Data limite de entrega
10.01.08 – 11:00 H.

Ficha de Avaliação 09

Nº: Nome:

Nota: Este ficha pode contribuir (dependendo da nota da parte A do teste final) até um máximo de 1 valor para a sua nota final.

(Apresente todos os cálculos e deduções)

1. Simplifique o complexo $w = \dfrac{z - j^{20}}{z^4 - 1}(z^2 - j^{18})$. Calcule w para $z = j - 1$.

Considere o conjunto de vectores $\mathbb{P} = \left\{1, 1 - x^2, x + x^2\right\}$

2. Verifique se $\mathbb{P}$ é linearmente independente.

3. Verifique que $p(x) = 5x^2$ pertence ao subespaço de $\mathcal{P}_2$ gerado por $\mathbb{P}$.

4. Escreva o vector $3 + 2x + x^2$ na base $\mathbb{P}$.

Considerando o espaço vectorial $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ com produto interno $f \cdot g = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g^*(t) dt$

5. Verifique que $x_1(t) = \cos(t)$ e $x_2(t) = \operatorname{sen}(t)$ são ortogonais.

6. Determine a norma de $x_k(t) = e^{jkt}$, com k inteiro.

7. Represente graficamente, para $n \in [-5, 10]$, os sinas discretos $x_1[n] = \sum_{i=0}^{7} \operatorname{sen}\left[i\dfrac{\pi}{2}\right]\delta[n-i]$ e $x_2[n] = \sum_{i=0}^{7} \cos\left[i\dfrac{\pi}{2}\right]\delta[n-i]$. Mostre que os sinais são ortogonais em l^2 com produto interno $x_1 \cdot x_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2^*[n]$.

8. Calcule a projecção ortogonal de $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ no subespaço de $\mathcal{C}[0,1]$ gerado por $g(x) = x - x^2$, com produto interno $f \cdot g = \int_0^1 f(x) g^*(x) dx$.

9. Recorrendo à ortogonalização de Gram-Schmidt determine uma base ortogonal, $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, para o subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathcal{C}[0, \pi]$ com produto interno $f \cdot g = \int_0^{\pi} f(x) g^*(x) dx$ gerado pelos vectores $\mathbf{u}_1 = 1$, $\mathbf{u}_2 = 1 - e^{-j2x}$, e $\mathbf{u}_2 = 1 + e^{j2x}$.

10. Considerando os vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ calculados na alínea anterior, calcule os parâmetros da função $\hat{f}(x) = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3$, que, no intervalo $[0, \pi]$, melhor se adapta à função $f(x) = \cos(2x)$ no sentido da minimização do erro quadrático, ou seja, calcule a projecção ortogonal de $f(x)$ no subespaço vectorial $\mathbb{W}$ com produto interno $f \cdot g = \int_0^{\pi} f(x) g^*(x) dx$. Caso não tenha resolvido a alínea anterior considere $\mathbf{v}_1 = 1$, $\mathbf{v}_2 = e^{-j2x}$, e $\mathbf{v}_2 = e^{j2x}$.