

• Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira. Nomeadamente, no referente ao Módulo 9, Apontamentos de Análise Matemática 1, Matemática 1 - Eng. Manuel Messias • páginas: 471 a 501

• Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

# Módulo 9

---

## TÓPICOS

---

Noção de primitiva.

---

Primitivas imediatas.

---

Regras de primitivação.

---

Método de primitivação por decomposição.

---

---

---



---

## 1. Noção de primitiva.

### Primitiva.

---

Sejam  $f$  e  $F$  duas funções definidas num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Diz-se que  $F$  é uma *primitiva* de  $f$  no intervalo  $I$  se

$$F'(x) = f(x) \quad , \forall x \in I$$

Se  $F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$  no intervalo  $I$ , então qualquer função  $G(x)$  da forma  $G(x) = F(x) + C$ , onde  $C$  é uma constante arbitrária, é também primitiva de  $f(x)$  em  $I$ , sendo a expressão geral das primitivas de  $f(x)$ :

$$P[f(x)] = \int f(x)dx = F(x) + C$$



## Exercícios.

---

1. Calcule  $P[2x]$

- $P[2x] = x^2 + C$

2. Calcule  $P[e^x]$

- $P[e^x] = e^x + C$

3. Calcule  $P[\text{sen}(x)]$

- $P[\text{sen}(x)] = -\cos(x) + C$

4. Determine a função  $F(x)$  tal que  $F'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \pi$ .

- Atendendo a que  $(\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$ , e fazendo  $u = x^2$ , conclui-se que

$$P[F'(x)] = P\left[\frac{2x}{1+(x^2)^2}\right] = F(x) = \arctan(x^2) + C$$

Logo, de  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \pi$ , resulta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\arctan(x^2) + C) = \pi \Leftrightarrow \arctan(\infty) + C = \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + C = \pi \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

Pelo que, finalmente:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} + \arctan(x^2)$$



## 2. Primitivas imediatas. Regras de primitivação.

### Primitivas imediatas.

As primitivas mais simples podem ser obtidas por recurso a um conjunto de regras, designadas por *regras de primitivação*, resultantes da “inversão” das regras de derivação. As primitivas calculadas por estas regras dizem-se *primitivas imediatas*. Caso seja necessário proceder a algum tratamento analítico antes de aplicar as regras de primitivação as primitivas, assim calculadas, são designadas por *primitivas quase imediatas*.

### Regras de primitivação.

Considerando a função  $u$ , sendo  $n$ ,  $a$  e  $k$  constantes, e omitindo as constantes de primitivação,  $C$ , temos:

$$P k = kx$$

$$P ku = kP u$$

$$P u^n u' = \frac{u^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$$

$$P \frac{u'}{u} = \ln|u|$$

$$P e^u u' = e^u$$

$$P a^u u' = \frac{a^u}{\ln(a)}$$

$$P \operatorname{sen}(u)u' = -\cos(u)$$

$$P \operatorname{cos}(u)u' = \operatorname{sen}(u)$$

$$P \operatorname{sec}^2(u)u' = \tan(u)$$

$$P \operatorname{cosec}^2(u)u' = -\cotan(u)$$

$$P \operatorname{sec}(u)\tan(u)u' = \operatorname{sec}(u)$$

$$P \operatorname{cosec}(u)\cotan(u)u' = -\operatorname{cosec}(u)$$

$$P \frac{u'}{1+u^2} = \arctan(u)$$

$$P \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen}(u)$$

$$P \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arcsec}(u)$$

$$P \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}} = \operatorname{argsh}(u)$$

$$P \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{argch}(u)$$

$$P \operatorname{sh}(u)u' = \operatorname{ch}(u)$$

$$P \operatorname{ch}(u)u' = \operatorname{sh}(u)$$

$$P \operatorname{sech}^2(u)u' = \operatorname{tanh}(u)$$

$$P \operatorname{cosech}^2(u)u' = -\operatorname{cotanh}(u)$$

$$P \operatorname{sech}(u)\operatorname{tanh}(u)u' = \operatorname{sech}(u)$$

$$P \operatorname{cosech}(u)\operatorname{cotanh}(u)u' = -\operatorname{cosech}(u)$$

### Primitivas quase imediatas

$$P \tan(u)u' = -\ln|\cos(u)|$$

$$P \cotan(u)u' = \ln|\operatorname{sen}(u)|$$

$$P \operatorname{sec}(u)u' = \ln|\operatorname{sec}(u) + \tan(u)|$$

$$P \operatorname{cosec}(u)u' = -\ln|\operatorname{cosec}(u) + \cotan(u)|$$



## Exercícios.

1. Determine a função  $f(x)$  tal que  $f'(x) = \frac{1}{x-1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $f(0) = 5$ , e  $f(e+1) = 7$ .

- Sendo  $f'(x) = \frac{1}{x-1}$ , então  $f(x) = P\left[\frac{1}{x-1}\right]$

Tendo em atenção que  $P\left[\frac{u'}{u}\right] = \ln|u|$ , e fazendo  $u = x-1$ , resulta

$$f(x) = \ln|x-1| + C, \quad x \neq 1$$

$$= \begin{cases} \ln(1-x) + C_1 & , x < 1 \\ \ln(x-1) + C_2 & , x > 1 \end{cases}$$

Sendo que  $f(0) = 5 \Leftrightarrow \ln(1-0) + C_1 = 5 \Leftrightarrow C_1 = 5$

e  $f(e+1) = 7 \Leftrightarrow \ln(e+1-1) + C_2 = 7 \Leftrightarrow 1 + C_2 = 7 \Leftrightarrow C_2 = 6$

resulta, finalmente  $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) + 5 & , x < 1 \\ \ln(x-1) + 6 & , x > 1 \end{cases}$

2. Calcule  $P\left[\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^2+2x}}\right]$

- Tendo em atenção que  $P[u^n u'] = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ , resulta

$$P\left[\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^2+2x}}\right] = P\left[(x^2+2x)^{-\frac{1}{5}}(x+1)\right] = \frac{1}{2} P\left[(x^2+2x)^{-\frac{1}{5}}(2x+21)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x^2+2x)^{-\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + C = \frac{5}{8} \sqrt[5]{(x^2+2x)^4} + C$$

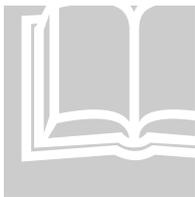
3. Calcule  $P\left[\frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)}\right]$

- Tendo em atenção que  $P[u^n u'] = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ , resulta

$$P\left[\frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)}\right] = P[\cos^{-2}(x)\text{sen}(x)] = P[\cos^{-2}(x)\text{sen}(x)] = \cos^{-1}(x) + C = \sec(x) + C$$

, ou, de outro modo, tendo em atenção que  $P[\sec(x)\tan(x)u'] = \sec(u)$ , resulta

$$P\left[\frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)}\right] = P\left[\frac{1}{\cos(x)} \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right] = P[\sec(x)\tan(x)] = \sec(x) + C$$



### 3. Método de primitivação por decomposição.

#### Primitivação por decomposição.

Sendo  $f_1, f_2, \dots, f_n$  funções primitiváveis num certo intervalo,  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$  é uma função também primitivável nesse intervalo, e

$$P[f_1 + f_2 + \dots + f_n] = P[f_1] + P[f_2] + \dots + P[f_n]$$

Ou seja, a primitiva da soma é igual à soma das primitivas. Aplicada a apenas duas funções a propriedade toma a sua forma mais comum

$$P[u + v] = P[u] + P[v]$$

#### Casos de interesse.

1. Para primitivar quocientes de polinómios,  $N(x)/D(x)$ , em que o grau de  $N(x)$  é maior ou igual ao grau de  $D(x)$  deve proceder-se previamente à divisão.

$$P\left[\frac{N(x)}{D(x)}\right] = P[Q(x)] + P\left[\frac{R(x)}{D(x)}\right]$$

2. Para primitivar potências de expoente ímpar de  $\sin(x)$ ,  $P(\sin^{2n+1}(x)), \forall n \in \mathbb{N}$ , ou de  $\cos(x)$ ,  $P(\cos^{2n+1}(x)), \forall n \in \mathbb{N}$ , decompor a expressão utilizando as relações  $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ , ou  $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ , obtendo assim uma soma de primitivas do tipo

$$P[\cos^k(x)\sin(x)] = -\frac{\cos^{k+1}(x)}{k+1}$$

$$P[\sin^k(x)\cos(x)] = \frac{\sin^{k+1}(x)}{k+1}$$

3. Para primitivar potências de  $\tan(x)$ ,  $P(\tan^n(x)), \forall n \geq 2 \in \mathbb{N}$ , ou de  $\cotan(x)$ ,  $P(\cotan^n(x)), \forall n \in \mathbb{N}$ , decompor a expressão utilizando as relações  $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$ , ou  $\cotan^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) - 1$ , obtendo assim uma soma de primitivas do tipo

$$P[\tan^n(x)] = \frac{\tan^{n-1}(x)}{n-1} - P[\tan^{n-2}(x)]$$

$$P[\cotan^n(x)] = -\frac{\cotan^{n-1}(x)}{n-1} - P[\cotan^{n-2}(x)]$$



## Exercícios.

1. Calcule  $P\left[\frac{x^3 + 3x^2 + 5x - 2}{x + 1}\right]$

- Procedendo à divisão dos polinómios, resulta

$$\begin{aligned} P\left[\frac{x^3 + 3x^2 + 5x - 2}{x + 1}\right] &= P\left[x^2 + 2x + 3 + \frac{-5}{x + 1}\right] = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - 5P\left[\frac{1}{x + 1}\right] \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - 5\ln|x + 1| + C \end{aligned}$$

2. Calcule  $P\left[\frac{x^4 + 2x^3 + 7x - 3}{x^2 + 1}\right]$

- Procedendo à divisão dos polinómios, resulta

$$\begin{aligned} P\left[\frac{x^4 + 2x^3 + 7x - 3}{x^2 + 1}\right] &= P\left[x^2 + 2x - 1 + \frac{5x - 2}{x^2 + 1}\right] \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 - x + \frac{5}{2}P\left[\frac{2x}{x^2 + 1}\right] - 2P\left[\frac{1}{1 + x^2}\right] \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 - x + \frac{5}{2}\ln|x + 1| - 2\arctan(x) + C \end{aligned}$$

3. Calcule  $P[\text{sen}^3(x)]$

- Utilizando a relação  $\text{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ , resulta

$$\begin{aligned} P[\text{sen}^3(x)] &= P[\text{sen}^2(x)\text{sen}(x)] = P[(1 - \cos^2(x))\text{sen}(x)] \\ &= P[\text{sen}(x) - \cos^2(x)\text{sen}(x)] = P[\text{sen}(x)] - P[\cos^2(x)\text{sen}(x)] \\ &= -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + C \end{aligned}$$

4. Calcule  $P[\cotan^3(x)]$

- Utilizando a relação  $\cotan^2(x) = \text{cosec}^2(x) - 1$ , resulta

$$\begin{aligned} P[\cotan^3(x)] &= P[\cotan^2(x)\cotan(x)] = P[(\text{cosec}^2(x) - 1)\cotan(x)] \\ &= P[\cotan(x)\text{cosec}^2(x)] - P[\cotan(x)] = -\frac{\cotan^2(x)}{2} - P\left[\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}\right] \\ &= -\frac{\cotan^2(x)}{2} - \ln|\text{sen}(x)| + C \end{aligned}$$

nota: é igualmente válida a resposta

$$P[\cotan^3(x)] = -\frac{\text{cosec}^2(x)}{2} - \ln|\text{sen}(x)| + C$$