

- ▶ Derivada de uma função num ponto.
- ▶ Derivadas laterais.
- ▶ Diferenciabilidade.
- ▶ Função derivada.
- ▶ Diferenciabilidade e continuidade.
- ▶ Regras de derivação.
- ▶ Interpretação geométrica.
- ▶ Recta tangente e recta normal.
- ▶ Pontos ordinários e singulares.

Diferenciabilidade.

A função f diz-se **diferenciável no ponto** x_0 , se $f'(x_0)$ existir e for **finita**.

Função derivada.

Chama-se **função derivada** da função $y = f(x)$, e representa-se por

$$f'(x), \frac{df}{dx}, \text{ ou } \frac{dy}{dx}$$

a função:

- cujo domínio é o conjunto de pontos onde f é diferenciável;
- e que em cada ponto x tem o valor

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Diferenciabilidade e continuidade.

Se uma função é **diferenciável** num ponto então a função é **contínua** nesse ponto.

Se uma função **não é contínua** num ponto então **não é diferenciável** nesse ponto.

1

Derivada de uma função num ponto.

2

Seja f uma função r.v.r. definida num intervalo fechado $I = [a, b]$ e seja $x_0 \in I$

Chama-se **derivada da função f no ponto** x_0 , e representa-se por $f'(x_0)$, o limite seguinte, se existir (finito ou não),

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivadas laterais.

Chama-se **derivada lateral esquerda da função f no ponto** x_0 , e representa-se por $f'(x_0^-)$, o limite seguinte, se existir (finito ou não),

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Chama-se **derivada lateral direita da função f no ponto** x_0 , e representa-se por $f'(x_0^+)$, o limite seguinte, se existir (finito ou não),

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Regras de derivação.

4

Sendo k uma função constante e $u = f(x)$ e $v = g(x)$ duas funções r.v.r. tem-se

$$k' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln(u))' = (\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u^v)' = v u^{v-1} u' + u^v v' \ln(u)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$(a^u)' = a^u u' \ln a$$

$$(\log_a(u))' = \frac{1}{\ln(a)} \frac{u'}{u}$$

Regras de derivação. (funções trigonométricas e hiperbólicas)

5

$(\operatorname{sen}(u))' = \cos(u) u'$	$(\operatorname{cosec}(u))' = -\operatorname{cosec}(u) \cotg(u) u'$
$(\operatorname{cos}(u))' = -\operatorname{sen}(u) u'$	$(\operatorname{sec}(u))' = \sec(u) \operatorname{tg}(u) u'$
$(\operatorname{tg}(u))' = \operatorname{sec}^2(u) u'$	$(\operatorname{cotg}(u))' = -\operatorname{cosec}^2(u) u'$
$(\operatorname{arc\,sen}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\operatorname{arc\,cosec}(u))' = -\frac{u'}{ u \sqrt{u^2-1}}$
$(\operatorname{arc\,cos}(u))' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\operatorname{arc\,c}(u))' = \frac{u'}{ u \sqrt{u^2-1}}$
$(\operatorname{arctg}(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$	$(\operatorname{arc\,cotg}(u))' = -\frac{u'}{1+u^2}$
$(\operatorname{sh}(u))' = \operatorname{ch}(u) u'$	$(\operatorname{argsh}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$
$(\operatorname{ch}(u))' = \operatorname{sh}(u) u'$	$(\operatorname{argch}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
$(\operatorname{th}(u))' = \operatorname{sech}^2(u) u'$	$(\operatorname{argth}(u))' = \frac{u'}{1-u^2}$

Pontos ordinários e pontos singulares.

7

Se a função f for contínua num ponto $x_0 \in D_f$ e $f'(x_0)$ existir (finita ou não), x_0 diz-se um **ponto ordinário** de f . Um ponto $x_0 \in D_f$ não ordinário diz-se um **ponto singular**.

Um ponto singular diz-se um **ponto anguloso** se f for contínua as derivadas laterais existirem, forem finitas, mas diferentes uma da outra.

Um ponto singular diz-se um **ponto de reversão** se f for contínua as derivadas laterais existirem e forem infinitas de sinais contrários.

Interpretação geométrica. Recta tangente e recta normal.

6

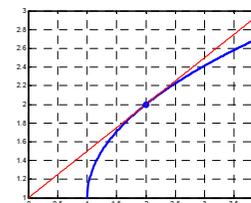
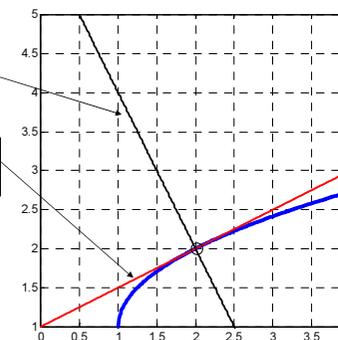
A derivada de uma função num ponto tem por significado geométrico o declive da recta tangente ao gráfico da função nesse ponto.

Se $f'(x_0)$ existe e é finita.

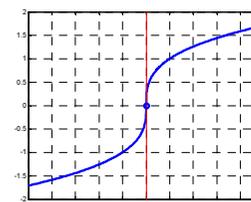
$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Se $f'(x_0) = \pm\infty$.
 $x = x_0$
 (recta vertical)

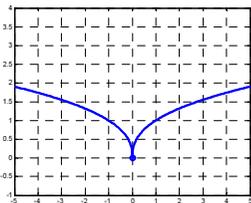


$f(x) = 1 + 2\sqrt{x-1}$
 $x_0 = 2$ é um ponto ordinário
 $f'(x_0) = 0.5$
 f é diferenciável em $x_0 = 2$

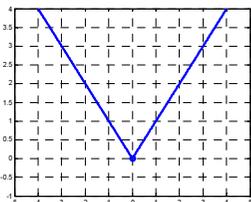


$f(x) = \sqrt[3]{x}$
 $x_0 = 0$ é um ponto ordinário
 $f'(x_0) = +\infty$
 f não é diferenciável em $x_0 = 0$

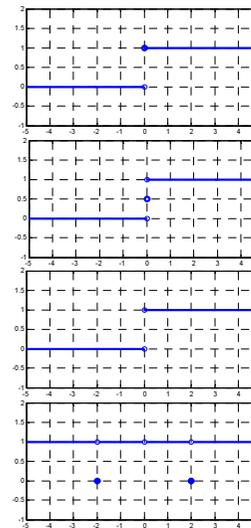
8



$f(x) = \sqrt[5]{x^2}$
 $x_0 = 0$ é um ponto singular (reversão)
 $f'(x_0^-) = -\infty$
 $f'(x_0^+) = +\infty$
 $f'(x_0)$ não existe



$f(x) = |x|$
 $x_0 = 0$ é um ponto singular (anguloso)
 $f'(x_0^-) = -1$
 $f'(x_0^+) = +1$
 $f'(x_0)$ não existe



$x_0 = 0$ é um ponto singular
 $f'(x_0^-) = +\infty$
 $f'(x_0^+) = 0$

$x_0 = 0$ é um ponto singular
 $f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = +\infty$
 f não é diferenciável em $x_0 = 0$

$x_0 = 0$ não pertence ao domínio de f
 Não existe derivada em $x_0 = 0$

$f'(2^+) = f'(-2^+) = +\infty$
 $f'(2^-) = f'(-2^-) = -\infty$
 $x_0 = -2$ e $x_1 = 2$ são pontos singulares
 $x_0 = 0$ não pertence ao domínio de f