

Módulo 04

• Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

• Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.



Vectores em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3

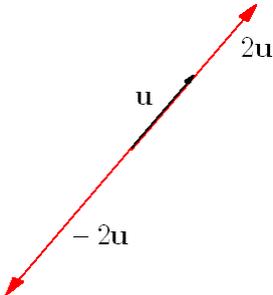
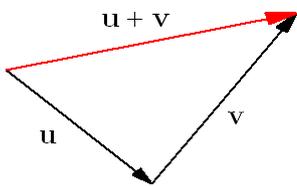
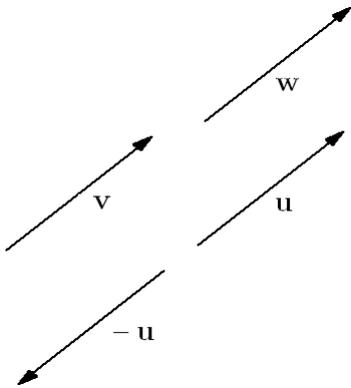
[Poole 003 a 028]

- Vectorios livres.
 - Segmento orientado. Origem e extremidade.
 - Vectorios iguais.
 - Vector simétrico.
 - Soma de vectorios.
 - Propriedades.
 - Vector nulo.
 - Produto de um escalar por um vector.
 - Propriedades.
 - Norma.
 - Vector unitário.
 - Ângulo de dois vectorios.
 - Vectorios ortogonais.
 - Produto interno.
 - Projecção ortogonal.
- Vectorios em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .
 - Referencial ortonormado.
 - Componentes e coordenadas de um vector.
 - Soma de vectorios.
 - Produto de um escalar por um vector.
 - Notação matricial.
 - Norma.
 - Produto interno.
 - Vectorios ortogonais.
 - Produto externo.
 - Propriedades.
 - Produto misto.
 - Interpretação geométrica.



Vectores Livres.

(Revisão do 10º e 11º ano.)



1. Um **vector**, u , é definido por uma **direcção**, um **sentido**, e um **comprimento**, e representa-se geometricamente no plano, R^2 , ou no espaço, R^3 , por um **segmento orientado**, que corresponde a um **deslocamento** de um ponto para outro.

A ponta da seta do vector é chamada ponto final, **extremidade**, ou afixo, e o outro ponto extremo é chamado ponto inicial ou **origem** do vector.

Segmentos orientados com a mesma direcção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento representam o mesmo vector, ou seja, são considerados como **vectores iguais**

$$u = v = w$$

2. O **vector simétrico** de um vector u é o vector que tem o mesmo comprimento, a mesma direcção, e sentido oposto ao de u , e representa-se por $-u$.

3. A **soma de dois vectores**, u e v , é o vector $u + v$ que une a origem de u à extremidade de v quando se faz coincidir a origem de v com a extremidade de u .

4. Propriedades da soma de vectores

$$u + v = v + u \quad (\text{comutativa})$$

$$(u + v) + w = u + (v + w) \quad (\text{associativa})$$

$$u + 0 = 0 + u = u \quad (\text{elemento neutro})$$

$$u + (-u) = 0 \quad (\text{todos os vectores têm simétrico})$$

5. Um vector com comprimento zero, tendo direcção e sentido indeterminados, chama-se **vector nulo**, e representa-se por 0 .

$$u + (-u) = 0$$

6. O **produto de um escalar**, α , **por um vector**, u , é o vector αu tal que:

Se $\alpha = 0$, αu é o vector nulo.

Se $\alpha \neq 0$, αu tem:

- comprimento igual a $|\alpha|$ vezes o comprimento de u ;
- a direcção de u ;
- o sentido de u se $\alpha > 0$ e contrário ao de u se $\alpha < 0$.

7. Propriedades do produto de um escalar por um vector.

$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$$

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \quad (\text{distributiva})$$

$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \quad (\text{distributiva})$$

8. O comprimento de um vector, u , é definido como sendo o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam, e é designado por **norma** do vector, usando-se a notação $\|u\|$.

9. Um vector de norma igual a 1 é chamado **vector unitário** ou **versor**. Dado um vector não nulo, u , o vector

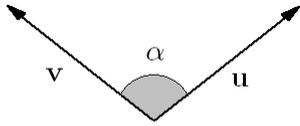
$$e = \frac{u}{\|u\|}$$

é o vector unitário com a direcção e sentido de u . A operação de divisão de um vector u pela sua norma é designada por **normalização do vector** u .



Vectores Livres.

(Revisão do 10º e 11º ano.)



10. Chama-se **ângulo de dois vectores**, α , ao menor ângulo formado por dois segmentos orientados, com a mesma origem, que representem os vectores, $0 \leq \alpha \leq \pi$.

11. Quando o ângulo entre dois vectores é recto, $\alpha = \pi/2$, dizemos que os dois vectores são **vectores ortogonais** (ou vectores perpendiculares entre si).

12. O **produto interno** (ou produto escalar) de dois vectores , $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, é um número real dado por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\alpha)$$

em que α é o ângulo entre os dois vectores.

13. O **ângulo de dois vectores** pode ser calculado a partir do produto interno

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}\right)$$

14. Resulta da definição de produto interno entre vectores que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \vee \mathbf{v} = \mathbf{0} \vee \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v} \text{ são ortogonais.}$$

(Dois vectores não nulos são ortogonais sse $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha < \pi/2$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0 \Leftrightarrow \pi/2 < \alpha \leq \pi$$

15. Propriedades do produto interno

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{comutativa})$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \quad (\text{distributiva})$$

$$\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v})$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$$

16. Dados dois vectores, \mathbf{u} e \mathbf{v} , podemos sempre decompor o vector \mathbf{u} na soma de dois vectores, \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 ,

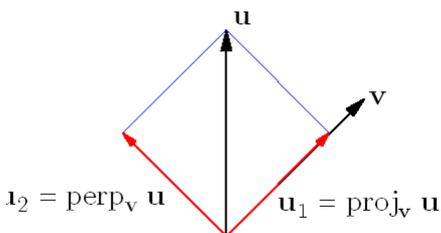
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

, tendo \mathbf{u}_1 a direcção de \mathbf{v} e sendo \mathbf{u}_2 perpendicular a \mathbf{v} . O vector \mathbf{u}_1 é chamado **projectão ortogonal de \mathbf{u} sobre \mathbf{v}** , $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$, sendo

$$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

, e sendo a componente perpendicular

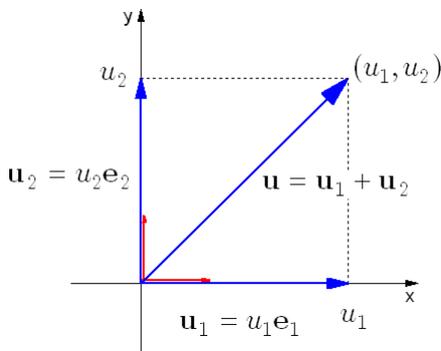
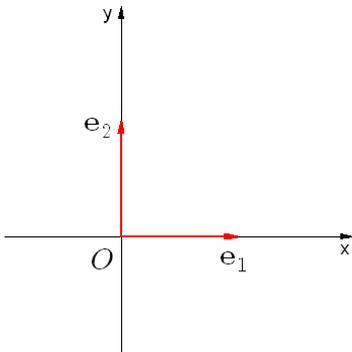
$$\text{perp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$





Vectores num referencial cartesiano em \mathbb{R}^2 .

(Revisão do 10º e 11º ano.)



17. Um **par ordenado** de vectores com direcções diferentes, (e_1, e_2) , diz-se uma **base** de vectores em \mathbb{R}^2 .

18. Uma **base ortonormada** é uma base em que os vectores e_1 e e_2 têm comprimento 1 e são perpendiculares.

19. A **base canónica** de \mathbb{R}^2 , (e_1, e_2) , é um **referencial ortonormado**, ou **cartesiano**, em que se escolheu uma base ortonormada de vectores com as direcções e sentidos dos eixos coordenados.

20. As **componentes** do vector u numa base (e_1, e_2) são dois vectores, u_1 e u_2 , que têm, respectivamente, a direcção de e_1 e e_2 , e cuja soma é igual a u

$$u = u_1 + u_2$$

21. As **coordenadas** do vector u numa base (e_1, e_2) são os números reais, u_1 e u_2 , que devemos multiplicar por e_1 e e_2 para obtermos as componentes de u

$$u = u_1e_1 + u_2e_2$$

Tendo o vector o seu ponto inicial na origem do referencial, $O = (0,0)$, as coordenadas do vector são coincidentes com as coordenadas do ponto onde o vector tem o seu afixo (u_1, u_2) , ou seja, o conjunto de todos os pontos do plano corresponde ao conjunto de todos os vectores cujo ponto inicial é a origem do referencial, O , pelo que também é usada a notação

$$u = (u_1, u_2)$$

Temos portanto, para os versores da base canónica,

$$e_1 = 1e_1 + 0e_2$$

$$= (1, 0)$$

$$e_2 = 0e_1 + 1e_2$$

$$= (0, 1)$$

É também usual designar u_1 e u_2 como as **componentes do vector segundo** e_1 e e_2 , respectivamente.

22. O vector **soma de dois vectores**, $u = u_1e_1 + u_2e_2$ e $v = v_1e_1 + v_2e_2$, é o vector $w = u + v$ de coordenadas $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, ou seja, resultante da soma ordenada das componentes segundo cada um dos versores

$$w = u + v$$

$$= (u_1e_1 + u_2e_2) + (v_1e_1 + v_2e_2)$$

$$= (u_1 + v_1)e_1 + (u_2 + v_2)e_2$$

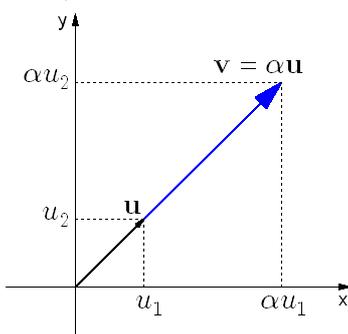
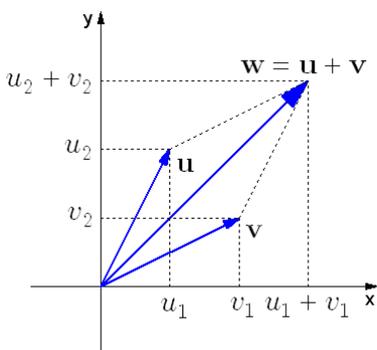
$$= w_1e_1 + w_2e_2$$

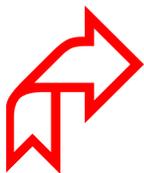
23. O **produto de um real α por um vector u** é o vector $v = \alpha u$ de coordenadas $(\alpha u_1, \alpha u_2)$, ou seja, resultante do produto do escalar pelas componentes segundo cada um dos versores

$$v = \alpha u$$

$$= \alpha(u_1e_1 + u_2e_2) = \alpha u_1e_1 + \alpha u_2e_2$$

$$= v_1e_1 + v_2e_2$$





Notação Matricial.

24. Um vector pode ser escrito em **notação matricial** como uma matriz linha, ou **vector linha**, ou uma matriz coluna, ou **vector coluna**.

Em \mathbb{R}^2 , alternativamente à notação

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$$

, \mathbf{u} pode ser escrito na forma da matriz linha

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2]$$

Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ &= u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 \\ &= [u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = [u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [u_1 \quad u_2] \end{aligned}$$

Alternativamente, \mathbf{u} pode ser escrito na forma da matriz coluna

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ &= u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

25. Utilizando a notação matricial, as operações de soma entre vectores e produto de um vector por um escalar são idênticas às definidas para as matrizes. Por exemplo, em \mathbb{R}^2 , sendo $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ &= (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

, ou, matricialmente

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

, e

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u} = \alpha u_1\mathbf{e}_1 + \alpha u_2\mathbf{e}_2$$

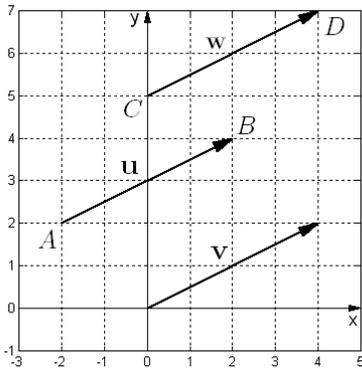
, ou, matricialmente

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{bmatrix}$$



Exemplo 1.

1. O vector que tem origem no ponto $A = (-2, 2)$ e extremidade no ponto $B = (2, 4)$, $\mathbf{u} = \overline{AB}$, é igual ao vector na posição canónica (com ponto inicial na origem do referencial)



$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{B} - \mathbf{A} \\ &= (2, 4) - (-2, 2) \\ &= (2 + 2, 4 - 2) \\ &= (4, 2) \end{aligned}$$

, ou ainda, igual ao vector $\mathbf{w} = \overline{CD}$ com origem no ponto $C = (0, 5)$ e extremidade no ponto

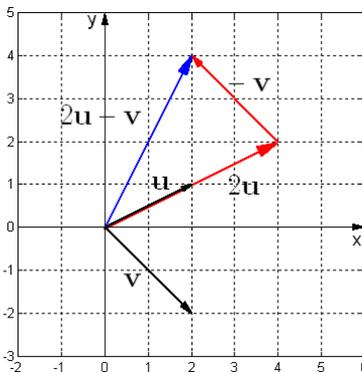
$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{C} + \mathbf{v} \\ &= (0, 5) + (4, 2) \\ &= (0 + 4, 5 + 2) \\ &= (4, 7) \end{aligned}$$

, ou seja, $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{w} = (4, 2) = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

2. Dados os vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, o vector $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= 2\mathbf{u} - \mathbf{v} \\ &= 2(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - (2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) \\ &= 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \\ &= 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

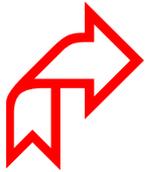
, ou, $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v} = 2(2, 1) - (2, -2) = (4, 2) - (2, -2) = (2, 4)$.



Recorrendo ao MatLab teríamos (por economia de escrita utilizaremos a notação de vector linha):

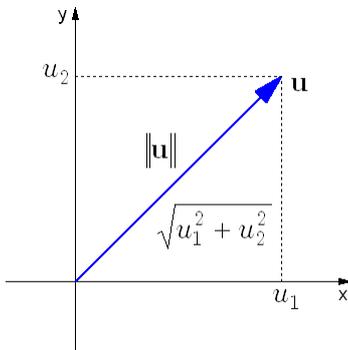
```
>> u=[2 1];
>> v=[2 -2];
>> w=2*u-v
w =
     2     4
```

, ou seja, $\mathbf{w} = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$



Vectores num referencial cartesiano em \mathbb{R}^2 .

(Revisão do 10º e 11º ano.)



26. A **norma** do vector \mathbf{u} , com base nas suas coordenadas, é dada por

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

27. O **produto interno** pode ser calculado a partir das coordenadas dos vectores, correspondendo à soma do produto ordenado das componentes de cada um dos vectores segundo cada um dos versores

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

28. Em \mathbb{R}^2 , dois vectores não nulos são **vectores ortogonais** sse $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, ou seja

$$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$$

29. Para vectores coluna, a **notação matricial do produto interno** resulta

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

, e para vectores linha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \mathbf{v}^T$$

Por exemplo, em \mathbb{R}^2 , sendo $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$, temos, considerando vectores linha,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \mathbf{v}^T = [u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2$$

, e, considerando vectores coluna

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2$$



Exemplo 2.

3. O vector $\mathbf{u} = 6\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ tem norma

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$$

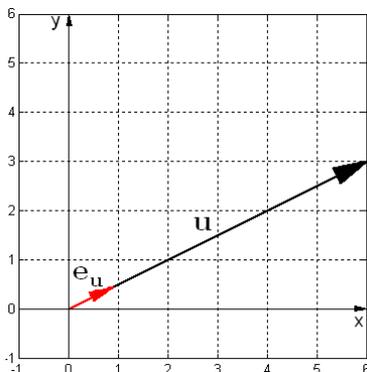
, ou seja, tem um comprimento igual a $\sqrt{45}$

, e tem versor

$$\mathbf{e}_u = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{6\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2}{\sqrt{45}} = \frac{6}{\sqrt{45}}\mathbf{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{45}}\mathbf{e}_2$$

, ou seja, \mathbf{u} pode ser expresso apenas em função do versor \mathbf{e}_u

$$\mathbf{u} = 6\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 = \sqrt{45} \mathbf{e}_u$$



Recorrendo ao MatLab teríamos (note bem: por economia de notação, sempre que as componentes do vector sejam reais, podemos utilizar o operador \cdot (transconjugado) em vez do operador devido \cdot' (transposto):

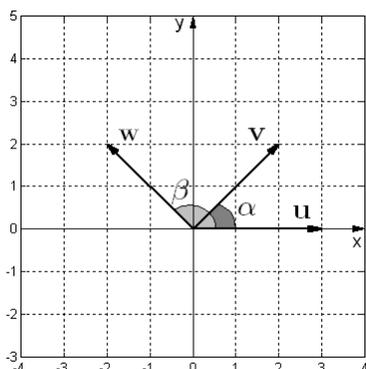
```
>> nu=sqrt(u*u.')
```

```

nu =
    6.7082
, ou seja,  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{45}$ 
>> eu=u/nu
eu =
    0.8944    0.4472
, ou seja  $\mathbf{e}_u = \frac{6}{\sqrt{45}}\mathbf{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{45}}\mathbf{e}_2$ . Podemos verificar que  $\mathbf{e}_u$  tem norma
unitária
>> eu*eu'
ans =
    1.0000
    
```

4. O produto interno entre os vector $\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, sendo o produto ordenado das componentes de cada um dos vectores segundo cada um dos versores, é

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 \\ &= (3 \times 2) + (0 \times 2) \\ &= 6 \end{aligned}$$



Dado que o ângulo entre os vectores é $0 \leq \alpha < \pi/2$, o produto interno entre eles é positivo.

Obteríamos o mesmo resultado tendo em atenção que, sendo, por inspecção da figura, $\alpha = \pi/4$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\alpha) \\ &= 3 \times \sqrt{2^2 + 2^2} \cos(\pi/4) \\ &= 3\sqrt{8} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$



Recorrendo ao MatLab teríamos:

```

>> u=[3 0];
>> v=[2 2];
>> u*v'
ans =
    6
, ou seja  $\mathbf{uv}^T = 6$ 
    
```

5. Desconhecendo o ângulo entre dois vectores, podemos calculá-lo com base no produto interno e na norma dos vectores

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right) = \arccos\left(\frac{6}{3\sqrt{8}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Aliás, tendo em atenção que a norma de um vector pode ser calculada com base no produto interno,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$$

, podemos reconhecer que o ângulo entre dois vectores pode ser calculado com base em produtos internos

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}}\right)$$



Recorrendo ao MatLab teríamos:

```
>> nu=sqrt(u*u');
>> nv=sqrt(v*v');
>> alfa=acos((u*v')/(nu*nv))
alfa =
    0.7854
```

, ou seja, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

```
>> alfa/pi
ans =
    0.2500
```

6. O produto interno entre os vector $\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w} = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ é

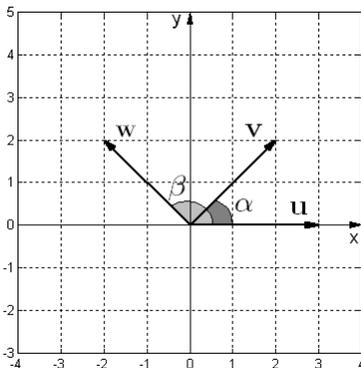
$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1w_1 + u_2w_2 \\ &= (3 \times (-2)) + (0 \times 2) \\ &= -6\end{aligned}$$

Dado que o ângulo entre os vectores é $\pi/2 < \beta \leq \pi$, o produto interno entre eles é negativo.

O produto interno entre os vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w} = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ é

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= v_1w_1 + v_2w_2 \\ &= (2 \times (-2)) + (2 \times 2) \\ &= 0\end{aligned}$$

Sendo os vectores ortogonais, o produto interno entre eles é nulo.



Recorrendo ao MatLab teríamos:

```
>> v=[2 2];
>> w=[-2 2];
>> v*w'
ans =
    0
```

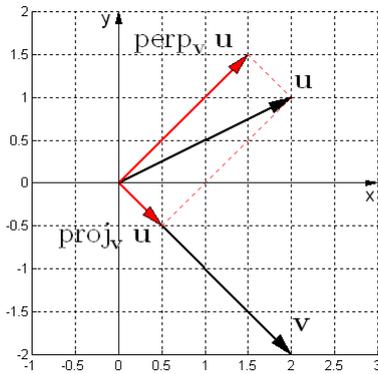
, ou seja, $\mathbf{vw}^T = 0$

7. Dados os vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, a projecção ortogonal de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} é

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \\ &= \frac{(2 \times 2) + (1 \times (-2))}{(2 \times 2) + ((-2) \times (-2))} (2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) \\ &= \frac{2}{8} (2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) \\ &= 0.5\mathbf{e}_1 - 0.5\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

, sendo a componente perpendicular

$$\begin{aligned} \text{perp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \\ &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - (0.5\mathbf{e}_1 - 0.5\mathbf{e}_2) \\ &= 1.5\mathbf{e}_1 + 1.5\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$



Recorrendo ao MatLab teríamos:

```
>> u=[2 1];
>> v=[2 -2];
>> u1=(u*v')/(v*v')*v
u1 =
    0.5000   -0.5000
```

ou seja, $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}\mathbf{v}^T} \mathbf{v} = 0.5\mathbf{e}_1 - 0.5\mathbf{e}_2$

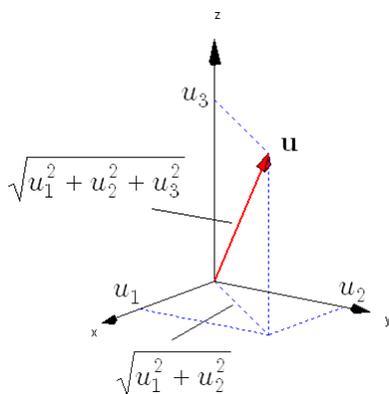
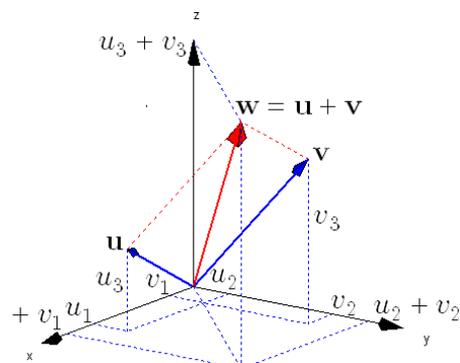
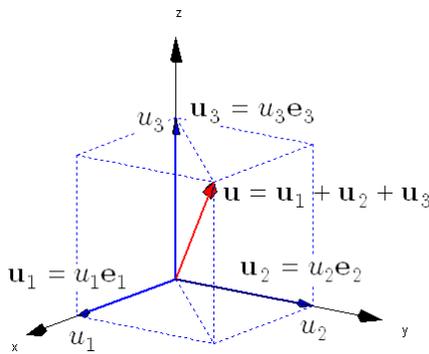
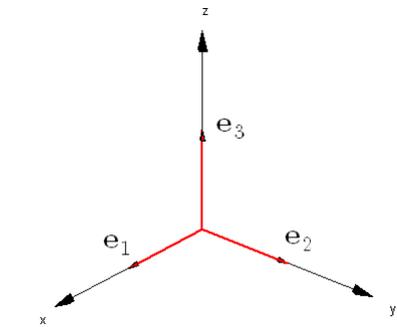
```
>> u2=u-u1
u2 =
    1.5000    1.5000
```

, ou seja, $\text{perp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = 1.5\mathbf{e}_1 + 1.5\mathbf{e}_2$



Vectores num referencial cartesiano em \mathbb{R}^3 .

(Revisão do 10º e 11º ano.)



30. Um **terno ordenado** de vectores, (e_1, e_2, e_3) , não coplanares e com direcções diferentes diz-se uma **base** de vectores em \mathbb{R}^3 .

31. Uma **base ortonormada** em \mathbb{R}^3 é uma base em que os vectores e_1, e_2 e e_3 têm norma 1 e são perpendiculares dois a dois.

32. Um **referencial ortonormado** em \mathbb{R}^3 , (e_1, e_2, e_3) é um referencial ortogonal e monométrico em que se escolheu uma base ortonormada de vectores com as direcções e sentidos dos eixos coordenados.

33. As **componentes** do vector u numa base (e_1, e_2, e_3) são três vectores, u_1, u_2 e u_3 , que têm, respectivamente, as direcções de e_1, e_2 e e_3 , e cuja soma é igual a u

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

34. As **coordenadas** do vector u numa base (e_1, e_2, e_3) são os números reais, u_1, u_2 e u_3 , que devemos multiplicar por e_1, e_2 e e_3 para obtermos as componentes de u

$$u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$$

À semelhança de \mathbb{R}^2 , é também usual a notação

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

, e a designação de u_1, u_2 e u_3 como as **componentes do vector segundo** cada um dos respectivos versores e_1, e_2, e_3 .

35. O vector **soma de dois vectores**, $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ e $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, é o vector $w = u + v$ de coordenadas $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

$$w = u + v$$

$$= (u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3) + (v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3)$$

$$= (u_1 + v_1)e_1 + (u_2 + v_2)e_2 + (u_3 + v_3)e_3$$

$$= w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3$$

36. O **produto de um real α por um vector u** é o vector $v = \alpha u$ de coordenadas $(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$

$$v = \alpha u$$

$$= \alpha(u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3)$$

$$= \alpha u_1e_1 + \alpha u_2e_2 + \alpha u_3e_3$$

$$= v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$$

37. A **norma** do vector u , com base nas suas coordenadas, é dada por

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

38. O **produto interno** pode ser calculado a partir das coordenadas dos vectores num referencial ortonormado em \mathbb{R}^3

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

39. Em \mathbb{R}^3 , dois vectores não nulos são **vectores ortogonais** sse $u \cdot v = 0$

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$$



Exemplo 3.

1. Dados os vetores $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 0.5\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = 0.5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, o vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ é

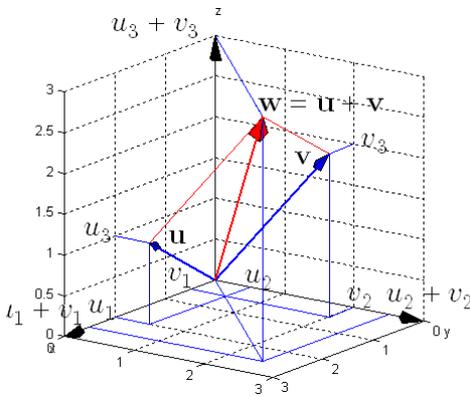
$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ &= (2\mathbf{e}_1 + 0.5\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3) + (0.5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \\ &= 2.5\mathbf{e}_1 + 2.5\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

O vector \mathbf{u} tem norma

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{2^2 + 0.5^2 + 1^2} \approx 2.29$$

O produto interno entre os vector \mathbf{u} e \mathbf{v} , é

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \\ &= (2 \times 0.5) + (0.5 \times 2) + (1 \times 2) \\ &= 4\end{aligned}$$



Recorrendo ao MatLab teríamos:

```
>> u=[2 0.5 1];
>> v=[0.5 2 2];
>> w=u+v
w =
    2.5000    2.5000    3.0000
ou seja,  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = 2.5\mathbf{e}_1 + 2.5\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ 
>> sqrt(u*u')
ans =
    2.2913
ou seja,  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\mathbf{u}^T} \approx 2.29$ 
>> u*v'
ans =
    4
 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4$ 
```

2. Sendo o produto interno entre \mathbf{u} e \mathbf{v} positivo, o ângulo entre os vectores é $0 \leq \alpha < \pi/2$

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{(2^2 + 0.5^2 + 1)(0.5^2 + 2^2 + 2^2)}}\right) \\ &\approx 0.92 \ (\approx 0.58\pi/2 \approx 52.6^\circ)\end{aligned}$$



Recorrendo ao MatLab teríamos:

```
>> alfa=acos(u*v'/sqrt((u*u')*(v*v')))
alfa =
    0.9175
```

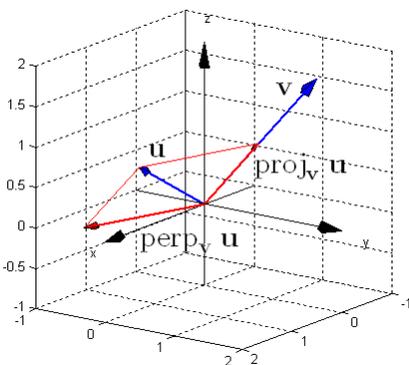
ou seja, $\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{\sqrt{(\mathbf{u}\mathbf{u}^T)(\mathbf{v}\mathbf{v}^T)}}\right) \approx 0.92 (\approx 0.58\pi/2 \approx 52.6^\circ)$

3. A projecção ortogonal de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} é

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \\ &= \frac{4}{8.25} (0.5 \mathbf{e}_1 + 2 \mathbf{e}_2 + 2 \mathbf{e}_3) \\ &\approx 0.24 \mathbf{e}_1 + 0.97 \mathbf{e}_2 + 0.97 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

, sendo a componente perpendicular

$$\begin{aligned} \text{perp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \\ &\approx 1.76 \mathbf{e}_1 - 0.47 \mathbf{e}_2 + 0.03 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$



Recorrendo ao MatLab teríamos:

```
>> u1=(u*v')/(v*v')*v
u1 =
    0.2424    0.9697    0.9697
```

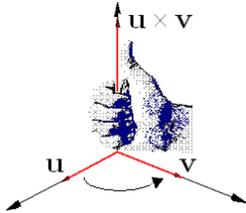
ou seja, $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}\mathbf{v}^T} \mathbf{v} \approx 0.24 \mathbf{e}_1 + 0.97 \mathbf{e}_2 + 0.97 \mathbf{e}_3$

```
>> u2=u-u1
u2 =
    1.7576   -0.4697    0.0303
```

ou seja $\text{perp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \approx 1.76 \mathbf{e}_1 - 0.47 \mathbf{e}_2 + 0.03 \mathbf{e}_3$



Produto Externo e Produto Misto de Vectors em \mathbb{R}^3 .



40. O **produto externo** (ou produto vectorial) de dois vectores , $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, é um vector com as seguintes características

- Tem módulo

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\text{sen}(\alpha)$$

, sendo α é o ângulo entre os dois vectores.

- Tem direcção perpendicular a \mathbf{u} e a \mathbf{v} .

- Tem sentido dado pela regra da mão direita (ou do saca rolhas).

41. Propriedades do produto externo

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ (anti-comutativo)

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} = k\mathbf{v}$ (vectores paralelos)

- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

- $\alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\alpha\mathbf{v})$

- $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$

- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

42. Dados dois vectores em \mathbb{R}^3 , $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, o produto externo entre eles pode ser calculado através do determinante simbólico

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} \mathbf{e}_1 + \det \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{bmatrix} \mathbf{e}_2 + \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \mathbf{e}_3 \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 + (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

43. A norma de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$,

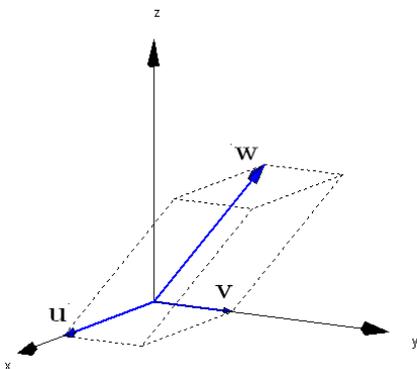
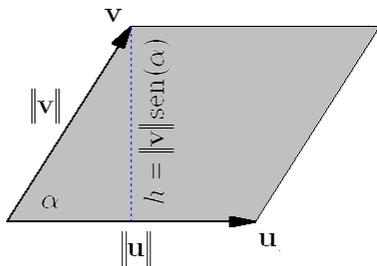
$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\text{sen}(\alpha)$$

, é numericamente igual à área do paralelogramo determinado por \mathbf{u} e \mathbf{v} .

44. Dados três vectores em \mathbb{R}^3 , $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, e $\mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3$ o **produto misto** $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ pode ser calculado através do determinante

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

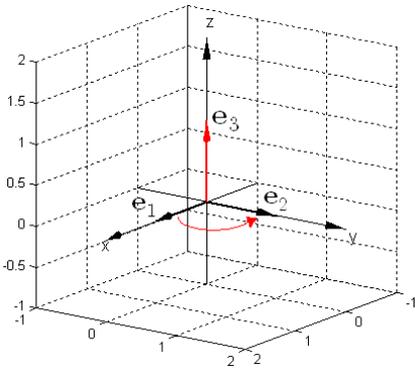
45. O volume de um paralelepípedo determinado por três vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} , é numericamente igual ao valor absoluto do produto misto destes vectores, $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$.





Exemplo 4.

1. O produto externo entre os versores e_1 e e_2 , é

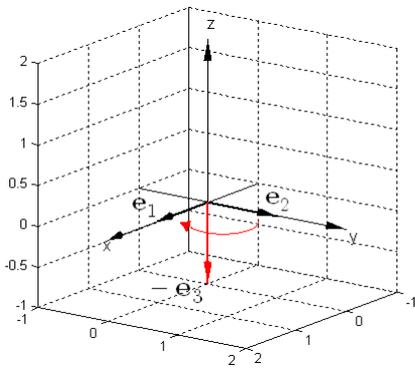


$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

O produto externo entre os versores e_2 e e_1 , é

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

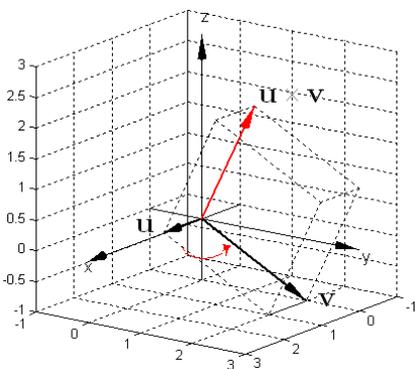
O produto externo entre os vectores $\mathbf{u} = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = 0\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 1\mathbf{e}_3$, é



$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\ &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

O volume do paralelepípedo determinado por \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} , é

$$\begin{aligned} V &= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \\ &= 5 \end{aligned}$$



Em MatLab, o produto externo entre os vectores \mathbf{u} e \mathbf{v} , $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, pode ser calculado através da função **cross(u,v)**. O produto externo entre os versores e_1 e e_2 , é

```
>> cross(e1,e2)
ans =
     0     0     1
, ou seja,  $e_1 \times e_2 = e_3$ 
>> cross(e2,e1)
ans =
     0     0    -1
, ou seja,  $e_2 \times e_1 = -e_3$ 
>> u=[1 0 0];
>> v=[0 2 -1];
>> w=cross(u,v)
```

```
w =  
      0      1      2  
, ou seja,  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$   
>> u*cross(v,w) '  
ans =  
      5  
, ou seja,  $V = \mathbf{u}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})^T = 5$ 
```