

Módulo 01

• Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

• Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.



Matrizes

[Poole 134 a 178]

Matriz.

Elemento, linha e coluna de uma matriz.

Matriz linha e matriz coluna.

Matriz nula.

Matriz rectangular e quadrada.

Matriz quadrada:

Diagonal principal.

Traço.

Matriz diagonal.

Matriz triangular superior e inferior.

Matriz escalar.

Matriz identidade.

Igualdade.

Adição.

Multiplicação por um escalar.

Produto.

Potência.

Transposição:

Matriz transposta.

Matriz Simétrica e anti-simétrica.

Matriz conjugada e transconjugada

Matriz hermitiana e anti-hermitiana

Matriz escada.

Pivot

Operações sobre linhas.

Matriz equivalente por linhas.

Característica.

Matriz inversa.

Método de condensação.

Matriz ortogonal.

Propriedades da álgebra matricial.



Matriz. Elemento, Linha e Coluna de uma Matriz. Matriz Linha e Matriz Coluna. Matriz Nula. Matriz Rectangular e Quadrada.

1. Sendo m e n dois números naturais, uma **matriz** A , $m \times n$ (m por n), é uma tabela de m vezes n números ($\in \mathbb{R}$ ou $\in \mathbb{C}$), dispostos em m linhas e n colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2. Dizemos que a_{ij} é o **elemento** da posição i, j da matriz A .

3. A i -ésima **linha da matriz** A é $[a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}]$, e a j -ésima **coluna da matriz** A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

4. Uma matriz que só possui uma linha é chamada **matriz linha** ($1 \times n$), ou **vector linha**,

$$A = [a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}]$$

, e uma matriz que só possui uma coluna é chamada **matriz coluna** ($n \times 1$), ou **vector coluna**,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

Ambas são designadas por **matriz fila**, usando-se o termo **fila da matriz** para designar quer uma linha quer uma coluna de uma matriz.

5. Uma matriz em que todos os elementos são iguais a zero diz-se uma **matriz nula**, $\bar{0}$,

$$a_{ij} = 0, \forall i, j$$

6. Se $m \neq n$ dizemos que A é uma **matriz rectangular**, e se $m = n$ dizemos que A é uma **matriz quadrada** (de ordem n).



Exemplo 1.

Sejam as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = [5 \ 1 \ 3], \quad E = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz A é uma matriz quadrada (3×3), tal como F (2×2). Todas as restantes são matrizes rectangulares. B é uma matriz 2×3 (duas linhas por três colunas), C é uma matriz 3×2 , D é uma matriz linha (1×3), e E é uma matriz coluna (3×1).

São exemplo de alguns elementos das matrizes dadas acima

$$a_{12} = 4, \quad b_{23} = 7, \quad d_{11} = 5, \quad e_{31} = 3$$



MatLab 1.

- Criação de uma matriz linha 1×3

```
>> A=[1 2 3]
```

```
A =
```

```
1     2     3
```

- Criação de uma matriz coluna 3×1

```
>> A=[1; 2; 3]
```

```
A =
```

```
1
```

```
2
```

```
3
```

- Criação de uma matriz 3×3

```
>> A=[1 2 3 ; 4 1 2 ; 3 5 1]
```

```
A =
```

```
1     2     3
```

```
4     1     2
```

```
3     5     1
```

- Selecção de um elemento de uma matriz (a_{32}), **A(lin,col)** ,

```
>> A(3,2)
```

```
ans =
```

```
5
```

- Selecção de uma linha de uma matriz (2ª linha), **A(lin,:)** ,

```
>> A(2,:) 
```

```
ans =
```

```
4     1     2
```

- Selecção de uma coluna de uma matriz (1ª coluna), **A(:,col)** ,

```
>> A(:,1)
```

```
ans =
```

```
1
```

```
4
```

```
3
```

- Criação de uma matriz nula (2×4), **zeros(nlin,ncol)**,

```
>> A=zeros(2,4)
```

```
A =
```

```
0     0     0     0
```

```
0     0     0     0
```



Matrizes Quadradas: Diagonal Principal; Traço; Matriz Diagonal, Triangular Superior, e Triangular Inferior. Matriz Identidade e Escalar.

Dada uma matriz quadrada, \mathbf{A} , de ordem n ,

7. A seqüência ordenada (ou *n-uplo*) dos elementos $a_{ij}, \forall i = j$, $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, diz-se a **diagonal principal** de \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

8. Designamos por **traço** de \mathbf{A} a soma de todos os elementos da sua diagonal principal

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

9. A diz-se uma **matriz diagonal** se todos os elementos que estão fora da diagonal principal são iguais a zero.

$$a_{ij} = 0, \forall i \neq j$$

10. A diz-se uma **matriz triangular superior** se todos os elementos situados abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

$$a_{ij} = 0, \forall i > j$$

11. A diz-se uma **matriz triangular inferior** se todos os elementos situados acima da diagonal principal são iguais a zero.

$$a_{ij} = 0, \forall i < j$$

12. A diz-se uma **matriz identidade** se todos os elementos que estão fora da diagonal principal são iguais a zero e todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1

$$(a_{ij} = 0, \forall i \neq j) \wedge (a_{ij} = 1, \forall i = j)$$

13. A diz-se uma **matriz escalar** se todos os elementos que estão fora da diagonal principal são iguais a zero e todos os elementos da diagonal principal são iguais a uma constante, k ,

$$(a_{ij} = 0, \forall i \neq j) \wedge (a_{ij} = k, \forall i = j)$$



Exemplo 2.

Sejam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A diagonal principal da matriz \mathbf{A} é o terno ordenado $(1, 3, 6)$ e o seu traço é $\text{tr}(\mathbf{A}) = 1 + 3 + 6 = 10$.

\mathbf{D} é uma matriz diagonal. \mathbf{U} é uma matriz triangular superior. \mathbf{L} é uma matriz triangular inferior. \mathbf{I} é uma matriz identidade. \mathbf{K} é uma matriz escalar.



MatLab 2.

- Criação de uma matriz 3×3 e selecção da sua diagonal principal, **diag(A)**,

```
>> A=[1 2 3 ; 6 5 4 ; 7 8 9]
```

```
A =
```

```
    1    2    3
    6    5    4
    7    8    9
```

```
>> diag(A)
```

```
ans =
```

```
    1
    5
    9
```

- Cálculo do traço da matriz, **trace(A)**,

```
>> sum(diag(A))
```

```
ans =
```

```
    15
```

, ou simplesmente

```
>> trace(A)
```

```
ans =
```

```
    15
```

- Criação de uma matriz diagonal

```
>> D=diag([ 1 2 3])
```

```
D =
```

```
    1    0    0
    0    2    0
    0    0    3
```

- Selecção da matriz triangular inferior, **tril(A)**, ou triangular superior, **triu(A)**, de uma matriz já existente

```
>> tril(A)
```

```
ans =
```

```
    1    0    0
    6    5    0
    7    8    9
```

```
>> triu(A)
```

```
ans =
```

```
    1    2    3
    0    5    4
    0    0    9
```

- Criação de uma matriz identidade, 3×3 , **eye(n)**, e de uma matriz escalar , 3×3 ,

```
>> I=eye(3)
```

```
I =
```

```
    1    0    0
    0    1    0
    0    0    1
```

```
>> K=3*eye(3)
```

```
K =
```

```
    3    0    0
    0    3    0
    0    0    3
```



Álgebra de Matrizes: Igualdade. Adição. Multiplicação por escalar.

14. Duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{p \times q}$, **são iguais** se têm o mesmo tamanho, ou seja, $m = p$ e $n = q$, e os elementos correspondentes são iguais, ou seja, $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$.

15. A soma de duas matrizes do mesmo tamanho, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, define-se como sendo a matriz $m \times n$

$$C = A + B$$

resultante da soma dos elementos correspondentes de A e B , ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$$

16. A multiplicação de uma matriz, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, **por um escalar**, $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\alpha \in \mathbb{C}$), define-se como sendo a matriz $m \times n$

$$B = \alpha A$$

resultante da multiplicação por α de cada um dos elementos da matriz A , ou seja,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \forall i, j$$



Exemplo 3.

Sejam as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

A soma de A e B é a matriz

$$C = A + B$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) & 2+1 \\ 2+2 & 3+1 & 5+(-1) \\ 4+1 & 1+4 & 6+(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

O produto do escalar $\alpha = 5$ pela matriz A é a matriz

$$B = 5A$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 1 & 5 \times 4 & 5 \times 2 \\ 5 \times 2 & 5 \times 3 & 5 \times 5 \\ 5 \times 4 & 5 \times 1 & 5 \times 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 10 & 15 & 25 \\ 20 & 5 & 30 \end{bmatrix}$$



MatLab 3.

- Soma de duas matrizes, $A+B$,

```
>> A=[1 4 2 ; 2 3 5 ; 4 1 6]
```

```
A =
```

```
    1    4    2
    2    3    5
    4    1    6
```

```
>> B=[2 -1 1 ; 2 1 -1 ; 1 4 -1]
```

```
B =
```

```
    2   -1    1
    2    1   -1
    1    4   -1
```

```
>> C=A+B
```

```
C =
```

```
    3    3    3
    4    4    4
    5    5    5
```

- Produto do escalar $a = 5$ pela matriz A , $a * A$,

```
>> a=5
```

```
a =
```

```
    5
```

```
>> B=a*A
```

```
B =
```

```
    5    20    10
   10    15    25
   20     5    30
```

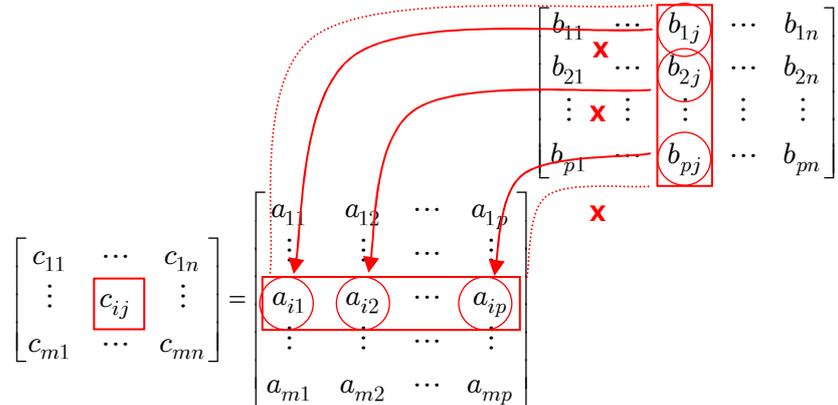


Produto de Matrizes. Potência de uma Matriz.

17. O produto de duas matrizes, tais que o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda, $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$, define-se como sendo a matriz $m \times n$

$$C = AB$$

cujos elementos, c_{ij} , resultam do produto ordenado dos elementos da linha i da matriz A pelos elementos da coluna j da matriz B



, ou seja

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

18. Dada uma matriz quadrada A e um inteiro não negativo k definimos a **potência** de uma matriz como

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ termos}}$$

, sendo $A^0 = I_n$.



Exemplo 4.

Sejam as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Do produto da matriz D , (2×3) , pela matriz E , (3×2) , resulta uma matriz 2×2

$$\begin{aligned}
 DE &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [3 \ 4 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & [3 \ 4 \ 1] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ [2 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & [2 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3 \times 1 + 4 \times 3 + 1 \times 0 & 3 \times 2 + 4 \times 1 + 1 \times 4 \\ 2 \times 1 + 1 \times 3 + 0 \times 0 & 2 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Note-se que o produto da matriz E , (3×2) , pela matriz D , (2×3) , também está definido

$$(3 \times 2) \quad (2 \times 3)$$

, resultando uma matriz 3×3

$$\begin{aligned} \mathbf{ED} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \ 2] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & [1 \ 2] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & [1 \ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [3 \ 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & [3 \ 1] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & [3 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [0 \ 4] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & [0 \ 4] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & [0 \ 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 2 & 1 \times 4 + 2 \times 1 & 1 \times 1 + 2 \times 0 \\ 3 \times 3 + 1 \times 2 & 3 \times 4 + 1 \times 1 & 3 \times 1 + 1 \times 0 \\ 0 \times 3 + 4 \times 2 & 0 \times 4 + 4 \times 1 & 0 \times 1 + 4 \times 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 11 & 13 & 3 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Este exemplo evidencia claramente que **o produto de matrizes não é comutativo**

$$\mathbf{DE} \neq \mathbf{ED}$$

Quando se verifica $\mathbf{DE} = \mathbf{ED}$ as matrizes dizem-se **matrizes permutáveis** (ou **comutáveis**).

O cubo da matriz A é

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [1 \ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & [1 \ 2] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ [3 \ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & [3 \ -1] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 & 1 \times 2 + 2 \times (-1) \\ 3 \times 1 - 1 \times 3 & 3 \times 2 - 1 \times (-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [7 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & [7 \ 0] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ [0 \ 7] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & [0 \ 7] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 \times 1 + 0 \times 3 & 7 \times 2 + 0 \times (-1) \\ 0 \times 1 + 7 \times 3 & 0 \times 2 + 7 \times (-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & -7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



MatLab 4.

- Produto de matrizes, $A*B$,

```
>> D=[3 4 1; 2 1 0]
```

```
D =
```

```
    3    4    1
    2    1    0
```

```
>> E=[1 2; 3 1; 0 4]
```

```
E =
```

```
    1    2
    3    1
    0    4
```

```
>> D*E
```

```
ans =
```

```
    15    14
     5     5
```

```
>> E*D
```

```
ans =
```

```
     7     6     1
    11    13     3
     8     4     0
```

- Potência de uma matriz, A^n ,

```
>> A=[1 2; 3 -1]
```

```
A =
```

```
    1    2
    3   -1
```

```
>> A^3
```

```
ans =
```

```
     7    14
    21   -7
```

```
>> A*A*A
```

```
ans =
```

```
     7    14
    21   -7
```



Matriz Transposta. Matriz Simétrica e Anti-simétrica. Matriz Conjugada e Transconjugada. Matriz Hermitiana e Anti-Hermitiana.

19. A **matriz transposta** de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é definida pela matriz $n \times m$

$$B = A^T$$

, obtida trocando-se as linhas de A com as colunas, ou seja

$$b_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$$

20. Uma matriz quadrada A diz-se **simétrica** se $A^T = A$, e diz-se **anti-simétrica** se $A^T = -A$.

21. Dada uma matriz complexa, A , chama-se **matriz conjugada** de A , e representa-se por \bar{A} , a matriz que se obtém conjugando cada um dos elementos de A , e chama-se **matriz transconjugada** de A , e representa-se por A^* , a transposta da conjugada de A .

22. Uma matriz A diz-se **hermitiana** se $A^* = A$, e diz-se **anti-hermitiana** se $A^* = -A$.



Exemplo 5.

Sejam as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2+j & 1 \\ 2 & j & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & -j & -1+j \\ -j & 0 & -5 \\ 1+j & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

A transposta de A é

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

A matriz B é simétrica, e a matriz C é anti-simétrica

$$B^T = B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad C^T = -C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

A conjugada e a transconjugada da matriz D são

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 3 & 2-j & 1 \\ 2 & -j & 0 \end{bmatrix}, \quad D^* = \bar{D}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2-j & -j \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz E é anti-hermitiana

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 0 & j & -1-j \\ j & 0 & -5 \\ 1-j & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E^* = \bar{E}^T = -E = \begin{bmatrix} 0 & j & 1-j \\ j & 0 & 5 \\ -1-j & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Os elementos da diagonal principal de uma matriz anti-simétrica são obrigatoriamente nulos, e de uma matriz anti-hermitiana são obrigatoriamente nulos e/ou imaginários puros.



MatLab 5.

- Transposta de uma matriz, **A.'**,

```
>> A=[1 3 4; 2 8 9; 5 7 6]
```

```
A =
```

```
    1     3     4
    2     8     9
    5     7     6
```

```
>> A.'
```

```
ans =
```

```
    1     2     5
    3     8     7
    4     9     6
```

- Conjugada de uma matriz, **conj(A)**,

```
>> D=[3 2+j 1; 2 j 0]
```

```
D =
```

```
    3.0000          2.0000 + 1.0000i    1.0000
    2.0000          0 + 1.0000i         0
```

```
>> conj(D)
```

```
ans =
```

```
    3.0000          2.0000 - 1.0000i    1.0000
    2.0000          0 - 1.0000i         0
```

- Transconjugada de uma matriz, **A'**,

```
>> D'
```

```
ans =
```

```
    3.0000          2.0000
    2.0000 - 1.0000i    0 - 1.0000i
    1.0000              0
```



Matriz Escada. Pivot. Operações sobre Linhas. Matriz Equivalente por Linhas. Característica.

23. Diz-se que uma matriz está na **forma escalonada** (ou está na forma de uma **matriz escada**) se

1. Todas as linha nulas estão abaixo das linhas não nulas.
2. Por baixo do 1º elemento não nulo de uma linha, chamado, **pivot**, todos os elementos são nulos.
3. O pivot da linha $i + 1$ está à direita do pivot da linha i .

24. Uma matriz escada está na **forma escalonada reduzida** se os seus pivots são 1 e cada pivot é o único elemento não nulo na sua coluna.

25. Designamos por **operação elementar sobre as linhas** de uma matriz cada uma das seguintes 3 operações:

1. Troca entre si de duas linhas da matriz

$$L_i \leftrightarrow L_k$$

2. Multiplicação de uma linha da matriz por um escalar não nulo

$$\alpha L_i \rightarrow L_i$$

3. Substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo escalar de outra linha

$$L_i + \alpha L_k \rightarrow L_i$$

26. Uma matriz **B** diz-se **equivalente por linhas** a uma matriz **A**, e escrevemos $A \sim B$, se **B** pode ser obtida de **A** por aplicação de uma sequência de operações elementares sobre linhas.

27. Designamos por **característica de uma matriz A**, e escrevemos $\text{car}(\mathbf{A})$, o número de linhas não nulas da matriz escada que dela resulta pela execução de operações elementares sobre linhas.

Exemplo 6.

Sejam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

A matriz **A** está na forma escalonada, tendo característica $\text{car}(\mathbf{A}) = 3$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz **B** está na forma escalonada reduzida, tendo característica $\text{car}(\mathbf{B}) = 3$.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & \boxed{0} & 2 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix}$$

Através da execução de um sequência de operações elementares sobre linhas, vamos transformar a matriz C numa matriz escada

$$\begin{aligned}
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} && \begin{aligned} L_2 - 2L_1 &\rightarrow L_2 \\ L_3 - 1L_1 &\rightarrow L_3 \end{aligned} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} && L_3 \leftrightarrow L_2 \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} && -1L_2 \rightarrow L_2 \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} && \begin{aligned} L_1 - 2L_2 &\rightarrow L_1 \\ L_3 + 3L_2 &\rightarrow L_3 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

A matriz já está na forma escalonada. Podemos prosseguir no sentido de a transformar na forma escalonada reduzida

$$\begin{aligned}
 C &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} && -\frac{1}{3}L_3 \rightarrow L_3 \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} && L_1 - 3L_3 \rightarrow L_1
 \end{aligned}$$

A matriz C está agora na forma escalonada reduzida (todos os seus pivots são 1 e cada pivot é o único elemento não nulo na sua coluna)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$



MatLab 6.

- Troca entre si de duas linhas da matriz, $A([Li Lk],:) = A([Lk Li],:)$,

```
>> C=[1 2 3 1; 2 1 3 -1; 1 1 3 -2]
```

```
C =
```

```
1     2     3     1
2     1     3    -1
1     1     3    -2
```

```
>> C([1 3],:) = C([3 1],:)
```

$$L_1 \leftrightarrow L_3$$

```
C =
```

```
1     1     3    -2
2     1     3    -1
1     2     3     1
```

- Multiplicação de uma linha da matriz por um escalar não nulo, $C(Li,:) = a*C(Li,:)$,

```
>> C(3,:) = 5*C(3,:)
```

$$5L_3 \rightarrow L_3$$

```
C =
```

```
1     1     3    -2
2     1     3    -1
5     10    15     5
```

- Substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo escalar de outra linha, $C(Li,:) = C(Li,:) + a*C(Lk,:)$,

```
>> C(3,:)=C(3,:)-5*C(1,:)
```

$$L_3 - 5L_1 \rightarrow L_3$$

```
C =
```

```
1     1     3    -2
2     1     3    -1
0     5     0    15
```

- Característica de uma matriz, $\text{rank}(A)$,

```
>> rank(C)
```

```
ans =
```

```
3
```

- Redução de uma matriz à forma escalonada reduzida, $\text{rref}(A)$,

```
>> rref(C)
```

```
ans =
```

```
1     0     0     1
0     1     0     3
0     0     1    -2
```



Matriz Inversa. Método de condensação. Matriz Ortogonal.

28. Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ diz-se **invertível**, (ou **regular**, ou **não singular**) se existir uma matriz A^{-1} , denominada **matriz inversa** de A , tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

, em que I_n é a matriz identidade. A é invertível sse $\text{car}(A) = n$ e a sua inversa é única.

29. Se A não tem inversa dizemos que é uma **matriz singular** (ou **não regular**, ou **não invertível**).

30. Método da condensação para a determinação da inversa de uma matriz: Sendo a matriz A invertível, se, por operações elementares sobre linhas, transformarmos a matriz $[A | I]$ na matriz $[I | B]$, então $B = A^{-1}$.

31. Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ diz-se **ortogonal** sse a sua inversa for igual à sua transposta

$$A^{-1} = A^T$$

ou seja

$$AA^T = A^T A = I_n$$

Todo o número real, não nulo, a , possui um inverso, isto é, existe um b tal que $ab = ba = 1$. O inverso é único, usando-se a notação $b = a^{-1}$. Nem todas as matrizes, A , não nulas, possuem inversa, ou seja, nem sempre existe uma matriz B tal que $AB = BA = I$.



Exemplo 7.

Sejam as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- A inversa da matriz A é a matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

, como podemos verificar

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 3 - 5 \times 1 & -2 \times 5 + 5 \times 2 \\ 1 \times 3 - 3 \times 1 & -1 \times 5 + 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

- Recorrendo ao método de condensação, podemos calcular a inversa da matriz B

$$[B | I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 1L_1 \rightarrow L_3 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{B} \mid \mathbf{I}_3] &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} && \begin{aligned} L_1 - 2L_2 &\rightarrow L_1 \\ L_3 + 2L_2 &\rightarrow L_3 \end{aligned} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} && \frac{1}{2} L_3 \rightarrow L_3 \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & -3/2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} && \begin{aligned} L_1 - 3L_3 &\rightarrow L_1 \\ L_2 + 2L_3 &\rightarrow L_2 \end{aligned} \\
&\sim [\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{B}^{-1}]
\end{aligned}$$

Tendo sido possível converter a matriz $[\mathbf{B} \mid \mathbf{I}_3]$ na matriz $[\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{B}^{-1}]$, temos

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -3/2 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

- A transposta da matriz \mathbf{C} é a matriz

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}\mathbf{C}^T &= \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [1/2 \ \sqrt{3}/2] \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} & [1/2 \ \sqrt{3}/2] \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \\ [\sqrt{3}/2 \ -1/2] \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} & [\sqrt{3}/2 \ -1/2] \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{I}_2
\end{aligned}$$

A matriz \mathbf{C} é uma matriz ortogonal

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$



MatLab 7.

- Matriz inversa, **inv(A)**,

```
>> A=[2 5; 1 3]
A =
     2     5
     1     3
>> inv(A)
ans =
     3    -5
    -1     2
>> B=[1 2 -1; 2 2 4; 1 3 -3]
B =
     1     2    -1
     2     2     4
     1     3    -3
>> inv(B)
ans =
     9.0000    -1.5000    -5.0000
    -5.0000     1.0000     3.0000
    -2.0000     0.5000     1.0000
>>
```

- Inversa pelo método de condensação.

```
>> D=[B eye(3)]
D =
     1     2    -1     1     0     0
     2     2     4     0     1     0
     1     3    -3     0     0     1
>> D=rref(D)
D =
     1.0000         0         0     9.0000    -1.5000    -5.0000
         0     1.0000         0    -5.0000     1.0000     3.0000
         0         0     1.0000    -2.0000     0.5000     1.0000
>> D=D(:,4:6)
D =
     9.0000    -1.5000    -5.0000
    -5.0000     1.0000     3.0000
    -2.0000     0.5000     1.0000
```



Propriedades da Álgebra Matricial.

Sempre que as expressões estejam definidas temos:

Adição

1. $A + B = B + A$ (comutativa)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativa)
3. $A + \bar{0} = A$ (elemento neutro)
4. $A + (-A) = \bar{0}$ (elemento simétrico)

Multiplicação por escalar

5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Multiplicação

8. $A(BC) = (AB)C$ (associativa)
9. $AI_n = I_m A = A$ (elemento neutro)
10. $A(B + C) = AB + AC$
 $(B + C)A = BA + CA$ (distributiva)
11. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
12. $A\bar{0} = \bar{0}A = \bar{0}$ (elemento absorvente)

Transposição

13. $(A^T)^T = A$
14. $(A + B)^T = A^T + B^T$
15. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
16. $(AB)^T = B^T A^T$
17. $(A^k)^T = (A^T)^k$

Conjugada

18. $\overline{\bar{A}} = A$
19. $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$
20. $\overline{zA} = \bar{z}\bar{A}$
21. $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$

Transconjugada

22. $(A^*)^* = A$
23. $(A + B)^* = A^* + B^*$
24. $(zA)^* = \bar{z}A^*$
25. $(AB)^* = B^*A^*$

Inversa

26. $(A^{-1})^{-1} = A$
27. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
28. $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$
29. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
30. $\overline{A^{-1}} = (\bar{A})^{-1}$
31. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$
32. $AB = \bar{0} \not\Rightarrow (A = \bar{0} \vee B = \bar{0})$ (só se A ou B for invertível)
33. $AB = AC \not\Rightarrow B = C$ (só se A for invertível)



Exemplo 8.

Sejam A, B e C matrizes quadradas quaisquer, diga se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas (admita-se que as operações indicadas estão definidas).

1. $(AB)^T = A^T B^T$

2. $2AC + BC = C(2A + B)$

3. $AB = \bar{0} \Rightarrow A = \bar{0} \vee B = \bar{0}$

4. $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

5. $BA + 2A = (B + 2)A$

6. $A^2 A^3 = A^5$

	1	2	3	4	5	6
Verdadeira	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Falsa	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1. $(AB)^T \neq A^T B^T$. Pode demonstrar-se, isso sim, que

$$(AB)^T \neq B^T A^T$$

2. Não esquecer que o produto de matrizes não é comutativo. Podendo verificar-se em particular que $2AC + BC = C(2A + B)$, caso as matrizes C e $(2A + B)$ sejam permutáveis, em geral, isto é, para quaisquer matrizes quadradas A, B e C , temos

$$2AC + BC = (2A + B)C \neq C(2A + B)$$

3. $AB = \bar{0} \Rightarrow A = \bar{0} \vee B = \bar{0}$ apenas nos casos em que A ou B for invertível. Temos nesses casos que

$$AB = \bar{0} \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}\bar{0} \Rightarrow IB = \bar{0} \Rightarrow B = \bar{0}$$

$$AB = \bar{0} \Rightarrow ABB^{-1} = \bar{0}B^{-1} \Rightarrow AI = \bar{0} \Rightarrow A = \bar{0}$$

5. Tenha-se em atenção que $BA + 2A = (B + 2I)A \neq (B + 2)A$. Sem perda de generalidade, e por clareza de exposição, consideremos o caso particular

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

temos

$$B + 2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \neq B + 2I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 2I_2 A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

temos

$$BA + 2A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 18 \\ 12 & 30 \end{bmatrix}$$

$$(B + 2)A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 24 \\ 16 & 38 \end{bmatrix}$$



Exercícios.

1. Calcule $(j^{25}\mathbf{BC} + \mathbf{A}^2)^{-1}$, sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = [1 - i \quad 1 + j]^T \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1]$$

Temos

$$\begin{aligned} j^{25}\mathbf{BC} + \mathbf{A}^2 &= j(j^2)^{12} \begin{bmatrix} 1-j \\ 1+j \end{bmatrix} [1 \quad 1] + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= j(-1)^{12} \begin{bmatrix} 1-j & 1-j \\ 1+j & 1+j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ [0 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & [0 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= j \begin{bmatrix} 1-j & 1-j \\ 1+j & 1+j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+j & 1+j \\ -1+j & -1+j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+j & 1+j \\ -1+j & j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Recorrendo ao método de condensação

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2+j & 1+j & 1 & 0 \\ -1+j & j & 0 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} + \frac{1}{5}j & \frac{2}{5} - \frac{1}{5}j & 0 \\ -1+j & j & 0 & 1 \end{bmatrix} && \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}j\right)L_1 \rightarrow L_1 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} + \frac{1}{5}j & \frac{2}{5} - \frac{1}{5}j & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} + \frac{3}{5}j & \frac{1}{5} - \frac{3}{5}j & 1 \end{bmatrix} && (1-j)L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} + \frac{1}{5}j & \frac{2}{5} - \frac{1}{5}j & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}j & \frac{4}{5} - \frac{3}{5}j \end{bmatrix} && \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}j\right)L_2 \rightarrow L_2 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} + \frac{1}{5}j & -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}j \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}j & \frac{4}{5} - \frac{3}{5}j \end{bmatrix} && \left(-\frac{3}{5} - \frac{1}{5}j\right)L_2 + L_1 \rightarrow L_1 \end{aligned}$$

Temos

$$(j^{25}\mathbf{BC} + \mathbf{A}^2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} + \frac{1}{5}j & -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}j \\ -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}j & \frac{4}{5} - \frac{3}{5}j \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2+j & -3+j \\ -1-3j & 4-3j \end{bmatrix}$$



Recorrendo ao MatLab teríamos:

```
>> A=[1 0; 0 -1];
>> B=[1-i 1+j].';
```

```
>> C=[1 1];
>> inv(j^25*B*C+A^2)
ans =
    2/5    +    1/5i    -3/5    +    1/5i
   -1/5    -    3/5i    4/5    -    3/5i
```

2. Sendo

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 9 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 9 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 8 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule c_{23} .

Atendendo à definição de produto matricial, c_{23} é igual ao produto da 2ª linha da matriz A pela 3ª coluna da matriz A

$$c_{23} = a_{2j}b_{j3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \times 3 + 0 \times 5 + 8 \times 6 + 2 \times 0 = 60$$



Recorrendo ao MatLab teríamos:

```
>> c23=[4 0 8 2]*[3 5 6 0].'
```

c23 =
60

3. Admitindo que A e B são matrizes de ordem n, B é regular, e A e B são permutáveis, mostre que A e B⁻¹ também são matrizes permutáveis.

Temos

$$\begin{aligned} AB &= BA \\ B^{-1}(AB)B^{-1} &= B^{-1}(BA)B^{-1} \\ (B^{-1}A)(BB^{-1}) &= (B^{-1}B)(AB^{-1}) \\ (B^{-1}A)I_n &= I_n(AB^{-1}) \\ B^{-1}A &= AB^{-1} \end{aligned}$$

4. Admitindo que A e B são matrizes ortogonais de ordem n, mostre que

$$A^T(B - I_n)^T B + A^{-1}B - A^T = \bar{0}$$

Temos

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{B} - \mathbf{I}_n)^T \mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{A}^T = \bar{\mathbf{0}}$$

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{B}^T - \mathbf{I}_n^T) \mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{A}^T = \bar{\mathbf{0}}$$

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{B}^T - \mathbf{I}_n) \mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{A}^T = \bar{\mathbf{0}}$$

Sendo \mathbf{A} uma matriz ortogonal, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$, pelo que

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{B}^T - \mathbf{I}_n) \mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{A}^T = \bar{\mathbf{0}}$$

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{B}^T \mathbf{B} - \mathbf{I}_n \mathbf{B}) + \mathbf{A}^T \mathbf{B} - \mathbf{A}^T = \bar{\mathbf{0}}$$

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{B}^T \mathbf{B} - \mathbf{I}_n \mathbf{B} + \mathbf{B} - \mathbf{I}_n) = \bar{\mathbf{0}}$$

Sendo \mathbf{B} uma matriz ortogonal, $\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$, pelo que

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{B}^T \mathbf{B} - \mathbf{I}_n \mathbf{B} + \mathbf{B} - \mathbf{I}_n) = \bar{\mathbf{0}}$$

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{I}_n - \mathbf{B} + \mathbf{B} - \mathbf{I}_n) = \bar{\mathbf{0}}$$

$$\mathbf{A}^T(\bar{\mathbf{0}}) = \bar{\mathbf{0}}$$

5. Sendo \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} matrizes regulares de ordem n , tais que $\mathbf{B} = \mathbf{C}^2 \mathbf{A}^*$, mostre que $(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}^2)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}})^T$

Temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}^2)^{-1} &= (\mathbf{C}^2)^{-1} (\mathbf{B}^{-1})^{-1} (\mathbf{A}^T)^{-1} \\ &= (\mathbf{C}^2)^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{A}^{-1})^T \\ &= (\mathbf{C}^2)^{-1} (\mathbf{C}^2 \mathbf{A}^*) (\mathbf{A}^{-1})^T \\ &= ((\mathbf{C}^2)^{-1} \mathbf{C}^2) \mathbf{A}^* (\mathbf{A}^{-1})^T \\ &= \mathbf{A}^* (\mathbf{A}^{-1})^T \\ &= \bar{\mathbf{A}}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \\ &= (\mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}})^T \end{aligned}$$