
p103-p164 : Generalidades sobre funções reais de variável real.

- ▶ Ler com atenção.
- ▶ Dominar os conceitos.
- ▶ Fazer exercícios.

Conceito de

- ▶ Função (Aplicação).
 - ▶ Correspondência Unívoca.
 - ▶ Domínio e Contradomínio de uma função.
 - ▶ Função Sobrejectiva, Injectiva e Bijectiva.
 - ▶ Identidade, Restrição, e Extensão de uma função.
 - ▶ Função Composta.
 - ▶ Função Inversa.
- ▶ Operações com funções.

Função (Aplicação)

Sejam A e B conjuntos quaisquer e seja f uma relação binária de A para B . Diz-se que f é uma aplicação de A em B ou uma função definida em A com valores em B se

$$\forall x \in A, \exists^1 y \in B : y = f(x)$$

Note-se que se trata de uma **correspondência unívoca** definida de A para B , ou seja, qualquer elemento de A tem correspondente em B e o correspondente é único.

- Os elementos de A designam-se por **objectos**.
- Os elementos de B designam-se por **imagens** ou **transformados**.
- O conjunto A designa-se por **conjunto de partida** ou **domínio**.
- O conjunto B designa-se por **conjunto de chegada**.

Conceito de

- ▶ Monotonia de uma função
 - ▶ Função Par e Função Ímpar.
 - ▶ Função Periódica.
 - ▶ Função Limitada.
- ▶ Classificação de funções reais de variável real.

Domínio

O domínio de uma função $f : A \rightarrow B$ é o conjunto dos objectos $x \in A$ tais que existe $y \in B$ correspondente a cada um deles, e representa-se por D_f

$$\forall x \in A, \exists^1 y \in B : y = f(x)$$

Contradomínio

O contradomínio de uma função $f : A \rightarrow B$ é o subconjunto de B cujos elementos são as imagens por meio de f dos elementos do domínio, e representa-se por CD_f

Função Sobrejectiva

5

A função $f : A \rightarrow B$ diz-se sobrejectiva se o contradomínio de f coincide com o conjunto de chegada, $CD_f = B$, isto é

$$\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x)$$

Função Injectiva

A função $f : A \rightarrow B$ diz-se injectiva se a objectos diferentes correspondem imagens diferentes

$$\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Função Bijectiva

A função $f : A \rightarrow B$ diz-se bijectiva se for sobrejectiva e injectiva.

$$\forall y \in B, \exists! x \in A : y = f(x)$$

Função Composta

7

Dadas duas funções quaisquer f e g , chama-se g composta com f , e representase por $g \circ f$, ou $g(f)$ à função assim caracterizada

- O domínio de $g \circ f$ é o subconjunto do domínio de f constituído pelos elementos cujas imagens pertencem ao domínio de g .

$$D_{g \circ f} = \{x : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$$

- O conjunto de chegada de $g \circ f$ é o de g .
- $(g \circ f)(x) = g[f(x)] \quad \forall x \in D_{g \circ f}$

Identidade de funções

6

Diz-se que duas funções f e g são idênticas se

- Têm o mesmo domínio
- Têm o mesmo conjunto de chegada
- $f(x) = g(x), \forall x \in D_f$

Restrição de uma função

Seja $f : A \rightarrow B$ e C , um subconjunto de A , $C \subset A$. Chama-se restrição de f a C à função $g : C \rightarrow B$ tal que

$$\forall x \in C, g(x) = f(x)$$

Extensão de uma função

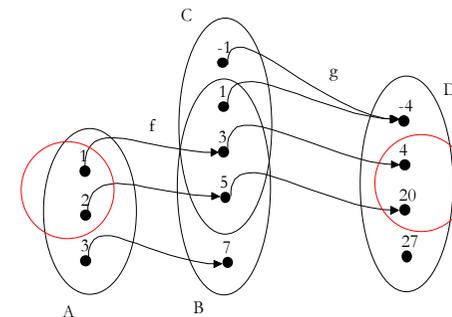
Se $g : C \rightarrow B$ é uma restrição de uma função $f : A \rightarrow B$ onde $C \subset A$, então f diz-se uma extensão, ou prolongamento, de g a A

Exemplo:

8

$f : A \rightarrow B$ com $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,3,5,7\}$ e $f(x) = 2x + 1$

$g : C \rightarrow D$ com $C = \{-1,1,3,5\}$, $D = \{-4,4,20,27\}$ e $g(x) = x^2 - 5$



$D_{g \circ f} = \{1,2\}$ O conjunto de chegada é D $CD_{g \circ f} = \{4,20\}$

$$g \circ f = g[f(x)] = (2x + 1)^2 - 5 = 4x^2 + 4x - 4$$

Função Inversa

9

Seja $f : A \rightarrow B$ uma função injectiva. Chama-se função inversa de f , e representa-se por f^{-1} , a função tal que

- Tem por domínio o contradomínio de f , $D_{f^{-1}} = CD_f$

- Tem por contradomínio o domínio de f , $CD_{f^{-1}} = D_f$

- $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$

Só as funções injectivas têm função inversa

Função Identidade

Chama-se função identidade num conjunto A , e representa-se por I_A , a função que a qualquer elemento de A faz corresponder o próprio elemento, $\forall x \in A, I_A(x) = x$.

Função Real de Variável Real

11

Chama-se função real de variável real a qualquer função dum subconjunto de \mathfrak{R} em \mathfrak{R} , $f : A \subset \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}, x \rightarrow y = f(x)$

É usual usar a variável x para indicar qualquer objecto, e a variável y para indicar a correspondente imagem. Diz-se que x é a variável independente e y a variável dependente.

Propriedades da composição e da inversão de funções

10

1. A composição de funções é associativa

Para quaisquer funções f, g, h tem-se: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

2. A composição de funções não é comutativa

Para quaisquer funções f e g , tem-se em geral que: $f \circ g \neq g \circ f$

Se $f \circ g = g \circ f$, então f e g dizem-se permutáveis.

3. A aplicação identidade é elemento neutro para a composição de aplicações, $f \circ I_A = I_A \circ f = f$.

4. A composição entre uma função e a sua inversa é a aplicação identidade.

Sendo $f : A \rightarrow B$, então $f \circ f^{-1} = I_B$ e $f^{-1} \circ f = I_A$.

5. A inversa da composta de duas funções é igual à composta das inversas dessas funções, em ordem inversa, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Domínio

12

É usual indicar uma função real de variável só pela sua expressão analítica, neste casos convencionam-se que o domínio da função é o maior subconjunto de \mathfrak{R} para o qual a expressão analítica é possível (em \mathfrak{R}).

Sendo $A(x)$ e $B(x)$ quaisquer expressões analíticas, indicam-se na tabela as condições a impor para a determinação do domínio

Expressão	Condição
$\frac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$
$\sqrt[n]{A(x)}$, com n par	$A(x) \geq 0$
$\log_a(A(x))$, ($a > 0, a \neq 1$)	$A(x) > 0$
$A(x)^{B(x)}$	$A(x) > 0$

Exemplo:

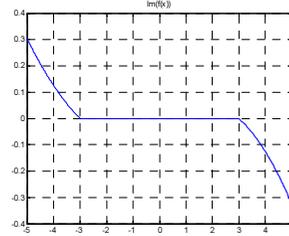
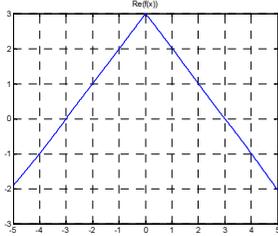
13

Domínio da função real de variável real $f(x) = (3 - |x|)^{\frac{x}{100}+1}$?

Por definição de potência de expoente real, a base tem de ser positiva.

$$3 - |x| > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 3\}$$



Exemplo:

15

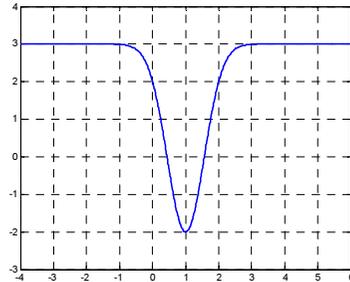
Determine o contradomínio da função $g(x) = 3 - 5^{2x-x^2}$.

$$y = 3 - 5^{2x-x^2} \Leftrightarrow 3 - y = 5^{2x-x^2} \Leftrightarrow \log_5(3 - y) = 2x - x^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \log_5(3 - y)}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y < 3 \\ y \geq 2 \end{cases}$$

$$CD_g = [-2, 3[$$



Contradomínio

14

No caso geral a determinação do contradomínio de uma função real de variável real implica o

- **Estudo da função:** continuidade; assíntotas; monotonia; extremos locais; etc.

Nos casos mais simples o contradomínio pode ser determinado

- **A partir da definição.**
- **A partir do domínio da relação binária inversa.**

Operações com funções

16

Adição

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

Subtração

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

Multiplicação

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

Divisão

$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x), \quad D_{f \div g} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$$

Composição

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$

Inversão

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y), \quad D_{f^{-1}} = CD_f, \quad CD_{f^{-1}} = D_f$$

Exemplo:

17

Considerando as funções reais de variável real

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{x-2} & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x^2-4} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

caracterize $(f \div g)(x)$

$$D_{f \div g} = \mathfrak{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x^3 - x^2 - 4x + 4 & \text{se } 0 < x < 1 \\ x+2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Função Par e Função Ímpar

19

Uma função r.v.r. diz-se uma **função par** se

$$\forall x \in D_f : f(x) = f(-x)$$

Uma função par é simétrica em relação ao eixo das ordenadas.

Uma função r.v.r. diz-se uma **função ímpar** se

$$\forall x \in D_f : f(x) = -f(-x)$$

Uma função ímpar é anti-simétrica em relação ao eixo das ordenadas.

Função Periódica

Uma função r.v.r. diz-se periódica se existir um $T \in \mathfrak{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$\forall x \in D_f : f(x+T) = f(x)$$

O menor valor positivo de T diz-se o **período** fundamental da função.

Monotonia de uma função

18

Uma função r.v.r. diz-se monótona num subconjunto A do seu domínio se é crescente ou decrescente em A .

Função crescente. $f(x)$ é crescente em A se

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

Função estritamente crescente. $f(x)$ é estritamente crescente em A se

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Função decrescente. $f(x)$ é decrescente em A se

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

Função estritamente decrescente. $f(x)$ é estritamente decrescente em A

se

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Função Limitada

20

Seja $f(x)$ uma função r.v.r. e A um subconjunto do seu domínio.

$f(x)$ diz-se uma **função minorada** em A se o conjunto $f(A)$ for minorado.

$f(x)$ diz-se uma **função majorada** em A se o conjunto $f(A)$ for majorado.

$f(x)$ diz-se uma **função limitada** em A se o conjunto $f(A)$ for limitado.

Chama-se **supremo, ínfimo, máximo, e mínimo de $f(x)$** em A , ao supremo, ínfimo, máximo e mínimo do conjunto $f(A)$, se existirem.

Se $f(x)$ for limitada em A , chama-se **oscilação de $f(x)$** em A

$$\sup_A(f(x)) - \inf_A(f(x)).$$

1 Funções Polinomiais

Uma função r.v.r. diz-se polinomial se a sua expressão analítica é da forma

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

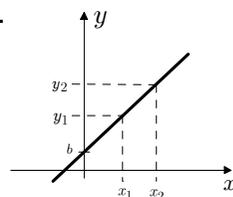
em que a_0, a_1, \dots, a_n são números reais, ditos os coeficientes do polinómio, e $n, n-1, \dots, 1, 0$ são inteiros não negativos, sendo n o grau do polinómio.

1.1 Função Afim

$$f(x) = mx + b, \quad a, b \in \mathfrak{R}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = y_1 - mx_1$$



2 Funções Racionais

Uma função r.v.r. diz-se uma função racional se a sua expressão analítica é da forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$$

2.1 Função Homográfica

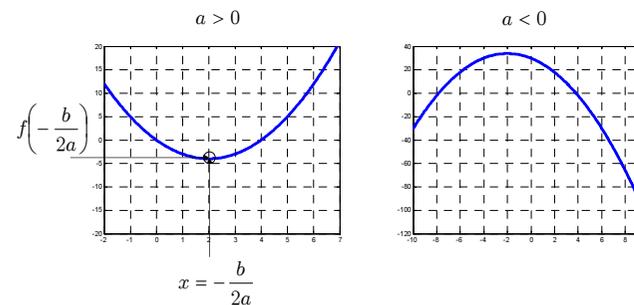
Uma função r.v.r. diz-se uma função homográfica se a sua expressão analítica é da forma

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c \neq 0, d \in \mathfrak{R}$$

A representação geométrica duma função homográfica é uma **Hipérbole Equilátera** com as assíntotas paralelas aos eixos coordenados

1.2 Função Quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, b, c \in \mathfrak{R}$$



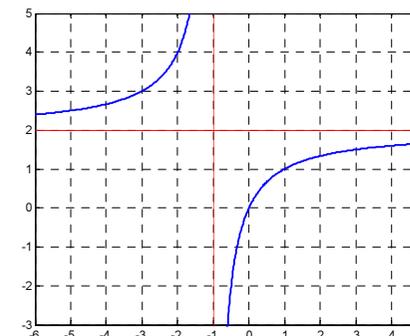
Exemplo:

$$f(x) = \frac{2x}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$



3 Funções Irracionais

25

Uma função r.v.r. diz-se uma função irracional se na sua expressão analítica existem operações sobre a variável independente não redutíveis à adição, subtração, multiplicação e divisão em número finito.

3.1 Irracionais algébricas

Uma função r.v.r. diz-se uma função irracional algébrica se na sua expressão analítica as operações sobre a variável independente são apenas as de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação de expoente inteiro e radiciação em número finito.

Exemplo: $f(x) = x + \sqrt[5]{x^2 + 1}$

3.1 Irracionais transcendentos

Uma função r.v.r. diz-se uma função irracional transcendente se não é algébrica.

Exemplos: $f(x) = \text{sen}(x)$; $f(x) = e^x$