

8. Cálculo diferencial em IR.

- ▶ Função regulares em intervalos.
 - ▶ Teorema de Rolle.
 - ▶ Teorema de Lagrange.
 - ▶ Teorema de Cauchy.
- ▶ Regra de Cauchy.
- ▶ Aproximação Polinomial.
 - ▶ Fórmula de Taylor.
 - ▶ Fórmula de MacLaurin.
- ▶ Estudo de Funções.
 - ▶ Monotonia e Extremos.
 - ▶ Concavidades e Inflexões.
 - ▶ Assíntotas.
 - ▶ Estudo completo.

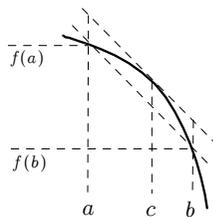
Teorema de Lagrange.

(do valor médio, ou dos acréscimos finitos)

Seja f uma função de domínio D_f , e seja $[a, b] \subset D_f$.

Se f é regular em $[a, b]$

Então $\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.



Teorema de Cauchy.

(generalização do teorema de Lagrange)

Sejam f e g duas funções definidas num intervalo $[a, b]$.

Se: $i) f$ e g são regulares em $[a, b]$

$ii) g'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$.

Então $\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Funções regulares em intervalos.

Função regular.

Seja f uma função de domínio D_f , e seja $[a, b] \subset D_f$. Diz-se que f é regular em $[a, b]$ se f é contínua em $[a, b]$ e é diferenciável em $]a, b[$.

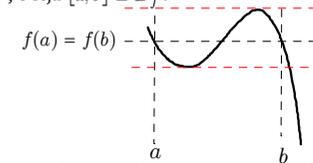
Teorema de Rolle.

Seja f uma função de domínio D_f , e seja $[a, b] \subset D_f$.

Se: $i) f$ é regular em $[a, b]$

$ii) f(a) = f(b)$.

Então $\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$.



Corolário 1.

Entre dois zeros duma função diferenciável existe pelo menos um zero da função derivada.

Corolário 2.

Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável existe, quanto muito, um zero da função.

Regra de Cauchy.

Sejam f e g duas funções diferenciáveis numa vizinhança de a , privada de a , onde g' não se anula.

Se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se este último limite existir.

Exemplo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \text{sen}(x)]e^{2x}}{\text{sen}^3(2x)} = \frac{1}{48}$$

Aproximação Polinomial.

5

Fórmula de Taylor.

Seja f uma função n vezes diferenciável numa vizinhança dum ponto a , seja x um ponto dessa vizinhança e c um ponto entre a e x . Tem-se que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n$$

em que $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ é designado por resto de ordem n .

Fórmula de Mac-Laurin.

(Caso particular da fórmula de Taylor para $a = 0$)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n$$

com $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n$, e c entre 0 e x .

Extremos

7

Seja f uma função de domínio D_f e seja a um ponto de D_f .

Se $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in V_\varepsilon(a)$ se tem:

1. $f(x) > f(a)$, então $f(a)$ diz-se um mínimo local, ou relativo, em sentido estrito.
2. $f(x) \geq f(a)$, então $f(a)$ diz-se um mínimo local, ou relativo, em sentido lato.
3. $f(x) < f(a)$, então $f(a)$ diz-se um máximo local, ou relativo, em sentido estrito.
4. $f(x) \leq f(a)$, então $f(a)$ diz-se um máximo local, ou relativo, em sentido lato.

Se $\forall x \in D_f$ se tem:

5. $f(x) \leq f(a)$, então $f(a)$ diz-se um máximo absoluto.
6. $f(x) \geq f(a)$, então $f(a)$ diz-se um mínimo absoluto.

Em qualquer das situações $f(a)$ diz-se um extremo e a diz-se um extremante.

Estudo de Funções.

6

Monotonia.

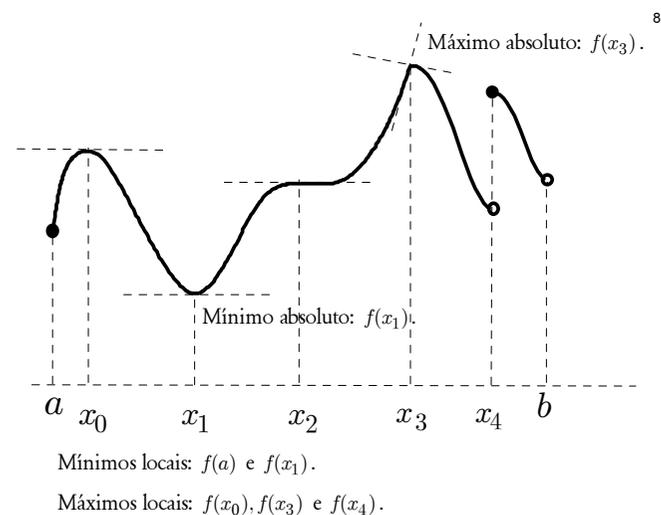
(Corolários do teorema de Lagrange)

Seja f uma função diferenciável num intervalo I .

1. Se $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$, então f é injectiva em I .
2. Se $f'(x) > 0, \forall x \in I$, então f é estritamente crescente em I .
3. Se $f'(x) < 0, \forall x \in I$, então f é estritamente decrescente em I .
4. Se $f'(x) = 0, \forall x \in I$, então f é constante em I .

Sejam f e g funções diferenciáveis num intervalo I .

5. Se $f'(x) = g'(x), \forall x \in I$, então $f - g$ é constante em I .



Em pontos interiores do domínio, os extremos locais ocorrem

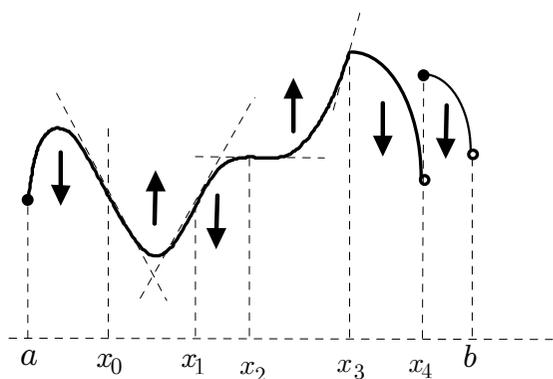
1. Em pontos onde a derivada se anula, ditos pontos de estacionaridade. ($f'(x_0) = f'(x_1) = 0$).
2. Em pontos onde a função não é diferenciável. ($f'_e(x_3) \neq f'_d(x_3)$ e $f'_e(x_4) \neq f'_d(x_4)$)

Não é suficiente que a derivada se anule num ponto para que esse ponto seja extremante local. ($f'(x_2) = 0$).

- Se
1. f é uma função n vezes diferenciável numa vizinhança de um ponto a , $n \geq 2$.
 2. $f^{(n)}$ é a primeira das sucessivas derivadas de f que não se anula no ponto a .
 3. $f^{(n)}$ é contínua em a .

Então

1. se n é ímpar, f não tem extremo local no ponto a .
2. se n é par, $f(a)$ é:
 - i. mínimo local se $f^{(n)}(a) > 0$.
 - ii. máximo local se $f^{(n)}(a) < 0$.



Em x_0, x_1, x_2 e x_3 $f(x)$ tem pontos de inflexão.

Em $]x_0, x_1[$ e $]x_2, x_3[$ $f(x)$ é convexa.

Em $]a, x_0[,]x_1, x_2[,]x_3, x_4[$ e $]x_4, b[$ $f(x)$ é côncava.

Concavidades e Inflexões.

Seja f uma função diferenciável num ponto a , e g a função correspondente à recta tangente ao gráfico da função f no ponto a ,

$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, diz-se que f tem em $x = a$:

1. A concavidade para cima (é convexa) se $\exists \varepsilon > 0, \forall \in V_\varepsilon(a) : f(x) \geq g(x)$.
2. A concavidade para baixo (é côncava) se $\exists \varepsilon > 0, \forall \in V_\varepsilon(a) : f(x) \leq g(x)$.
3. Uma inflexão se $f(x) - g(x)$ tem sinais contrários numa vizinhança de a , para $x < a$ e para $x > a$.

- Se
1. f é uma função n vezes diferenciável numa vizinhança de um ponto a , $n \geq 2$.
 2. $f^{(n)}$ é a primeira das sucessivas derivadas de f , superior à primeira, que não se anula no ponto a .
 3. $f^{(n)}$ é contínua em a .

Então

1. se n é ímpar, f tem uma inflexão em a .
2. se n é par:
 - i. f é convexa em a se $f^{(n)}(a) > 0$.
 - ii. f é côncava em a se $f^{(n)}(a) < 0$.

Assíntotas.

Assíntota vertical em $x = a$ sse

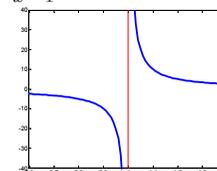
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

Assíntota não vertical $y = mx + b$ sse

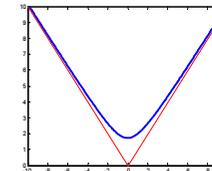
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = b$$

Exemplos.

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$



$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$



Estudo completo de uma função.

13

1. Domínio, D_f .

2. Simetrias e periodicidade.

$$f(x) = f(-x), \forall x \in D_f \text{ ? (é par?)}$$

$$f(x) = -f(-x), \forall x \in D_f \text{ ? (é ímpar?)}$$

$$f(x) = f(x + T), \forall x \in D_f \text{ ? (é periódica?)}$$

3. Intersecções com os eixos coordenados.

Pares $(0, f(0))$ e $(x, 0)$.

4. Continuidade.

Pontos onde f é contínua, prolongável por continuidade ou descontínua. Classificação das discontinuidades.

5. Assíntotas.

Assíntota vertical em $x = a$ se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

Assíntota não vertical $y = mx + b$ se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = b$$

6. Monotonia e extremos.

14

Diferenciabilidade: $f'(x), D_{f'}$? Pontos de estacionaridade: $f'(x) = 0$?

Quadro do sentido de variação.

Note bem: Não é necessário (pontos singulares), nem suficiente (pontos de inflexão), que se verifique $f'(a) = 0$ para que $f(x)$ tenha um extremo em a .

| | | | | | |
|---------|---|-----|---|-----|---|
| x | | a | | b | |
| $f'(x)$ | - | | + | | - |
| $f(x)$ |  | |  | |  |

7. Concavidades e inflexões.

$f''(x), D_{f''}$? Zeros de $f''(x)$?

Quadro do sinal de $f''(x)$.

Note bem: Não é necessário (pontos singulares), nem suficiente (pontos de máximo ou mínimo), que se verifique $f''(a) = 0$ para que $f(x)$ mude o tipo de concavidade em a .

| | | | | | |
|----------|---|-----|---|-----|---|
| x | | a | | b | |
| $f''(x)$ | - | | + | | - |
| $f(x)$ |  | |  | |  |