

Módulo 03

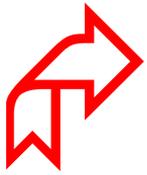
- Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.



Determinantes

[Poole 262 a 282]

Submatriz.
Menor.
Determinante de 1ª e 2ª ordem.
Cofactor.
Expansão em cofactores.
Determinante de ordem n .
Propriedades dos determinantes.
Determinante de uma matriz triangular.
Operações sobre linhas.
Método de Condensação.



Submatiz. Menor. Determinante de 1ª e 2ª ordem.

1. A **Submatriz** $p \times q$ de uma matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, é a matriz formada pelos elementos comuns a p linhas e q colunas, não necessariamente consecutivas, da matriz \mathbf{A} .

2. Dada uma matriz quadrada $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ define-se o **menor** do elemento a_{ij} , e escrevemos \mathbf{A}_{ij} , como a submatriz $(n-1) \times (n-1)$ de \mathbf{A} obtida por eliminação da i -ésima linha e da j -ésima coluna de \mathbf{A} .

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3. Dada uma matriz com um único elemento, $\mathbf{A} = [a]$, definimos o **determinante** de \mathbf{A} como

$$\det(\mathbf{A}) = a$$

Dada uma matriz quadrada 2×2 , $\mathbf{A} = (a_{ij})_{2 \times 2}$, definimos o **determinante** de \mathbf{A} como

$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



Exemplo 1.

Sejam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

o menor do elemento a_{33} é

$$\mathbf{A}_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

, e o menor do elemento a_{22} é

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz \mathbf{B} é

$$\det(\mathbf{B}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = (1 \times 3) - (4 \times 2) = -5$$



Cofactor. Determinante de ordem n . Expansão em cofactores.

4. Dada uma matriz quadrada $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ define-se o **cofactor** do elemento a_{ij} , e escrevemos \tilde{a}_{ij} , como

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$$

, ou seja, mais ou menos, conforme $i + j$ seja par ou ímpar,

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

vezes o determinante do menor do elemento a_{ij}

5. Uma matriz quadrada $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ tem um **determinante** igual à soma dos produtos dos elementos de uma qualquer linha ou coluna, pelos seus cofactores. Ou seja, o determinante de \mathbf{A} pode ser calculado em termos da **expansão em cofactores** da i -ésima linha

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij}$$

, ou da j -ésima coluna

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij}$$



Exemplo 2.

Sejam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

O cofactor do elemento a_{32} é

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{32} &= (-1)^{3+2} \det(\mathbf{A}_{32}) \\ &= (-1)^5 \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\ &= -(1 \times 5 - 2 \times 2) = -1 \end{aligned}$$

O determinante da matriz \mathbf{A} , recorrendo, por exemplo, à expansão em cofactores da 1ª linha, é

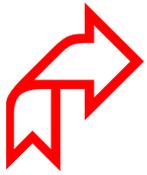
$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{j=1}^n a_{1j} \tilde{a}_{1j} = \sum_{j=1}^3 a_{1j} \tilde{a}_{1j} \\ &= a_{11} \tilde{a}_{11} + a_{12} \tilde{a}_{12} + a_{13} \tilde{a}_{13} \\ &= a_{11} (-1)^{1+1} \det(\mathbf{A}_{11}) + a_{12} (-1)^{1+2} \det(\mathbf{A}_{12}) + a_{13} (-1)^{1+3} \det(\mathbf{A}_{13}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 a_{11} (-1)^{1+1} \det(\mathbf{A}_{11}) & a_{12} (-1)^{1+2} \det(\mathbf{A}_{12}) & a_{13} (-1)^{1+3} \det(\mathbf{A}_{13}) \\
 + \begin{array}{c} \text{+} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \text{-} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \text{+} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \\
 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} & \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} & \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{A}) &= 1 \times (1) \times \det \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + 4 \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} + 2 \times (1) \times \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= -4 \times (2 \times 6 - 5 \times 7) \\
 &= 92
 \end{aligned}$$

Para a matriz \mathbf{B} , e tendo o cuidado de, na expansão em cofactores, escolher em cada passo a linha ou coluna com maior número de zeros, de modo a reduzir o esforço de cálculo, temos o determinante

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{B}) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} && \text{(Expansão em cofactores} \\
 &&& \text{da 3ª coluna.)} \\
 &= 2 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} && \text{(Expansão em cofactores} \\
 &&& \text{da 2ª linha.)} \\
 &= 2 \times 1 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} && \text{(Expansão em cofactores} \\
 &&& \text{da 2ª linha.)} \\
 &= 2 \times 1 \times 1 \times \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\
 &= 2 \times 1 \times 1 \times 3 \times 4 \\
 &= 24
 \end{aligned}$$



Propriedades dos Determinantes.

6. $\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$
7. $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$
8. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$
9. $\det(\mathbf{A}^n) = (\det(\mathbf{A}))^n$
10. $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}$
11. Note bem: em geral $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$
12. Se a matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ tem duas linhas ou duas colunas proporcionais, então $\det(\mathbf{A}) = 0$.
13. Se a matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ tem uma linha ou uma coluna de zeros, então $\det(\mathbf{A}) = 0$.
14. Uma matriz quadrada é regular **sse** $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
15. Se numa linha ou coluna da matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ cada elemento é a soma de m parcelas, então o $\det(\mathbf{A})$ é a soma dos m determinantes que se obtêm substituindo os elementos dessa linha ou coluna, sucessivamente, pelas diversas parcelas e mantendo as outras linha ou colunas inalteradas.



Exemplo 3.

- Atendendo às propriedades dos determinantes, a expressão

$$\frac{\det(\mathbf{ABA}^T)}{\det(\mathbf{A}^2\mathbf{B}^{-1})}$$

pode ser simplificada, resultando

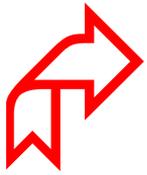
$$\begin{aligned} \frac{\det(\mathbf{ABA}^T)}{\det(\mathbf{A}^2\mathbf{B}^{-1})} &= \frac{\det(\mathbf{AB}) \det(\mathbf{A}^T)}{\det(\mathbf{A}^2) \det(\mathbf{B}^{-1})} \\ &= \frac{\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})^2 \det(\mathbf{B})^{-1}} \\ &= \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{B}) \\ &= \det(\mathbf{B})^2 \end{aligned}$$

- Atendendo às propriedades dos determinantes, sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ 2 \cos(t) - 3 \sin(t) & 2 \sin(t) + 3 \cos(t) \end{bmatrix}$$

temos

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \det \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ 2 \cos(t) - 3 \sin(t) & 2 \sin(t) + 3 \cos(t) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ 2 \cos(t) & 2 \sin(t) \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -3 \sin(t) & 3 \cos(t) \end{bmatrix} \\ &= 2 \cos(t) \sin(t) - 2 \cos(t) \sin(t) + 3 \cos^2(t) + 3 \sin^2(t) \\ &= 3 \end{aligned}$$



Determinante de uma Matriz Triangular. Operações sobre Linhas. Método de Condensação.

16. O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

17. Se a matriz \mathbf{B} se obtém da matriz \mathbf{A} trocando entre si duas linhas ou duas colunas de \mathbf{A} , então

$$\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{B})$$

18. Se a matriz \mathbf{B} se obtém da matriz \mathbf{A} multiplicando uma linha ou uma coluna de \mathbf{A} por um escalar α , então

$$\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{\alpha} \det(\mathbf{B})$$

19. Se a matriz \mathbf{B} se obtém da matriz \mathbf{A} substituindo uma linha ou uma coluna de \mathbf{A} por essa mesma linha ou coluna somada a um múltiplo escalar de uma outra linha ou coluna, então

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$$

20. Com base nas operações elementares sobre linhas, é possível transformar uma matriz, \mathbf{A} , numa matriz triangular, \mathbf{B} , cujo determinante é fácil de calcular e relacionar com o determinante de \mathbf{A} . Este método de cálculo do determinante de uma matriz é designado por **método de condensação**.



Exemplo 4.

Sejam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- O determinante da matriz \mathbf{A} , recorrendo, por exemplo, à expansão em cofactores da 3ª linha, é

$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 2 \times (1 \times 3 - 4 \times 0) = 6$$

Mais facilmente, reconhecendo que \mathbf{A} é uma matriz triangular, o cálculo do determinante é imediato a partir do produto dos elementos da diagonal principal

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 \times 3 \times 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

- O determinante da matriz \mathbf{B} , recorrendo ao método de condensação, é

$$\det(\mathbf{B}) = \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad L_4 \leftrightarrow L_1$$

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{B}) &= (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \\
 &= (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} && \begin{aligned} L_2 - 3L_1 &\rightarrow L_2 \\ L_3 - 2L_1 &\rightarrow L_3 \\ L_4 - 2L_1 &\rightarrow L_4 \end{aligned} \\
 &= (-1) \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} && L_3 \leftrightarrow L_2 \\
 &= (-1) \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} && L_4 + 2L_3 \rightarrow L_4 \\
 &= (-1) \times (-1) \times (1 \times (-3) \times (-1) \times 10) \\
 &= 30
 \end{aligned}$$



Exercícios.

1. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

, calcular o menor e o cofactor do elemento a_{12} .

Temos, por definição, que o menor do elemento a_{12} é

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

e o cofactor do elemento a_{12} é

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{12} &= (-1)^{1+2} \det(\mathbf{A}_{12}) \\ &= (-1)^3 \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \\ &= -(2 \times 6 - 3 \times 4) = 0 \end{aligned}$$

2. Calcule o determinante da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

, recorrendo à expansão em cofactores da 2ª linha e da 2ª coluna.

Temos, para a expansão em cofactores da 2ª linha,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij} = \sum_{j=1}^3 a_{2j} \tilde{a}_{2j} \\ &= a_{21} \tilde{a}_{21} + a_{22} \tilde{a}_{22} + a_{23} \tilde{a}_{23} \\ &= a_{21} (-1)^{2+1} \det(\mathbf{A}_{21}) + a_{22} (-1)^{2+2} \det(\mathbf{A}_{22}) + a_{23} (-1)^{2+3} \det(\mathbf{A}_{23}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a_{21} (-1)^{2+1} \det(\mathbf{A}_{21}) && a_{22} (-1)^{2+2} \det(\mathbf{A}_{22}) && a_{23} (-1)^{2+3} \det(\mathbf{A}_{23}) \\ \mathbf{A} = &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} && \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} && \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= 2 \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} + 0 + 3 \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -2 \times (6 - 2) - 3 \times (1 - 4) \\ &= 1\end{aligned}$$

, e para a expansão em cofactores da 2ª coluna,

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij} = \sum_{i=1}^3 a_{i2} \tilde{a}_{i2} \\ &= a_{12} \tilde{a}_{12} + a_{22} \tilde{a}_{22} + a_{32} \tilde{a}_{32} \\ &= a_{12} (-1)^{1+2} \det(\mathbf{A}_{12}) + a_{22} (-1)^{2+2} \det(\mathbf{A}_{22}) + a_{32} (-1)^{3+2} \det(\mathbf{A}_{32})\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} a_{12} (-1)^{1+2} \det(\mathbf{A}_{12}) & a_{22} (-1)^{2+2} \det(\mathbf{A}_{22}) & a_{32} (-1)^{3+2} \det(\mathbf{A}_{32}) \\ - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= 1 \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + 0 + 1 \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= -1 \times (12 - 12) - 1 \times (3 - 4) \\ &= 1\end{aligned}$$

Obtemos, obviamente, o mesmo valor.

3. Calcule o determinante da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

, recorrendo ao método de condensação.

Temos

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} && L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ &&& L_3 - 4L_1 \rightarrow L_3 \\ &= (-2) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} && -\frac{1}{2} L_2 \leftrightarrow L_2 \\ &= -2 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} && L_3 + 3L_2 \rightarrow L_3 \\ &= -2 \times (1 \times 1 \times (-1/2)) \\ &= 1\end{aligned}$$

4. Sendo \mathbf{A} uma matriz quadrada de ordem n tal que $a_{ij} + a_{ji} = 0$, prove que, se n for ímpar, o seu determinante é nulo.

Se $a_{ij} + a_{ji} = 0$ então a matriz é anti-simétrica, $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, pelo que, com base nas propriedades dos determinantes

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T &= -\mathbf{A} \\ \det(\mathbf{A}^T) &= \det(-\mathbf{A}) \\ \det(\mathbf{A}) &= \det((-1) \times \mathbf{A}) \\ \det(\mathbf{A}) &= (-1)^n \det(\mathbf{A}) \\ \det(\mathbf{A}) &= -\det(\mathbf{A}) \\ 2\det(\mathbf{A}) &= 0 \\ \det(\mathbf{A}) &= 0\end{aligned}$$

5. Sendo \mathbf{A} e \mathbf{B} matrizes quadradas de ordem $n = 3$, tal que $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = 4$, calcule $\det(2(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-1})^T)$.

Com base nas propriedades dos determinantes

$$\begin{aligned}\det(2(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-1})^T) &= 2^3 \det(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-1})^T \\ &= 2^3 \det(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-1}) \\ &= 2^3 \det(\mathbf{A}^T) \det(\mathbf{B}^{-1}) \\ &= 2^3 \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})^{-1} \\ &= 2^3 \frac{\det(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{B})} \\ &= 2^3\end{aligned}$$

6. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} d & g & a+2d \\ e & h & b+2e \\ f & i & c+2f \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Temos

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} d & g & a \\ e & h & b \\ f & i & c \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} d & g & a+2d \\ e & h & b+2e \\ f & i & c+2f \end{bmatrix}\end{aligned}$$



MatLab 1.

Recorrendo ao Matlab, podemos calcular o determinante de uma matriz utilizando a função **det(A)**.

1. Calcular o determinante da matriz A do exemplo 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Temos

```
>> A=[1 4 2;2 0 5;7 0 6];
>> det(A)
ans =
    92
```

2. Calcular o determinante da matriz A do exemplo 3

$$A = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ 2\cos(t) - 3\sin(t) & 2\sin(t) + 3\cos(t) \end{bmatrix}$$

Temos

```
>> syms t
>> A=[cos(t) sin(t); 2*cos(t)-3*sin(t) 2*sin(t)+3*cos(t)];
>> d=det(A)
d =
3*cos(t)^2+3*sin(t)^2
>> d=simplify(d)
d =
3
```

3. Em MatLab o determinante de uma matriz é calculado a partir da matriz triangular superior. Não existem em MatLab funções predefinidas para determinar um menor, um cofactor, ou fazer a expansão em cofactores e calcular o determinante por este método. Dada a complexidade do algoritmo de cálculo de um determinante por expansão em cofactores, é prematura a sua apresentação neste momento. Voltaremos à questão mais tarde. O cálculo de um menor ou de um cofactor é trivial: calcular o menor do elemento a_{32} da matriz A do exemplo 2, A_{32} ,

```
>> A=[1 4 2;2 0 5;7 0 6];
>> [m n]=size(A);
>> i=3; j=2;
>> M=A([1:i-1 i+1:m],[1:j-1 j+1:n])
M =
    1    2
    2    5
```

, e o respectivo cofactor, $\tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2} \det(A_{32})$,

```
>> c=(-1)^(i+j)*det(M)
c =
   -1
```