
p343-p380 : Continuidade de funções reais de variável real.

1

- ▶ Ler atentamente.
- ▶ Dominar os conceitos.
- ▶ Fazer exercícios.

-
- ▶ Função contínua, prolongável por continuidade, e descontínua.
 - ▶ Classificação de descontinuidades.
 - ▶ Continuidade num intervalo e por secções.
 - ▶ Teoremas de Bolzano e Weierstrass.
 - ▶ Exemplos de estudo de continuidade.

Prolongamento por continuidade.

3

Seja f uma função r.v.r. de domínio D e seja $a \in \mathfrak{R}$ um ponto de acumulação não pertencente a D .

Diz-se que f é **prolongável por continuidade** em a se

1. $a \notin D$ (ou seja, $f(a)$ não está definido)
2. Existe e é finito $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Seendo f prolongável por continuidade em a , chama-se **prolongamento por continuidade de f no ponto a** à função \bar{f} de domínio $D \cup \{a\}$, tal que

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{se } x \in D \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) & , \text{se } x = a \end{cases}$$

Função Contínua.

2

Seja f uma função r.v.r. de domínio D e seja $a \in \mathfrak{R}$ um ponto de acumulação de D .

Diz-se que f é **contínua** em a se

1. $a \in D$
2. Existe e é finito $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Continuidade Lateral.

Seendo $a \in D$ um ponto de acumulação de $D \cap]a, +\infty[$, diz-se que f é

contínua à direita em a se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

Seendo $a \in D$ um ponto de acumulação de $D \cap]-\infty, a[$, diz-se que f é **contínua à esquerda** em a se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Função descontínua.

4

Seja f uma função r.v.r. de domínio D e seja $a \in \mathfrak{R}$ um ponto de acumulação de D . Diz-se que f é **descontínua** em a se não é contínua nem prolongável por continuidade.

O ponto a diz-se um **ponto de descontinuidade** de f .

Um ponto de descontinuidade diz-se de **primeira espécie** se existem e são finitos ambos os limites laterais no ponto, caso contrário diz-se um ponto de descontinuidade de **segunda espécie**.

Continuidade num subconjunto do domínio.

5

Seja f uma função r.v.r. de domínio D .

f diz-se contínua no conjunto $A \subset D$ e $A \subset D'$, se é contínua em todos os pontos do conjunto.

f diz-se contínua num intervalo fechado $I = [a, b]$ com $I \subset D$ e $I \subset D'$, se é contínua no interior do intervalo e lateralmente contínua, do lado do intervalo, nos extremos do intervalo.

f diz-se seccionalmente contínua no conjunto $A \subset D$ e $A \subset D'$, se é contínua em A ou se é finito o conjunto de pontos onde f não é contínua em A e em nenhum desses pontos ocorre uma descontinuidade de 2ª espécie.

Procedimentos no estudo da continuidade.

7

1. Determinar o domínio sem proceder a qualquer simplificação da função.
2. Determinar o derivado do domínio.
3. Justificar a continuidade da função usando, se possível, os teoremas das propriedades operatórias.
4. Estudar a continuidade da função, pela definição, nos pontos onde os teoremas não forem aplicáveis.

Teoremas (propriedades operatórias).

6

Uma função constante num intervalo aberto é contínua em todos os pontos desse intervalo.

Sendo f e g funções contínuas num ponto a , também são contínuas em a as funções:

1. $f + g$.
2. $f - g$.
3. $f \times g$.
4. f/g , se $g(a) \neq 0$.
5. f^n , com $n \in \mathbb{N}$.
6. $\sqrt[n]{f}$, se $f(a) > 0$ para n par.

Uma função polinomial é contínua em \mathbb{R} .

Se g é uma função contínua num ponto a , e f é uma função contínua num ponto $g(a)$, então $f \circ g$ é contínua no ponto a .

Teorema de Bolzano.

8

Seja f uma função r.v.r. contínua num intervalo I , e sejam a e b dois pontos de I , com $a < b$.

Se $f(a) < f(b)$ então $\forall k \in]f(a), f(b)[\exists c \in]a, b[: f(c) = k$

Se $f(a) > f(b)$ então $\forall k \in]f(b), f(a)[\exists c \in]a, b[: f(c) = k$

(ou seja, uma função contínua num intervalo não passa dum valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.)

Corolário 1: Se f é contínua em $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$ então $\exists c \in]a, b[: f(c) = 0$

Corolário 2: Se f é contínua no intervalo I então $f(I)$ é um intervalo.

Teorema de Weierstrass.

Uma função contínua num intervalo limitado e fechado tem máximo e mínimo nesse intervalo.

Exemplo 1.

Seja f a função r.v.r. definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 - x} & , \text{ se } x \leq 2 \\ -x + 4 & , \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

1. Determine o domínio de f .
2. Estude a continuidade de f nos pontos $-1, 0, 1$ e 2 .
3. Esboce o gráfico da função.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \wedge x^2 - x \neq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$$

$$=]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Exemplo 2.

Seja f a função r.v.r. definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(3x-2)}{x^2-1} & , \text{ se } x < 1 \\ \frac{3}{2} & , \text{ se } x = 1 \\ \frac{e^{2-x}-e}{3x-3} & , \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

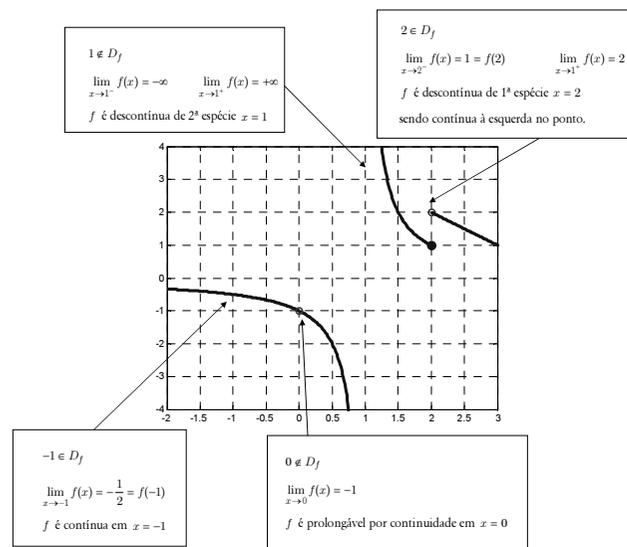
Estude a continuidade de f no ponto $x = 1$.

$$1 \in D_f, \quad f(1) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{2-x}-e}{3x-3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(e^{1-x}-1) \cdot e(1-x)}{1-x \cdot -3(1-x)} = -\frac{e}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(3x-2)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(3x-3+1)}{3x-3} \cdot \frac{3(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}$$

9



10

11

A função é descontinua, de 1ª espécie, em $x = 1$, o ponto pertence ao domínio, mas o limite no ponto não existe, dado que os limites laterais, que existem e são finitos, são diferentes. Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ podemos dizer que $f(x)$ é contínua à esquerda em $x = 1$.

12

Exemplo 3.

Seja f a função r.v.r. definida por

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x^4 + x^2}}{2\sqrt{x^4 + x^2}}$$

Estude a continuidade de f no ponto $x = 0$.

$$0 \notin D_f$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x^4 + x^2}}{2\sqrt{x^4 + x^2}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2}} + 1 \right)$$

13

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{x}} + 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1 \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{-\sqrt{x^2 + 1}} + 1 \right) = 0$$

A função é descontínua, de 1ª espécie em $x = 0$, dado que o ponto não pertence ao domínio, o limite não existe, mas os limites laterais existem e são finitos (embora diferentes, senão a função poderia se prolongável por continuidade).

2.1 Estudo da continuidade no ponto $x = 0$

15

$$0 \notin D_f$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsen\left(1 - \frac{x}{2}\right)}{|x^2 - 2x|} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0^+} = +\infty$$

A função é descontínua, de 2ª espécie, em $x = 0$, dado que o ponto não pertence o domínio e o limite existe mas não é finito.

2.2 Estudo da continuidade no ponto $x = 2$

$$2 \notin D_f$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\arcsen\left(1 - \frac{x}{2}\right)}{|x^2 - 2x|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\arcsen\left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1 - \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}}}{\frac{1 - \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}} |x^2 - 2x|}$$

Exemplo 4.

14

Estude quanto à continuidade a função r.v.r. definida por

$$f(x) = \frac{\arcsen\left(1 - \frac{x}{2}\right)}{|x^2 - 2x|}$$

1. Domínio da função

$$D_f = \left\{ x \in \mathfrak{R} : -1 \leq 1 - \frac{x}{2} \leq 1 \wedge |x^2 - 2x| \neq 0 \right\}$$

$$D_f =]0, 2[\cup]2, 4[$$

2. Estudo da continuidade da função

$f(x)$ é contínua nos intervalos $]0, 2[$ e $]2, 4[$ resultantes da imposição das restrições necessárias à forma da expressão analítica composta de funções polinomiais, que são contínuas em \mathfrak{R} .

Basta fazer o estudo nos pontos $x = 0$ e $x = 2$.

16

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\overbrace{1 - \frac{x}{2}}^-}{-2x \left(1 - \frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\arcsen\left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1 - \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}}}{\frac{1 - \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}} |x^2 - 2x|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\overbrace{1 - \frac{x}{2}}^+}{-2x \left(1 - \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{4}$$

A função é descontínua, de 1ª espécie, em $x = 2$, dado que o ponto não pertence o domínio, o limite não existe, mas os limites laterais existem e são finitos (embora diferentes, senão a função poderia se prolongável por continuidade).

Exemplo 5.

Calcule os limites:

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\ln x} - 1}{\ln x + \sqrt{x} - 1} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(e^y)^y - 1}{y + \sqrt{e^y - 1}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y^2} - 1}{y^2} \frac{y^2}{y + \sqrt{e^y - 1}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y^2} - 1}{y^2} \frac{1}{\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{e^y - 1}{y}}} \\ &= 0\end{aligned}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \overbrace{x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}^{\rightarrow 0} \overbrace{\frac{x}{\operatorname{sen}(x)}}^{\rightarrow 1} = 0$