

- Ler muito atentamente.
- Conhecer e dominar as técnicas de cálculo de limites.
- Fazer exercícios.

- Limite segundo Cauchy.
- Limites Laterais.
- Teoremas.
- Indeterminações.
- Limites de referência.
- Exemplos de cálculo de limites.

Limites Laterais

Seja f uma função r.v.r. de domínio D .

Se $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de $]a, +\infty[\cap D$ diz-se que o limite lateral direito de f no ponto a é b e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$, se

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : x \in D \wedge x > a \wedge 0 < |x - a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$$

Se $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de $] -\infty, a[\cap D$ diz-se que o limite lateral esquerdo de f no ponto a é b e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$, se

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : x \in D \wedge x < a \wedge 0 < |x - a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$$

Seja f uma função r.v.r. de domínio D e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de

D . Diz-se que o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, se, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$

Limite segundo Cauchy

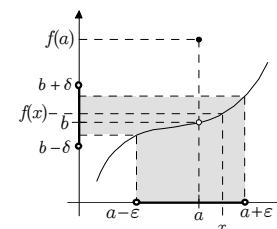
Seja f uma função r.v.r. de domínio D e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D . Diz-se que o limite, segundo Cauchy, de f no ponto a é $b \in \mathbb{R}$, e escreve-se

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, se, para qualquer número real $\delta > 0$, existe um número real $\epsilon > 0$

tal que, para valores x do domínio, distintos de a , a distância de $f(x)$ a b é

inferior a δ quando a distância de x a a for inferior a ϵ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : x \in D \wedge 0 < |x - a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$$



Teoremas

1. Unicidade do limite

O limite de uma função num ponto, quando existe, é único.

2. Limite da função constante

Sendo k um valor constante e A é um intervalo aberto,

se $f(x) = k, \forall x \in A$, e $a \in A$ então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$.

3. Limite da função composta

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = g(b)$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = g(b)$$

4. Limite da função encastrada

Se numa vizinhança do ponto a se tem $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ e

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

5. Álgebra dos limites

5

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, com $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, então:

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = b + c$, desde que não ocorra $+\infty + (-\infty)$
ou $-\infty + (+\infty)$.
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = b - c$, desde que não ocorra $+\infty - (+\infty)$
ou $-\infty - (-\infty)$.
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = bc$, desde que não ocorra $0(+\infty)$, $0(-\infty)$, $(+\infty)0$
ou $(-\infty)0$.
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)] = b/c$, desde que não ocorra $0/0$, $+\infty/+\infty$, $-\infty/-\infty$,
 $+\infty/-\infty$, ou $-\infty/+\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = b^c$, desde que não ocorra $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$, 0^0 , ou $+\infty^0$.

Indeterminações

7

Existem 7 símbolos de indeterminação.

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

1. Indeterminações da forma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$

$$1.1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Dividir o numerador e o denominador pela expressão que cresce mais rapidamente

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x}{2x^3 - 2x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{2 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

6. Limite do produto de um infinitésimo por uma função limitada

6

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $g(x)$ é limitada $\forall x \in V_\varepsilon(a) \setminus a$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = 0$$

$$1.2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

8

Dividir o numerador e o denominador pela expressão que decresce mais lentamente

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x}{2x^3 - 2x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3}{2x^2 - 2x + 5} = \frac{3}{5}$$

$$1.3 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \quad a \neq 0, +\infty, -\infty$$

Dividir o numerador e o denominador por $x - a$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^5 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)} = \frac{4}{5}$$

2. Indeterminações da forma $0 \times \infty$

Transformar em indeterminações da forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} 3^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{e^{x-1}} \\ &= e \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{e} \right)^x \\ &= \infty\end{aligned}$$

9

3. Indeterminações da forma $\infty - \infty$

Transformar em indeterminações da forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

$$f(x) - g(x) = \frac{1 - \frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - 1}{\frac{1}{g(x)}}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(2 + e^x)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x - \ln(2 + e^x)) \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2 + e^x} \right) \\ &= \ln(1) \\ &= 0\end{aligned}$$

10

4. Indeterminações da forma $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Transformar em indeterminações da forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \ln(f(x))} = e^{\frac{\ln(f(x))}{\frac{1}{g(x)}}}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^{\frac{1}{\ln x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x} \right)} \\ &= e \\ &= e\end{aligned}$$

11

Limites de referência.

12

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{k}{f(x)} \right)^{f(x)} = e^k, \forall k \in \mathbb{R}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{3}{2-2x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2-2x}} \right)^{\frac{3}{2-2x}} \\ &= e^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Limites de referência.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg}(x)}{x} = 1$$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, então

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen}(f(x))}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{tg}(f(x))}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\arcsen(f(x))}{f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{arctg}(f(x))}{f(x)} = 1 \end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\text{sen}(4-2x)}{3x-6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\text{sen}(4-2x)}{4-2x} \cdot \frac{4-2x}{3x-6} \right) \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

13

Limites de referência.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$$

Exemplo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{3x}}{x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot \frac{-3x}{x^2 + 2x} \right) \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

14

Limites de referência.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty, \quad \forall p \in \mathfrak{R}$$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)}}{f(x)^p} = \infty, \quad \forall p \in \mathfrak{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{f(x)}}{f(x)^p} = \infty, \quad \forall p \in \mathfrak{R} \wedge a > 1$$

15

Relações úteis para levantar Indeterminações.

$$\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[: \text{sen}(x) < x < \text{tg}(x)$$

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[: |\text{sen}(x)| < |x| < |\text{tg}(x)|$$