

p391-p412 :
p019-p026 :

7. Cálculo diferencial em IR.

- ▶ Derivada da função composta.
- ▶ Derivada da função inversa.
- ▶ Derivada logarítmica.
- ▶ Derivada da função implícita.
- ▶ Derivadas de ordem superior.
- ▶ ~~Derivada da função paramétrica.~~

1

Derivada da função composta.

2

Sejam f , g e h funções tais que $h = f \circ g$. Se g é diferenciável no ponto x_0 e f é diferenciável no ponto $g(x_0)$, então h é diferenciável no ponto x_0 e tem-se

$$h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Fazendo

$$u = g(x) \text{ e } y = f(u) = f(g(x))$$

podemos escrever

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

na forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}}$$

Exemplo.

$$y = \operatorname{sen}(x^3 + 5x) \\ y' = (3x^2 + 5) \cos(x^3 + 5x)$$

Derivada da função inversa.

3

Se a função $y = f(x)$ admite derivada contínua e diferente de zero num intervalo $[a, b]$, então f é uma bijecção de $[a, b]$ sobre o intervalo $[f(a), f(b)]$, pelo que existe a função inversa $x = f^{-1}(y)$ que admite derivada contínua em $[f(a), f(b)]$, sendo

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}}$$

Exemplo.

$$y = \sqrt[3]{x} \\ x = y^3 \\ y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(y^3)'} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Derivada Logarítmica

4

Se for possível aplicar as propriedades operatórias dos logaritmos à expressão analítica de uma função $u = f(x)$, a derivada da função pode ser obtida mais facilmente derivando o logaritmo da função.

Sendo

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

então

$$u' = u(\ln(u))'$$

Exemplo.

$$u = f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^7(3-2x)^4}{(2x-1)^5 \cos^3(x-1)}} \\ u' = \frac{1}{4} \left[7 \frac{1}{x} - 4 \frac{-2}{3-2x} - 5 \frac{2}{2x-1} - 3 \frac{-\operatorname{sen}(x-1)}{\cos(x-1)} \right] \sqrt[4]{\frac{x^7(3-2x)^4}{(2x-1)^5 \cos^3(x-1)}}$$

Derivada da função implícita.

5

Dada a equação $\varphi(x, y) = \gamma(x, y)$, se, pela equação, a um valor de x , num conjunto A , corresponder um e um só valor de y , diz-se que a equação **define de forma implícita** a função $y = f(x)$.

A derivada da função $y = f(x)$ pode ser obtida derivando ambos os membros da equação em ordem a x e explicitando y' .

Exemplo.

$$x^2y + x = x^2 - 3y \quad \text{Função implícita : } y = \frac{x^2 - x}{x^2 + 3}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2y + x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 3y)$$

$$2xy + x^2y' + 1 = 2x - 3y'$$

$$(x^2 + 3)y' = 2x - 2xy - 1$$

$$y' = \frac{2x - 2xy - 1}{x^2 + 3} = \frac{2x - 1}{x^2 + 3} - 2x \frac{x^2 - x}{(x^2 + 3)^2}$$

Classe de uma função.

7

A função f diz-se **n-vezes diferenciável** num conjunto aberto A sse $f^{(n)}$ existir e for finita em todos os pontos de A .

A função f diz-se **indefinidamente diferenciável** num conjunto aberto

A sse $f^{(n)}$ existir e for finita em todos os pontos de $A \forall n \in \mathbb{N}$.

A função f diz-se **de classe C^n** num conjunto aberto A , ou **n-vezes continuamente diferenciável** nesse conjunto, sse for n-vezes diferenciável em A , e $f^{(n)}$ for contínua em A . O conjunto de funções de classe C^n em A representa-se por $C^n(A)$.

Exemplo:

$f(x) = e^{-2x}$ é uma função da classe $C^\infty(\mathbb{R})$, dado que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n 2^n e^{-2x}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Derivadas de ordem superior.

6

Segunda derivada.

Chama-se segunda derivada da função $y = f(x)$ à função f'' , também

designada por $\frac{d^2f}{dx^2}$ ou $\frac{d^2y}{dx^2}$, de domínio $D_{f''}$ formado por todos os pontos onde f' é diferenciável, e definida pela expressão

$$f''(x) = (f'(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Derivada de ordem n.

Chama-se derivada de ordem n (ou n -ésima derivada) da função

$y = f(x)$, com $n \geq 2 \in \mathbb{N}$, à função $f^{(n)}$, também designada por $\frac{d^n f}{dx^n}$

ou $\frac{d^n y}{dx^n}$, de domínio $D_{f^{(n)}}$ formado por todos os pontos onde $f^{(n-1)}$ é diferenciável, e definida pela expressão

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$$

Exercícios. (1º Teste : 22-11-2005)

8

1. Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(x+1)e^x + \beta e^{-x} & \text{se } x < 0 \\ (x-1)\lg x & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Determine o valor dos parâmetros reais α e β de modo a que a função seja diferenciável em $x=0$.

2. Considere a função definida por

$$y = 1 - \arcsin(e^x - 2)$$

2.2 Recorra ao teorema da função inversa para mostrar que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x-2)^2}}$$

III

Seja f uma função real definida por

$$f(x) = xg(e^x + \sin x)$$

onde $g \in C^2$ em todo o seu domínio, estritamente decrescente, com $g(1) = 0$ e $g'(x) \neq 0 \forall x \in D_g$.

1) Diga, justificando, se f é contínua em todo o seu domínio.

2) Mostre que $f'(0) + f''(0) = 4g'(1)$.

Exercícios. (1º Teste : 22-11-2005)

9

IV
 Considere a função definida por

$$y = x^{\frac{1}{x}}$$

2) Recorra à derivada logarítmica e mostre que $y' = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$.

3) Determine y'' .

5) Determine, caso existam:

5.1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$ 5.2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

V
 Considere a função real $y = f(x)$ definida na forma implícita pela equação:

$$x^3 y + \ln(xy) - e^{x-1} = 0$$

na vizinhança do ponto (1,1).

1) Determine $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ em $x=1$.

2) Determine a equação da recta tangente e da normal ao gráfico da função no ponto de coordenadas (1,1).

Exercícios. (1º Teste : 22-04-2006)

11

IV
 Considere a função real $y = f(x)$ definida por:

$$y = -1 + e^{2x(2x-1)}$$

1. Determine o domínio e o contradomínio da função;

2. Considerando restrição principal da função seno, determine a expressão da função inversa de f ;

3. Recorra ao Teorema da derivada da função inversa para mostrar que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2(1+y)\sqrt{1-\ln^2(1+y)}}$$

4. Diga justificando se a função $x = f^{-1}(y)$ é diferenciável em $y = e - 1$.

V
 Considere a equação

$$e^{1+xy} - \cos(x+y) = 0$$

que define implicitamente y como função de x na vizinhança do ponto (1,-1).

1. Mostre que a equação é verificada no ponto (1,-1).

2. Determine $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ em $x=1$ e mostre que $\left(\frac{dy}{dx} \right)_1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_1 = -5$

3. Indique o ângulo que a recta tangente ao gráfico da função no ponto (1,-1) faz com a direcção do eixo dos XX;

4. Determine a equação da recta normal ao gráfico da função no ponto (1,-1);

Exercícios. (1º Teste : 22-04-2006)

10

II
 Considere a função real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x - x^3 & \text{se } x < -1 \\ x + e^{1/x} & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

1. Diga justificando se f é contínua em \mathbb{R} ;

2. Recorrendo à definição de derivada, calcule as derivadas laterais de f em $x = -1$;

3. Determine $f'(x)$ e diga justificando se f é diferenciável em \mathbb{R} ;

4. Determine $f''(x)$ e averigue se f admite algum extremo local para $x < -1$.

III
 Seja f uma função definida por

$$f(x) = g^2(e^x) - x^2$$

onde $g \in C^2(\mathbb{R})$, $g(1) = g'(1) = 0$

1. Determine $f'(x)$ e $f''(x)$;

2. Diga justificando se f é uma função contínua e diferenciável em \mathbb{R} ;

3. Mostre que

$$f'(0) + f''(0) = -2$$

4. Diga justificando se f admite algum extremo local em $x = 0$ e em caso afirmativo determine o seu valor.