

Módulo 02

• Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

• Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.



Sistemas Lineares

[Poole 58 a 85]

Equação linear.

Sistema de equações lineares.

Equação matricial.

Soluções do sistema.

Método de Gauss-Jordan.

Classificação de sistemas quanto à solução.

Sistemas homogéneos.



Equação Linear. Sistema de Equações Lineares. Equação Matricial.

1. Uma **equação linear** de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , designadas por **incógnitas**, é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

em que a_1, a_2, \dots, a_n e b são constantes ($\in \mathbb{R}$ ou $\in \mathbb{C}$).

2. Um **sistema de equações lineares** é um conjunto de equações lineares, ou seja, um conjunto de equações da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que a_{ij} , os **coeficientes** do sistema, e b_k , os **termos independentes**, são constantes ($\in \mathbb{R}$ ou $\in \mathbb{C}$), para $i, k = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

3. Um sistema linear pode ser representado por uma **equação matricial**

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é a **matriz simples**, ou **matriz dos coeficientes** do sistema,

$$\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$$

é a **matriz (vector) coluna das incógnitas**, e

$$\mathbf{B} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^T$$

é a **matriz (vector) coluna dos termos independentes**.



Exemplo 1.

O sistema de equações lineares

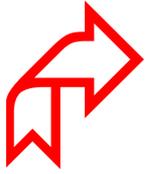
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

pode ser escrito na forma de uma equação matricial, $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

sendo a matriz dos coeficientes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ o vector coluna das incógnitas: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y]^T$, e

o vector coluna dos termos independentes $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = [5 \ 4]^T$



Soluções do Sistema. Método de Gauss-Jordan.

4. Uma **solução de um sistema** é uma matriz coluna $S = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]^T$, tal que as equações do sistema são todas satisfeitas quando fazemos as substituições, $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, \dots , $x_n = s_n$.

5. Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$, são tais que a matriz $[C | D]$ é obtida da matriz $[A | B]$ em resultado da aplicação de um conjunto de operações elementares sobre linhas, então os dois sistemas possuem as mesmas soluções, dizendo-se **sistemas equivalentes**.

6. O **método de Gauss-Jordan** de resolução de sistemas consiste em aplicar operações elementares às linhas da **matriz completa** (ou **matriz ampliada**) do sistema, $[A | B]$, até que a matriz dos coeficientes esteja na forma escalonada reduzida.



Exemplo 2.

O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

tem matriz completa

$$[A | B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Por aplicação do método de Gauss-Jordan

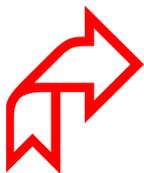
$$\begin{aligned} [A | B] &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{array} \right] && L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] && -1/3 L_2 \rightarrow L_2 \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] = [C | D] && L_1 - 2L_2 \rightarrow L_1 \end{aligned}$$

, resulta o sistema $CX = D$, equivalente a $AX = B$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

, ficando determinada a solução do sistema

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$



Classificação de Sistemas Quanto à Solução.

7. Quanto ao número de soluções que admite, um sistema com n incógnitas classifica-se como (dita a **natureza do sistema**)

- **Sistema possível e determinado:** se tem uma única solução
(sse $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]) = n$);

- **Sistema impossível:** se não tem soluções
(sse $\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{B}])$);

Se a última linha não nula da forma escalonada reduzida da matriz completa do sistema for da forma $[0 \cdots 0 \mid b'_m]$ com $b'_m \neq 0$ o sistema é impossível;

- **Sistema possível e indeterminado:** se tem infinitas soluções.

(sse $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]) < n$);

Se o sistema tiver solução, e a forma escalonada reduzida da matriz completa possuir colunas sem pivots, o sistema é possível e indeterminado. As variáveis que não estão associadas a pivots são chamadas **variáveis livres** ou variáveis arbitrárias, isto é, podem assumir qualquer valor, sendo o seu número chamado o **grau de indeterminação** do sistema, $g = n - \text{car}(\mathbf{A})$. As variáveis associadas aos pivots, ditas **variáveis principais**, têm os seus valores dependentes das variáveis livres. O conjunto de todas as soluções de um sistema possível e indeterminado é chamada **solução geral do sistema**.



Exemplo 3.

- O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

que, como vimos, tem por solução $x = 1$ e $y = 2$, é um sistema possível e determinado.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Como vimos

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

pelo que $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]) = 2 = n$.

- Do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$$

resulta, recorrendo ao método de Gauss-Jordan,

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = [\mathbf{C} \mid \mathbf{D}] \qquad L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2
 \end{aligned}$$

Dado que a última linha não nula da forma escalonada reduzida da matriz completa do sistema é da forma $[0 \cdots 0 \mid b'_m]$ com $b'_m = -4 \neq 0$ o sistema é impossível:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = -4 \end{cases}$$

De modo equivalente, podemos concluir que o sistema é impossível, dado que $\text{car}(\mathbf{A}) = 1 \neq 2 = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{B}])$.

- Do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$

resulta, recorrendo ao método de Gauss-Jordan,

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad -1/2 L_1 \rightarrow L_1 \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{C} \mid \mathbf{D}] \qquad L_2 - 4L_1 \rightarrow L_2
 \end{aligned}$$

Dado que a forma escalonada reduzida da matriz completa possui colunas sem pivots, a 2ª coluna, o sistema é possível e indeterminado. O sistema considerado é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

, tendo portanto como solução

$$x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}$$

A variável que não estão associada a um pivot, y , é uma variável livre. Tendo uma só variável livre, o sistema tem um grau de indeterminação $g = 1$ (também dito sistema simplesmente indeterminado). O sistema tem uma variável principal (associada a um pivot), x , com um valor dependente da variável livre. A solução geral do sistema é expressa na forma

$$x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

De modo equivalente, podemos concluir que o sistema é indeterminado, dado que $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]) = 1 < n = 2$, com um grau de indeterminação $g = n - \text{car}(\mathbf{A}) = 2 - 1 = 1$.



Sistemas Homogéneos.

8. Um sistema da forma $\mathbf{AX} = \bar{\mathbf{0}}$ é designado por **sistema homogéneo**.

9. Todo o sistema homogéneo admite pelo menos a solução $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{0}}$, chamada **solução trivial**.

10. Se um sistema homogéneo tiver outra solução para além da solução trivial, então tem infinitas soluções.

11. Se $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ é tal que $m < n$, então o sistema homogéneo $\mathbf{AX} = \bar{\mathbf{0}}$ tem soluções diferentes da solução trivial, ou seja, todo o sistema com menos equações do que incógnitas tem infinitas soluções.

12. Sendo $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ um sistema indeterminado, $\mathbf{X} = \mathbf{X}_p$ uma solução particular do sistema, ou seja, uma qualquer das suas soluções, e $\mathbf{X} = \mathbf{X}_h$ a solução geral do **sistema homogéneo associado**, $\mathbf{AX} = \bar{\mathbf{0}}$, então $\mathbf{X} = \mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p$ é a solução geral do sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.



Exemplo 4.

- Seja o sistema, $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

O sistema homogéneo associado, $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, dado que

$$\left[\mathbf{A} \mid \bar{\mathbf{0}} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_4 \end{cases}$$

tem como solução geral, $\mathbf{X} = \mathbf{X}_h$,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

Sabendo que $\mathbf{X}_p = [1 \ 2 \ -1 \ 0]^T$ é uma solução particular do sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, então a sua solução geral é da forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a \\ 2-b \\ a-1 \\ b \end{bmatrix}$$



Exercícios.

1. Estude a natureza do sistema

$$\begin{cases} (a+1)x_1 = b-2j \\ ax_1 + jx_2 = -2j \end{cases}$$

em função dos parâmetros complexos a e b .

Escrevendo o sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a+1 & 0 \\ a & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-2j \\ -2j \end{bmatrix}$$

Temos, recorrendo ao método de Gauss-Jordan,

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] &= \begin{bmatrix} a+1 & 0 & b-2j \\ a & j & -2j \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{b-2j}{a+1} \\ a & j & -2j \end{bmatrix} && \frac{1}{a+1} L_1 \rightarrow L_1 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{b-2j}{a+1} \\ 0 & j & -\frac{ab+2j}{a+1} \end{bmatrix} && L_2 - aL_1 \rightarrow L_2 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{b-2j}{a+1} \\ 0 & 1 & j\frac{ab+2j}{a+1} \end{bmatrix} && -jL_2 \rightarrow L_2 \end{aligned}$$

Pelo que:

- para $a \neq -1$, as expressões assumem valores finitos, pelo que o sistema é possível e determinado;
- para $a = -1$,

se $ab + 2j = 2j - b \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 2j$ o sistema é impossível, dado que

$$\frac{b-2j}{a+1} = j \frac{ab+2j}{a+1} = \pm\infty$$

se $ab + 2j = 2j - b = 0 \Leftrightarrow b = 2j$ o sistema é possível e indeterminado, dado que

$$\frac{b-2j}{a+1} = j \frac{ab+2j}{a+1} = \frac{0}{0}$$

2. Estude a natureza do sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 + b \\ x_1 + x_3 = a - bx_2 \\ bx_1 + x_2 = b(1 + 2b) \end{cases}$$

em função dos parâmetros reais a e b .

Escrevendo o sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+b \\ a \\ b(1+2b) \end{bmatrix}$$

Temos, recorrendo ao método de Gauss-Jordan,

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+b \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & 0 & b(1+2b) \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+b \\ 0 & b-1 & 0 & a-b-1 \\ 0 & 1-b & -b & b^2 \end{bmatrix} && \begin{array}{l} L_2 - 1L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - bL_1 \rightarrow L_3 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+b \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-b-1}{b-1} \\ 0 & 1-b & -b & b^2 \end{bmatrix} && \frac{1}{b-1} L_2 \rightarrow L_2 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{b^2+b-a}{b-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-b-1}{b-1} \\ 0 & 0 & -b & b^2-b+a-1 \end{bmatrix} && \begin{array}{l} L_1 - 1L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 + (b-1)L_2 \rightarrow L_3 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{b^2+b-a}{b-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-b-1}{b-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{b^2-b+a-1}{b} \end{bmatrix} && -\frac{1}{b} L_3 \rightarrow L_3 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2b^3-b^2-a+1}{b(b-1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-b-1}{b-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{b^2+b-a+1}{b} \end{bmatrix} && L_1 - 1L_3 \rightarrow L_1 \end{aligned}$$

Pelo que:

- para $b \neq 0 \wedge b \neq 1$, as expressões assumem valores finitos, pelo que o sistema é possível e determinado;
- para $b = 0$ resulta

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-a+1}{0} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-1}{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-a+1}{0} \end{bmatrix}$$

se $a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$ o sistema é impossível, dado que

$$\frac{2b^3 - b^2 - a + 1}{b(b-1)} = \frac{-b^2 + b - a + 1}{b} = \pm\infty$$

se $a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ o sistema é possível e indeterminado, dado que

$$\frac{2b^3 - b^2 - a + 1}{b(b-1)} = \frac{-b^2 + b - a + 1}{b} = \frac{0}{0}$$

- para $b = 1$ resulta

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2-a}{0} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-2}{0} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-a+1}{1} \end{bmatrix}$$

se $a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$ o sistema é impossível, dado que

$$\frac{2b^3 - b^2 - a + 1}{b(b-1)} = \frac{a-b-1}{b-1} = \pm\infty$$

se $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ o sistema é possível e indeterminado, dado que

$$\frac{2b^3 - b^2 - a + 1}{b(b-1)} = \frac{a-b-1}{b-1} = \frac{0}{0}$$

Resumindo

$$\begin{aligned} b \neq 0 \wedge b \neq 1 &\Rightarrow \text{O sistema é possível e determinado} \\ b = 0 &\begin{cases} a = 1 \Rightarrow \text{O sistema é indeterminado} \\ a \neq 1 \Rightarrow \text{O sistema é impossível} \end{cases} \\ b = 1 &\begin{cases} a = 2 \Rightarrow \text{O sistema é indeterminado} \\ a \neq 2 \Rightarrow \text{O sistema é impossível} \end{cases} \end{aligned}$$



MatLab 1.

Como vimos, a função `rref(A)` faz a redução da matriz A à forma escalonada reduzida. Com base nesta função, e nos considerandos dos pontos anteriores, a resolução de sistemas em Matlab é trivial.

1. O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

tem a matriz completa $[A | B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

, pelo que

```
>> AB=[1 1 -1 1; 2 2 1 6; 3 -1 2 5;0 4 -2 2];
>> CD=rref(AB)
CD =
    1.0000         0         0    1.1667
         0    1.0000         0    1.1667
         0         0    1.0000    1.3333
         0         0         0         0
```

Para ver o resultado na forma fraccionária (quando possível), utilizamos o comando **format rat**

```
>> format rat
>> CD
CD =
     1         0         0         7/6
     0         1         0         7/6
     0         0         1         4/3
     0         0         0         0
```

O sistema é possível e determinado, com solução

$$x_1 = \frac{7}{6}; x_2 = \frac{7}{6}; x_3 = \frac{4}{3}$$

Poderíamos ter verificado que o sistema é possível e determinado, fazendo

```
>> A=[1 1 -1; 2 2 1; 3 -1 2;0 4 -2];
>> B=[1; 6; 5;2];
>> ra=rank(A)
ra =
     3
>> rb=rank([A B])
rb =
     3
```

Dado que $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]) = n = 3$ o sistema é possível e determinado.

Para resolver um sistema de equações lineares podemos utilizar a função do MatLab **linsolve(A,B)**

```
>> A=[1 1 -1; 2 2 1; 3 -1 2;0 4 -2];
>> B=[1; 6; 5;2];
>> format rat
>> linsolve (A,B)
ans =
    7/6
    7/6
    4/3
```

2. O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$$

tem a matriz completa

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

, pelo que

```
>> AB=[1 2 -1 1 5;0 1 1 2 5; 1 3 0 3 2];
>> CD=rref(AB)
CD =
    1     0    -3    -3     0
    0     1     1     2     0
    0     0     0     0     1
```

Dado que a última linha não nula da forma escalonada reduzida da matriz completa do sistema é da forma $[0 \cdots 0 \mid b'_m]$ com $b'_m = 1 \neq 0$ o sistema é impossível.

Alternativamente, podemos fazer

```
>> A=[1 2 -1 1;0 1 1 2 ; 1 3 0 3];
>> B=[5;5; 2];
>> rank(A)
ans =
    2
>> rank([A B])
ans =
    3
```

, e concluir que, sendo $\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{B}])$, o sistema é impossível.

Se utilizar-mos a função `linsolve(A,B)` somos informados que o sistema é impossível

```
>> linsolve (A,B)
```

Warning: Rank deficient, rank = 2, tol = 3.3233e-015.
ans = ...

3. O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

tem a matriz completa

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

, pelo que

```
>> AB=[0 0 1 1 2;2 -2 0 0 0;4 -4 2 2 4;2 -2 -1 -1 -2];
>> CD=rref(AB)
CD =
     1     -1     0     0     0
     0     0     1     1     2
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
```

A forma escalonada reduzida da matriz completa possui colunas sem pivots, a 2ª coluna e a 4ª, pelo que o sistema é possível e indeterminado. O sistema considerado é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

, tendo portanto como solução

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

As variáveis que não estão associada a um pivot, x_2 e x_4 , são variáveis livres. Tendo duas variáveis livres, o sistema tem um grau de indeterminação $g = 2$ (também dito sistema duplamente indeterminado). O sistema tem duas variáveis principais (associadas a um pivot), x_1 e x_3 , com um valor dependente das variáveis livres. A solução geral do sistema é expressa na forma

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 2 - x_4 \end{cases}$$

Alternativamente, podemos fazer

```
>> A=[0 0 1 1;2 -2 0 0;4 -4 2 2;2 -2 -1 -1];
>> B=[2;0;4;-2];
```

```
>> rank(A)
ans =
     2
>> rank([A B])
ans =
     2
```

, e concluir que, sendo $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]) = 2 < n = 4$, o sistema é indeterminado (duplamente indeterminado dado que $g = 4 - 2 = 2$).

Se utilizar-mos a função `linsolve(A,B)` somos informados que o sistema é indeterminado

```
>> linsolve(A,B)
Warning: Matrix is singular to working precision.
ans =
     0/0
     0/0
     0/0
     0/0
```

4. Seja o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1-a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. A natureza do sistema depende dos parâmetros a e b . Para fazer o estudo do sistema recorrendo ao MatLab temos de declarar previamente a e b como variáveis recorrendo ao comando **syms**

```
>> syms a b
>> AB=[1 1 1 1;1 a -1 0;0 1-a 1 b];
>> CD=rref(AB)
CD =
     1,         0,         0, (b*a+b-1)/(a-1)
     0,         1,         0, -(-1+2*b)/(a-1)
     0,         0,         1, -b+1
```

Assim, o sistema em análise é equivalente ao sistema $\mathbf{CX} = \mathbf{D}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ab + b - a)/(a - 1) \\ -(2b - 1)/(a - 1) \\ 1 - b \end{bmatrix}$$

A natureza do sistema depende dos valores assumidos pelas expressões

$$\frac{(ab + b - a)}{a - 1} \text{ e } \frac{-(2b - 1)}{a - 1}$$

Assim:

- para $a \neq 1$, as expressões assumem valores reais e finitos, pelo que o sistema é possível e determinado;

- para $a = 1$,

se $ab + b - a = 2b - 1 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq \frac{1}{2}$ o sistema é impossível, dado que

$$\frac{(ab + b - a)}{a - 1} = \frac{(2b - 1)}{a - 1} = \pm\infty$$

se $ab + b - a = 2b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$ o sistema é possível e indeterminado, dado que

$$\frac{(ab + b - a)}{a - 1} = \frac{(2b - 1)}{a - 1} = \frac{0}{0}$$