conjunto
▶ Vizinhança.	▶ Interior.	▶ Aberto.
	▶ Exterior.	▶ Fechado.
▶ Interior.	▶ Fronteiro.	▶ Limitado.
▶ Exterior.	▶ Aderente.	▶ Compacto.
▶ Fronteira.	▶ de Acumulação.	▶ Conexo.
▶ Aderência ou Fecho.	▶ Isolado.	▶ Desconexo.
▶ Derivado.		

de um conjunto.

Vizinhança

Seja $a \in \mathfrak{R}$ e $\varepsilon \in \mathfrak{R}^+$, chama-se vizinhança ε de a , ou vizinhança de centro a e raio ε , e representa-se por $V_\varepsilon(a)$, ou $V(a, \varepsilon)$, o conjunto de números reais cuja distância a a é inferior a ε .

$$V_\varepsilon(a) = \{x \in \mathfrak{R} : d(x, a) < \varepsilon\} = \{x \in \mathfrak{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

Uma vizinhança é um intervalo aberto

$$V_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

e todo o intervalo aberto é uma vizinhança.

Dado o intervalo aberto $]x_1, x_2[$, sendo $a = \frac{x_2 + x_1}{2}$ e $\varepsilon = \frac{x_2 - x_1}{2}$,

tem-se que

$$]x_1, x_2[= V_\varepsilon(a)$$

Distância

Seja E um conjunto de elementos quaisquer. Chama-se distância, ou métrica, sobre E , a qualquer aplicação $d : E^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ que goze das propriedades:

- 1) $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- 2) $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$
- 3) $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

O conjunto E com distância d diz-se um espaço métrico.

A distância que usualmente interessa considerar em \mathfrak{R} é a função

$$d : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}, d(x, y) = |x - y|$$

Ponto interior

Um ponto $a \in \mathfrak{R}$ é ponto interior do conjunto $A \in \mathfrak{R}$ se existe pelo menos uma vizinhança de a contida em A :

$$\exists \varepsilon > 0 : V_\varepsilon(a) \subset A$$

Exemplo: $A =]0, 3[$



Interior de um conjunto

O interior de um conjunto A é o conjunto dos seus pontos interiores e representa-se por $Int(A)$.

no exemplo: $int(A) =]0, 3[$

Ponto exterior

9

Um ponto $a \in \mathfrak{R}$ é ponto exterior do conjunto $A \in \mathfrak{R}$ se existe pelo menos uma vizinhança de a disjunta de A :

$$\exists \varepsilon > 0 : V_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$$

Exemplo: $A =]0, 3]$



Exterior de um conjunto

O exterior de um conjunto A é o conjunto dos seus pontos exteriores e representa-se por $Ext(A)$.

no exemplo: $Ext(A) =]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$

Ponto Aderente

11

Um ponto $a \in \mathfrak{R}$ é ponto aderente do conjunto $A \in \mathfrak{R}$ se a é ponto interior ou ponto fronteiro de A .

Aderência, ou Fecho, de um conjunto

A aderência, ou fecho, de um conjunto A é o conjunto dos seus pontos aderentes e representa-se por \bar{A} .

$$\bar{A} = Int(A) \cup Front(A)$$

Conjunto fechado

Um conjunto A diz-se fechado se for idêntico ao seu fecho

$$A = \bar{A} = Int(A) \cup Front(A)$$

Conjunto aberto

Um conjunto A diz-se aberto se for idêntico ao seu interior

$$A = Int(A)$$

Ponto fronteiro

10

Um ponto $a \in \mathfrak{R}$ é ponto fronteiro do conjunto $A \in \mathfrak{R}$ se a não é ponto interior de A nem ponto exterior de A , isto é, em qualquer vizinhança de a existe pelo menos um ponto de A e pelo menos um ponto do complementar de A

$$\forall \varepsilon > 0 : V_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \wedge V_\varepsilon(a) \cap \bar{A} \neq \emptyset$$

Exemplo: $A =]0, 3]$



Fronteira de um conjunto

A fronteira de um conjunto A é o conjunto dos seus pontos fronteiros e representa-se por $Front(A)$.

no exemplo: $Front(A) = \{0, 3\}$

Conjunto Limitado

12

$A \subset \mathfrak{R}$ é um conjunto limitado se for majorado e minorado, isto é, se tiver pelo menos um majorante e um minorante

$$\exists a, b \in \mathfrak{R} : \forall x \in A \quad a \leq x \leq b$$

(ou)

$A \subset \mathfrak{R}$ é um conjunto limitado se existir uma vizinhança que o contenha, i.e. se existir um conjunto aberto que o contenha.

Conjunto Compacto

$A \subset \mathfrak{R}$ é um conjunto compacto se for limitado e fechado.

Conjuntos Separados

$A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$ dizem-se conjuntos separados se cada um deles está contido no exterior do outro.

Conjunto Desconexo

$A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto desconexo se é a união de dois conjuntos separados.

Conjunto Conexo

$A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto conexo se não é desconexo

13

Ponto de Acumulação

Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação do conjunto $A \in \mathbb{R}$ se em qualquer vizinhança de a existe pelo menos um ponto de A distinto de a .

$$\forall \varepsilon > 0 : \{V_\varepsilon(a) \setminus a\} \cap A \neq \emptyset$$

Derivado de um conjunto

O derivado de um conjunto A é o conjunto dos seus pontos de acumulação e representa-se por A' .

Ponto Isolado

Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é ponto isolado do conjunto $A \in \mathbb{R}$ se $a \in A$ e não é ponto de acumulação de A .

14

Exemplo

Considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |2x - 1| < 5 \vee |x - 4| \leq 0\}$$

Represente graficamente o conjunto



Determine

O interior $Int(A) =]-2, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 3[$

A fronteira $Front(A) = \{-2, \frac{1}{2}, 3, 4\}$

O exterior $Ext(A) =]-\infty, -2[\cup]3, 4[\cup]4, +\infty[$

15

Determine

Majorantes $[4, +\infty[$

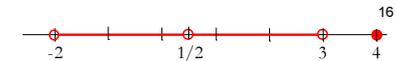
Supremo e Máximo $Sup(A) = Max(A) = \{4\}$

Minorantes $] -\infty, -2]$

Ínfimo e Mínimo $Inf(A) = -2$

Fecho $\bar{A} = Int(A) \cup Front(A) =]-2, 3] \cup \{4\}$

Derivado $A' =]-2, 3]$



16

É Aberto ou Fechado ? 

O conjunto A não é aberto porque $A \neq \text{int}(A)$

O conjunto A não é fechado porque $A \neq \overline{A}$

É Limitado ?

O conjunto A é limitado porque é majorado e minorado

É Compacto ?

O conjunto A é limitado mas não é fechado, logo, não é compacto

É Conexo ?

O conjunto $A = \left] -2, \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, 3 \right[\cup \{4\}$ não é conexo