

Módulo 05

• Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

• Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.



Vectores em \mathbb{R}^n

[Poole 003 a 028 ; 090 a 101 ; 189 a 209]

Vectores iguais.
Soma de vectores.
Produto de um escalar por um vector.
Vector nulo.
Vector simétrico.
Propriedades algébricas.
Produto interno.
 Propriedades.
Norma.
Ângulo entre dois vectores.
Distância.
Desigualdade de Cauchy-Schwartz.
Desigualdade triangular.
Espaço euclidiano.
Combinação linear.
Independência linear.
Vectores ortogonais.
Projectção ortogonal.
Subespaço.
Base.
Dimensão.
Base ortogonal e ortonormada.
Mudança de base.



Vectores Iguais. Soma de Vectores. Produto de um Escalar por um Vector. Vector Nulo. Vector Simétrico. Propriedades da Soma e do Produto por um Escalar.

1. Sendo n um inteiro positivo, define-se o **espaço \mathbb{R}^n** como o conjunto de todas as sequências ordenadas de n números reais, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, (ditas n -uplos).

2. Tal como em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , os elementos de \mathbb{R}^n podem ser interpretados como pontos, ou como vectores, num espaço n -dimensional.

3. Em \mathbb{R}^n , dois **vectores**, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, são **iguais** se, ordenadamente, cada uma das suas coordenadas é igual

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$$

4. O vector **soma de dois vectores**, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, é o vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ cujas coordenadas são a soma ordenada das coordenadas dos vectores \mathbf{u} e \mathbf{v}

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

5. O **produto de um real α por um vector \mathbf{u}** é o vector

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n)$$

, dizendo-se que \mathbf{v} é um múltiplo escalar de \mathbf{u} .

6. Um vector de \mathbb{R}^n pode ser escrito em **notação matricial** como uma matriz linha (ou **vector linha**) ou uma matriz coluna (ou vector **coluna**). Temos assim que

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

pode ser escrito na forma da matriz linha

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]$$

ou na forma da matriz coluna

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

7. Utilizando a notação matricial as operações vectoriais de soma e produto por um escalar são idênticas às definidas para as matrizes

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

, e

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} = \alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n \end{bmatrix}$$

8. O **vector nulo** é representado por $\mathbf{0}$ e define-se como

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$$

9. Sendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ um vector de \mathbb{R}^n , o **vector simétrico** de \mathbf{u} , representa-se por $-\mathbf{u}$, e é definido por

$$-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$$

10. As propriedades da soma de vectores e do produto de um vector por um escalar são idênticas às conhecidas para vectores livres. Sendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dois vectores em \mathbb{R}^n , e α e β dois escalares, temos

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{0}) = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$



Exemplo 1.

1. \mathbb{R}^1 é o conjunto de todos os números reais que representamos sobre um eixo orientado \mathbf{x} . \mathbb{R}^2 é o conjunto de todos os pares ordenados de números reais, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, que usualmente representamos geometricamente no plano 2D recorrendo a um sistema de eixos cartesianos \mathbf{xy} . \mathbb{R}^3 é o conjunto de todos os ternos ordenados de números reais, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, que usualmente representamos geometricamente no espaço 3D recorrendo a um sistema de eixos cartesianos \mathbf{xyz} . $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \mathbb{R}^6, \dots, \mathbb{R}^n$, é o conjunto de todos os quádruplos, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, quintuplos, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, sêxtuplos, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, n-uplos, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que não podemos representar geometricamente, mas que podemos continuar a pensar como pontos, ou vectores, de um espaço 4D, 5D, 6D, ..., nD.

2. Dados os vectores de \mathbb{R}^4 , $\mathbf{u} = (1, -2, 3, 1)$ e $\mathbf{v} = (3, 1, -1, 0)$ o vector $\mathbf{w} = 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} \\ &= 3 \times (1, -2, 3, 1) - 2 \times (3, 1, -1, 0) \\ &= (3, -6, 9, 3) - (6, 2, -2, 0) \\ &= (-3, -8, 11, 3) \end{aligned}$$

, ou, em notação matricial,

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 \\ -8 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Recorrendo ao MatLab teríamos (por economia de escrita utilizaremos a notação de vector linha):

```
>> u=[1 -2 3 1];
>> v=[3 1 -1 0];
>> w=3*u-2*v
w =
    -3    -8    11     3
```



Produto Interno. Norma. Desigualdade de Cauchy-Schwartz e Triangular. Ângulo. Distância. Propriedades. Espaço Euclidiano.

11. Sendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dois vectores em \mathbb{R}^n , definimos o **produto interno** entre os dois vectores como a soma do produto ordenado das coordenadas de cada um dos vectores

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n \\ &= \sum_{i=1}^n u_i v_i\end{aligned}$$

12. Para vectores coluna a **notação matricial** do produto interno resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u}^T \mathbf{v} \\ &= [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n\end{aligned}$$

, e para vectores linha

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u} \mathbf{v}^T \\ &= [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n\end{aligned}$$

13. Propriedades do produto interno: Sendo \mathbf{u} , \mathbf{v} , e \mathbf{w} vectores de \mathbb{R}^n , e α um escalar, então

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} && \text{(comutativa)} \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} && \text{(distributiva)} \\ \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= (\alpha \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\alpha \mathbf{v}) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &\geq 0 \text{ e } \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ sse } \mathbf{u} = 0\end{aligned}$$

14. Define-se a **norma** do vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, como

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$$

15. Propriedades da norma: Sendo \mathbf{u} e \mathbf{v} vectores de \mathbb{R}^n , e α um escalar, então

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\| &\geq 0 \text{ e } \|\mathbf{u}\| = 0 \text{ sse } \mathbf{u} = 0 \\ \|\alpha \mathbf{u}\| &= |\alpha| \|\mathbf{u}\| \\ |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| &\leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad \text{(desigualdade de Cauchy-Schwarz)} \\ \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| &\leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \text{(desigualdade triangular)}\end{aligned}$$

16. Sendo \mathbf{u} e \mathbf{v} vectores de \mathbb{R}^n , o **ângulo** entre eles é

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right)$$

17. A distância entre dois pontos, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, também dita a **distância entre vectores** cuja extremidade corresponde a estes dois pontos, é igual à norma do vector entre eles

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \end{aligned}$$

18. Propriedades da distância: Sendo \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} pontos de \mathbb{R}^n

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \quad (\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \text{ sse } \mathbf{x} = \mathbf{y})$$

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \text{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \text{ (desigualdade triangular)}$$

19. Assim definido, o produto interno é também designado por produto interno euclidiano, e as resultantes definições de norma e distância, norma euclidiana e **distância euclidiana**. O espaço \mathbb{R}^n com as operações de adição, produto por escalar e produto interno como atrás definido é designado por **espaço euclidiano**, ou espaço com métrica euclidiana.



Exemplo 2.

1. O vector $\mathbf{u} = (1, -2, -3, 4)$ tem norma

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{30} \end{aligned}$$



Recorrendo ao MatLab:

```
>> u=[1 -2 -3 4];
>> nu=sqrt(u*u')
nu =
    5.4772
```

2. O produto interno entre os vectores $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$, sendo o produto ordenado das coordenadas de cada um dos vectores, é

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 \\ &= (2 \times -1) + (0 \times 2) + (-1 \times 0) + (0 \times 0) \\ &= -2 \end{aligned}$$



Recorrendo ao MatLab:

```
>> u1=[2 0 -1 0];
>> u2=[-1 2 0 0];
>> u1*u2'
```

$$\begin{aligned} \text{ans} &= \\ &-2 \end{aligned}$$

3. O ângulo entre os vectores $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$ é

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos\left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_1\| \|\mathbf{u}_2\|}\right) = \arccos\left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\sqrt{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2)}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{((2, 0, -1, 0) \cdot (2, 0, -1, 0))((-1, 2, 0, 0) \cdot (-1, 2, 0, 0))}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{(4+0+1+0)(1+4+0+0)}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{5 \times 5}}\right) = \arccos\left(\frac{-2}{5}\right) = \arccos(-0.4) \\ &\approx 1.98 \end{aligned}$$



Recorrendo ao MatLab:

```
>> u1=[2 0 -1 0];
>> u2=[-1 2 0 0];
>> alfa=acos((u1*u2')/sqrt((u1*u1')*(u2*u2')))
alfa =
    1.9823
```

4. A distância entre os vectores $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$ é

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\| \\ &= \sqrt{(2 - (-1))^2 + (0 - 2)^2 + (-1 - 0)^2 + (0 - 0)^2} \\ &= \sqrt{9 + 4 + 1 + 0} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$



Recorrendo ao MatLab:

```
>> u1=[2 0 -1 0];
>> u2=[-1 2 0 0];
>> u=(u1-u2);
>> d=sqrt(u*u')
d =
    3.7417
```



Combinação Linear. Independência Linear.

20. Diz-se que o vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ é uma **combinação linear** dos vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r \in \mathbb{R}^n$, se existirem escalares k_1, k_2, \dots, k_r , designados por coeficientes da combinação linear, tais que

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \dots + k_r\mathbf{u}_r \\ &= \sum_{i=1}^r k_i\mathbf{u}_i\end{aligned}$$

21. Dizemos que um conjunto de vectores de \mathbb{R}^n , $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ é **linearmente independente** se a equação

$$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \dots + k_r\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$$

só possui a solução trivial

$$k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$$

Caso contrário, isto é, se a equação possui solução não trivial, dizemos que o conjunto S é linearmente dependente.

22. Um conjunto de vectores de \mathbb{R}^n , $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$, é linearmente independente sse nenhum dos vectores é uma combinação linear de outro(s), e é linearmente dependente sse um deles é combinação linear de outro(s).



Exemplo 3.

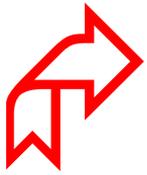
1. O vector de \mathbb{R}^4 , $\mathbf{u} = (1, -2, -3, 4)$ é uma combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, -1, 2)$ e $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 0, -1)$, dado que existem escalares, $k_1 = 2, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -2$, tais que

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \sum_{i=1}^4 k_i\mathbf{u}_i \\ &= k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - 2\mathbf{u}_4 \\ &= 2 \times (2, 0, -1, 0) - (-1, 2, 0, 0) + (0, 0, -1, 2) - 2(2, 0, 0, -1) \\ &= (4, 0, -2, 0) + (1, -2, 0, 0) + (0, 0, -1, 2) + (-4, 0, 0, 2) \\ &= (1, -2, -3, 4)\end{aligned}$$

2. O conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$, com $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, -1, 2)$ e $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 0, -1)$, é linearmente independente dado que

$$\begin{aligned}k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4 &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow k_1(2, 0, -1, 0) + k_2(-1, 2, 0, 0) + k_3(0, 0, -1, 2) + k_4(2, 0, 0, -1) &= 0 \\ \Rightarrow (2k_1, 0, -k_1, 0) + (-k_2, 2k_2, 0, 0) + (0, 0, -k_3, 2k_3) + (2k_4, 0, 0, -k_4) &= 0 \\ \Rightarrow (2k_1 - k_2 + 2k_4, 2k_2, -k_1 - k_3, 2k_3 - k_4) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} 2k_1 - k_2 + 2k_4 = 0 \\ 2k_2 = 0 \\ -k_1 - k_3 = 0 \\ 2k_3 - k_4 = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema podemos verificar que só existe a solução trivial $k_1 = 0 \wedge k_2 = 0 \wedge k_3 = 0 \wedge k_4 = 0$.



Vectores Ortogonais. Projecção Ortogonal.

23. Dois vectores \mathbf{u} e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, não nulos, são **vectores ortogonais** sse

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

24. Se \mathbf{u} e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais então

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \quad (\text{teorema de Pitágoras})$$

25. Sendo \mathbf{u} e \mathbf{v} (não nulo) $\in \mathbb{R}^n$, podemos sempre decompor o vector \mathbf{u} na soma de dois vectores, \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

, tendo \mathbf{u}_1 a direcção de \mathbf{v} e sendo \mathbf{u}_2 ortogonal a \mathbf{v} . O vector \mathbf{u}_1 é chamado **projecção ortogonal de \mathbf{u} sobre \mathbf{v}** , $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$, sendo

$$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

, e sendo a componente ortogonal

$$\text{perp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

26. Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r \in \mathbb{R}^n$ são vectores ortogonais, isto é, $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ para $i \neq j$, então o conjunto $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$ é linearmente independente, e, para todo o vector \mathbf{u} tal que

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^r k_i \mathbf{u}_i, \text{ temos}$$

$$k_i = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|^2} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}$$

, ou seja,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^r k_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^r \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^r \text{proj}_{\mathbf{u}_i} \mathbf{u}$$



Exemplo 4.

1. Os vectores $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, -2)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 0, 1)$ são ortogonais. Adoptando a notação matricial temos (usando vectores coluna)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_2 \\ &= [0 \ 1 \ 0 \ -2] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 + 2 + 0 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$



Recorrendo ao MatLab:

```
>> u1=[0 1 0 -2];
```

```
>> u2=[0 2 0 1];
>> u1*u2'
ans =
    0
```

2. Sendo os vectores $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, -2)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 0, 1)$ ortogonais, podemos verificar o teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\|^2 &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \\ &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)^T (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \\ &= [0+0 \quad 1+2 \quad 0+0 \quad -2+1] \begin{bmatrix} 0+0 \\ 1+2 \\ 0+0 \\ -2+1 \end{bmatrix} \\ &= 0+9+0+1 \\ &= 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 &= (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2) \\ &= (\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1) + (\mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2) \\ &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad -2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + [0 \quad 2 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (0+1+0+4) + (0+4+0+1) \\ &= 10\end{aligned}$$



Recorrendo ao MatLab:

```
>> u1=[0 1 0 -2];
>> u2=[0 2 0 1];
>> (u1+u2)*(u1+u2)'
ans =
    10
>> u1*u1'+u2*u2'
ans =
    10
```

3. A projecção ortogonal do vector $\mathbf{u} = (3, -3, 4, -4)$ sobre o vector $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, -2)$ é

$$\text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1$$

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u} &= \frac{[3 \ -3 \ 4 \ -4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{0 - 3 + 0 + 8}{0 + 1 + 0 + 4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O vector $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}$ é ortogonal a \mathbf{u}_1 . Temos

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}_1 &= (\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u})^T \mathbf{u}_1 \\ &= [3 \ -4 \ 4 \ -2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= 0 - 4 + 0 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$



Recorrendo ao MatLab:

```
>> u=[3 -3 4 -4];
u1=[0 1 0 -2];
proju1=(u*u1')/(u1*u1')*u1
proju1 =
     0     1     0    -2
>> (u-proju1)*u1'
ans =
     0
```



Subespaço. Subespaço Gerado. Base. Dimensão.

27. Sendo \mathbb{W} um subconjunto não vazio de \mathbb{R}^n , dizemos que \mathbb{W} é um **subespaço** de \mathbb{R}^n se

1. Se u e v pertencem a \mathbb{W} então $u+v$ também pertence a \mathbb{W} .

2. Se u pertence a \mathbb{W} então αu também pertence a \mathbb{W} , para todo o escalar α .

28. Sendo \mathbb{W} um subespaço de \mathbb{R}^n , dizemos que os vectores $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathbb{W}$ **geram** \mathbb{W} , ou que $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ é um conjunto de geradores de \mathbb{W} , se qualquer vector de \mathbb{W} é uma combinação linear de u_1, u_2, \dots, u_k . Dizemos também que \mathbb{W} é o **subespaço gerado** por u_1, u_2, \dots, u_k , e escrevemos $\mathbb{W} = L(u_1, u_2, \dots, u_k)$.

29. Sendo \mathbb{W} um subespaço de \mathbb{R}^n , dizemos que o conjunto de vectores $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \in \mathbb{W}$ é uma **base** de \mathbb{W} se é um conjunto de geradores de \mathbb{W} e é linearmente independente.

30. Sendo \mathbb{W} um subespaço de \mathbb{R}^n , e $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ uma base de \mathbb{W} , todas as bases de \mathbb{W} têm o mesmo número k de elementos, chamada a **dimensão** de \mathbb{W} , $\dim(\mathbb{W})$. Qualquer conjunto de k vectores linearmente independentes pertencentes a \mathbb{W} é uma base de \mathbb{W} , e qualquer conjunto de mais de k vectores é linearmente dependente.



Exemplo 5.

1. \mathbb{R}^2 não é um subespaço de \mathbb{R}^3 , dado que \mathbb{R}^2 é o conjunto de pares ordenados, e portando não é um subconjunto de \mathbb{R}^3 , que é o conjunto de ternos ordenados de números reais. No entanto o plano $\mathbb{W} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ é um subespaço de \mathbb{R}^3 .

2. O subespaço de \mathbb{R}^4 gerado pelo conjunto de vectores $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, com $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ é coincidente com \mathbb{R}^4 . Escrevendo um qualquer vector $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ como uma combinação linear de e_1, e_2, e_3 e e_4 , temos

$$u = k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 + k_4 e_4$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

A resolução do sistema é imediata, dado que a matriz já está na forma escalonada reduzida. Concluímos que o sistema é sempre possível e determinado para qualquer valor de x_1, x_2, x_3 e x_4 . Assim, o subespaço gerado por e_1, e_2, e_3 e e_4 é constituído por todos os vectores $u = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ sem restrições, ou seja, é coincidente com \mathbb{R}^4

$$\mathbb{W} = L((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)) = \mathbb{R}^4$$

Para além de gerar \mathbb{R}^4 , o conjunto de vectores $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é linearmente independente, dado que a equação $k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 + k_4e_4 = \mathbf{0}$ só possui a solução trivial $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$. Temos

$$k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 + k_4e_4 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é sempre possível, admitindo apenas a solução trivial $[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, logo os vectores são linearmente independentes.

Dado que geram \mathbb{R}^4 e são linearmente independentes, os vectores $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ são uma base de \mathbb{R}^4 .

Todas as bases de \mathbb{R}^4 têm 4 vectores, ou seja, \mathbb{R}^4 tem dimensão 4, $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Qualquer conjunto de 4 vectores linearmente independentes pertencentes a \mathbb{R}^4 é uma base de \mathbb{R}^4 , e qualquer conjunto de mais de 4 vectores é linearmente dependente. Os vectores e_1, e_2, e_3 e e_4 são a chamada base canónica de \mathbb{R}^4 .

3. Os vectores $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, geram \mathbb{R}^2 e são linearmente independentes. Formam a chamada base canónica de \mathbb{R}^2 . Os vectores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ geram \mathbb{R}^3 e são linearmente independentes. Formam a chamada base canónica de \mathbb{R}^3 . Os vectores $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ geram \mathbb{R}^n e são linearmente independentes. Formam a chamada base canónica de \mathbb{R}^n .



Base Ortogonal e Base Ortonormada.

31. Sendo $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ uma base dum subespaço de \mathbb{R}^n dizemos que S é uma **base ortogonal** se $u_i \cdot u_j = 0$ para $i \neq j$, ou seja, se os vectores da base são ortogonais.

32. Sendo $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ uma base dum subespaço de \mathbb{R}^n dizemos que S é uma **base ortonormada** se, para além de ser uma base ortogonal, $\|u_i\| = 1$ para $i = 1, \dots, k$



Exemplo 6.

1. A base canónica de \mathbb{R}^4 $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, com $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ é uma base ortonormada, dado que todos os vectores da base têm norma unitária e são ortogonais

$$\begin{aligned}
 B^T B &= \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} [e_1 \mid e_2 \mid e_3 \mid e_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e_1^T e_1 & e_1^T e_2 & e_1^T e_3 & e_1^T e_4 \\ e_2^T e_1 & e_2^T e_2 & e_2^T e_3 & e_2^T e_4 \\ e_3^T e_1 & e_3^T e_2 & e_3^T e_3 & e_3^T e_4 \\ e_4^T e_1 & e_4^T e_2 & e_4^T e_3 & e_4^T e_4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \|e_1\|^2 & e_1 \cdot e_2 & e_1 \cdot e_3 & e_1 \cdot e_4 \\ e_1 \cdot e_2 & \|e_2\|^2 & e_2 \cdot e_3 & e_2 \cdot e_4 \\ e_1 \cdot e_3 & e_2 \cdot e_3 & \|e_3\|^2 & e_3 \cdot e_4 \\ e_1 \cdot e_4 & e_2 \cdot e_4 & e_3 \cdot e_4 & \|e_4\|^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Os vectores $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ geram \mathbb{R}^n , são linearmente independentes, têm todos norma unitária, e são ortogonais. São uma base ortonormada de \mathbb{R}^n , chamada base canónica \mathbb{R}^n .



Mudança de Base.

33. Sendo $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ duas bases dum subespaço de \mathbb{R}^n , um qualquer vector do subespaço, v , expresso na base \mathcal{U} e na base \mathcal{W} , respectivamente,

$$v = u_1 u_1 + u_2 u_2 + \dots + u_k u_k$$

e

$$v = w_1 w_1 + w_2 w_2 + \dots + w_k w_k$$

tem coordenadas em cada uma das bases, $[v]_{\mathcal{U}} = [u_1, u_2, \dots, u_k]^T$ e $[v]_{\mathcal{W}} = [w_1, w_2, \dots, w_k]^T$ relacionadas por uma matriz quadrada regular, $M = (m_{ij})_{k \times k}$, chamada **matriz de mudança de base**,

$$[v]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{U}} [v]_{\mathcal{W}}$$

$$[v]_{\mathcal{W}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{W}} [v]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{U}}^{-1} [v]_{\mathcal{U}}$$

A matriz de transição da base \mathcal{W} para a base \mathcal{U} é dada por

$$M_{\mathcal{W}\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} [w_1]_{\mathcal{U}} & [w_2]_{\mathcal{U}} & \dots & [w_k]_{\mathcal{U}} \end{bmatrix}$$

em que $[w_i]_{\mathcal{U}}$ é o vector coluna das coordenadas do vector w_i na base \mathcal{U} .



Exemplo 7.

1. Sejam em \mathbb{R}^2 a base canónica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ e a base $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$, com $w_1 = 3e_1 + 2e_2$ e $w_2 = e_1 - e_2$, e seja o vector $v = w_1 + w_2$.

Consideremos o problema de, sendo conhecida a representação de v na base \mathcal{W} , encontrar a representação de v na base \mathcal{E}

$$[v]_{\mathcal{W}} \rightarrow [v]_{\mathcal{E}}$$

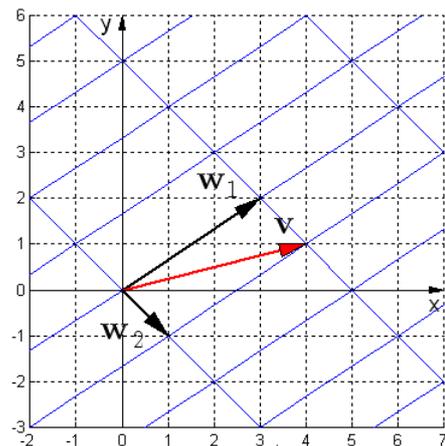
Dado que

$$\begin{aligned} w_1 &= 3e_1 + 2e_2 \\ &= [e_1 \quad e_2] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} w_2 &= e_1 - e_2 \\ &= [e_1 \quad e_2] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

resulta



$$\begin{aligned} v &= w_1 + w_2 \\ &= [e_1 \quad e_2] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + [e_1 \quad e_2] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= [e_1 \quad e_2] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4e_1 + e_2 \end{aligned}$$

, que é a resposta procurada (que podemos verificar na figura).

De outro modo, poderíamos ter em atenção que, sendo

$$\mathbf{w}_1 = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{w}_2 = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

então

$$[\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2] = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \\ &= [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Ou ainda, atendendo ao conceito de matriz de mudança de base, sendo conhecido $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, e $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, temos simplesmente

$$\begin{aligned} [v]_{\mathcal{E}} &= M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} [w_1]_{\mathcal{E}} & [w_2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} [v]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Exercícios.

VERIFICAR SE UM CONJUNTO DE VECTORES É ORTOGONAL.

1. Mostrar que os vectores $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, -2)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, 0, 2, 0)$ e $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 1, 0)$ são ortogonais, isto é, $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ para $i \neq j$.

Um modo prático de verificar que todos os produtos internos cruzados são nulos, consiste em dispor os vectores na forma de uma matriz e multiplicá-la pela sua transposta. Seja a matriz cujas colunas correspondem a cada um dos vectores

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_3 \mid \mathbf{u}_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A sua transposta é uma matriz em que cada um dos vectores está disposto segundo as linhas da matriz

$$\mathbf{U}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Atendendo à definição de produto matricial e de produto interno

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_3 \mid \mathbf{u}_4] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_4^T \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_4^T \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_4^T \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4^T \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

,e ainda, atendendo a que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$, concluímos que a matriz resultante é uma matriz simétrica, tendo as normas dos vectores na sua diagonal, e os produtos internos cruzados quer acima quer abaixo da diagonal.

Se a matriz resultante, como é o caso, for uma matriz diagonal, concluímos que os vectores são ortogonais.

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}_1\|^2 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \|\mathbf{u}_2\|^2 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 & \|\mathbf{u}_3\|^2 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_4 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_4 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_4 & \|\mathbf{u}_4\|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$



Recorrendo ao MatLab:

```
>> u1=[0 1 0 -2]';
>> u2=[0 2 0 1]';
>> u3=[-1 0 2 0]';
>> u4=[2 0 1 0]';
>> U=[u1 u2 u3 u4];
>> U'*U
ans =
     5     0     0     0
     0     5     0     0
     0     0     5     0
     0     0     0     5
```

VERIFICAR SE UM VECTOR É UMA COMBINAÇÃO LINEAR DE UM CONJUNTO DE VECTORES.

2. Dado o vector $\mathbf{u} = (3, -3, 4, -4)$ e os vectores ortogonais $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, -2)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, 0, 2, 0)$ e $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 1, 0)$, podemos verificar que, sendo

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 k_i \mathbf{u}_i$$

, temos

$$k_i = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|^2} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}$$

Atendendo ao exemplo anterior temos $\|\mathbf{u}_1\|^2 = \|\mathbf{u}_2\|^2 = \|\mathbf{u}_3\|^2 = \|\mathbf{u}_4\|^2 = 5$, pelo que, adoptando a notação matricial

$$\begin{aligned} [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] &= \frac{1}{\|\mathbf{u}_i\|^2} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{k} &= \frac{1}{\|\mathbf{u}_i\|^2} \mathbf{u}^T [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_3 \mid \mathbf{u}_4] \\ \mathbf{k} &= \frac{1}{5} [3 \quad -3 \quad 4 \quad -4] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad -2 \quad 1 \quad 2] \end{aligned}$$

ou seja

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4$$



Recorrendo ao MatLab:

```
>> u=[3 -3 4 -4]';
>> u1=[0 1 0 -2]';
>> u2=[0 2 0 1]';
>> u3=[-1 0 2 0]';
>> u4=[2 0 1 0]';
>> U=[u1 u2 u3 u4];
>> nui=diag(U'*U)';
>> k=u'*U./nui
k =
     1     -2     1     2
```

Mais facilmente, podemos ter em atenção que, se \mathbf{u} é uma combinação linear dos vectores \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 e \mathbf{u}_4 , então

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4 \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & | & \mathbf{u}_2 & | & \mathbf{u}_3 & | & \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema



Recorrendo ao MatLab:

```
>> A=[u1 u2 u3 u4];
>> B=[3 -3 4 -4]';
>> rref([A B])
ans =
     1     0     0     0     1
     0     1     0     0    -2
     0     0     1     0     1
     0     0     0     1     2
```

O sistema é possível e determinado, tendo como solução $[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]^T = [1 \ -2 \ 1 \ 2]^T$.
Ou seja

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4$$

3. Mostrar que o vector $\mathbf{u} = (7, 2, -1, -4)$ é uma combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, -1, 2)$ e $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 0, -1)$.

Se \mathbf{u} é uma combinação linear dos vectores \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 e \mathbf{u}_4 , então

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

é um sistema de equações possível. Resolvendo o sistema



Recorrendo ao MatLab:

```
>> A=[2 0 -1 0;-1 2 0 0;0 0 -1 2;2 0 0 -1]';
>> B=[7 2 -1 -4]';
>> rref([A B])
ans =
     1     0     0     0     2
     0     1     0     0     1
     0     0     1     0    -1
     0     0     0     1     2
```

O sistema é possível, tendo como solução $[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]^T = [2 \ 1 \ -1 \ 2]^T$. Ou seja

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4$$

4. Mostrar que o vector $\mathbf{u} = (2, 4, 1)$ não é uma combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -1)$, e $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1)$.

Se \mathbf{u} é uma combinação linear dos vectores \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 e \mathbf{u}_4 , então

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

é um sistema de equações possível. Resolvendo o sistema



Recorrendo ao MatLab:

```
>> A=[1 0 1;2 1 0;-1 -1 1];
>> B=[2 4 1]';
>> rref([A B])
ans =
```

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

concluimos que o sistema é impossível, logo \mathbf{u} não é uma combinação linear dos vectores \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , e \mathbf{u}_3 .

VERIFICAR SE UM CONJUNTO DE VECTORES É LINEARMENTE INDEPENDENTE.

5. Mostrar que os vectores $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, -2)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, 0, 2, 0)$ e $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 1, 0)$ são linearmente independentes, ou seja, a equação $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$ só possui a solução trivial.

Recorrendo à notação matricial

$$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \dots + k_r\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$$

$$\left[\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_3 \mid \mathbf{u}_4 \right] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

, concluimos que verificar que a equação $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$ só possui a solução trivial é equivalente a verificar que o sistema homogéneo $\mathbf{U}\mathbf{k} = \mathbf{0}$ só admite solução trivial. Recorrendo ao método de Gauss-Jordan podemos concluir que

$$\left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

e portanto os vectores são linearmente independentes.



Recorrendo ao MatLab:

```
>> A=[2 0 -1 0;-1 2 0 0;0 0 -1 2;2 0 0 -1]';
>> B=[0 0 0 0]';
>> rref([A B])
ans =
     1     0     0     0     0
     0     1     0     0     0
     0     0     1     0     0
     0     0     0     1     0
```

6. Mostrar que o conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$, com $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, -1, 2)$ e $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 0, -1)$, é linearmente independente.

Os vectores são linearmente independentes se a equação $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$ só possui a solução trivial $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = \mathbf{0}$. Assim

$$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Recorrendo ao MatLab:

```
>> A=[2 0 -1 0;-1 2 0 0;0 0 -1 2;2 0 0 -1]';
>> B=[0 0 0 0]';
>> rref([A B])
ans =
     1     0     0     0     0
     0     1     0     0     0
     0     0     1     0     0
     0     0     0     1     0
```

O sistema é possível, admitindo apenas a solução trivial $[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, logo os vectores são linearmente independentes.

7. Mostrar que o conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, com $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -1)$, e $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1)$, não é linearmente independente.

Os vectores são linearmente independentes se a equação $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$ só possui a solução trivial $k_1 = k_2 = k_3 = \mathbf{0}$. Assim

$$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Recorrendo ao MatLab:

```
>> A=[1 0 1;2 1 0;-1 -1 1];
>> B=[0 0 0]';
>> rref([A B])
ans =
     1     0     1     0
     0     1    -2     0
     0     0     0     0
```

O sistema é possível mas é indeterminado (admitindo um número infinito de soluções para além da solução trivial) logo os vectores não são linearmente independentes.

DETERMINAR O SUBESPAÇO GERADO POR UM CONJUNTO DE VECTORES.

8. Determinar o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado pelo conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, com $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -1)$, e $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1)$.

\mathbb{W} é o subespaço gerado por $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, $\mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, se qualquer vector de \mathbb{W} , \mathbf{u} , é uma combinação linear de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$

$$\mathbf{u} = k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 + k_3 \mathbf{u}_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, recorrendo ao método de Gauss-Jordan, resulta

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & 0 & x_2 \\ -1 & -1 & 1 & x_3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -2 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & -1 & 2 & x_3 + x_1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 + 1L_1 \rightarrow L_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -2 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 + x_2 \end{bmatrix} \quad L_3 + 1L_2 \rightarrow L_3$$

Não é necessário continuar o processo de escalonamento da matriz. Neste momento é já possível concluir que, para que o sistema seja possível (ou seja, qualquer vector de \mathbb{W} seja uma combinação linear de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$), deverá ser

$$x_3 - x_1 + x_2 = 0$$

Recordando os conceitos apresentados sobre o estudo da natureza de sistemas lineares, concluímos que o sistema é possível e indeterminado, sendo x_1 e x_2 variáveis principais e x_3 uma variável livre, sendo

$$x_1 - x_2 = x_3$$

Assim, o subespaço gerado por $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ é constituído por todos os vectores $\mathbf{u} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ tais que $x_1 - x_2 = x_3$

$$\mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1 - x_2\}$$



Nota 1: Veremos mais tarde, após a apresentação dos conceitos geometria analítica, que o subespaço corresponde a um plano em \mathbb{R}^3 .



Nota 2: Sempre que o sistema em análise não seja possível e determinado, a análise do problema com recurso ao MatLab requer o acesso passo a passo ao processo de escalonamento da matriz completa. Veremos mais tarde como tal poderá ser feito

```
>> syms x1 x2 x3
>> A=[1 0 1;2 1 0;-1 -1 1];
>> B=[x1 x2 x3].';
>> escalonar([A B])
[ 1, 0, 1, x1]
[ 2, 1, 0, x2]
[ -1, -1, 1, x3]
Passo 1:
(-2)*L1 + L2 => L2
(1)*L1 + L3 => L3
[ 1, 0, 1, x1]
[ 0, 1, -2, x2-2*x1]
[ 0, -1, 2, x3+x1]
Passo 2:
(1)*L2 + L3 => L3
[ 1, 0, 1, x1]
[ 0, 1, -2, x2-2*x1]
[ 0, 0, 0, x3-x1+x2]
```

9. Determinar o subespaço de \mathbb{R}^4 gerado pelo conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$, com $\mathbf{u}_1 = (2, 0, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, -1, 2)$ e $\mathbf{u}_4 = (2, 0, 0, -1)$.

\mathbb{W} é o subespaço gerado por $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$, $\mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$, se qualquer vector de \mathbb{W} , \mathbf{u} , é uma combinação linear de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{u}_4$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema,



Recorrendo ao MatLab:

```
>> syms x1 x2 x3 x4
>> A=[2 0 -1 0;-1 2 0 0;0 0 -1 2;2 0 0 -1]';
>> B=[x1 x2 x3 x4].';
>> rref([A B])
```

$$\begin{aligned} \text{ans} = & \\ & [1, 0, 0, 0, -1/2*x1-1/4*x2-x4-2*x3] \\ & [0, 1, 0, 0, 1/2*x2] \\ & [0, 0, 1, 0, x3+1/2*x1+1/4*x2+x4] \\ & [0, 0, 0, 1, x4+2*x3+x1+1/2*x2] \end{aligned}$$

, concluímos que o sistema é possível e determinado para qualquer valor de x_1, x_2, x_3 e x_4 . Assim, o subespaço gerado por $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ é constituído por todos os vectores $\mathbf{u} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ sem restrições, ou seja, é coincidente com \mathbb{R}^4

$$\mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = \mathbb{R}^4$$

DETERMINAR UMA BASE DE UM SUBESPAÇO.

10. Determinar uma base do subespaço de \mathbb{R}^4

$$\mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x - y + 2z = 0) \wedge (w - x - z = 0) \right\}$$

Uma vez que qualquer conjunto de k vectores linearmente independentes pertencentes a \mathbb{W} é uma base de \mathbb{W} , sendo k a dimensão do subespaço, a solução particular encontrada depende do método utilizado na sua determinação.

Dadas as restrições impostas, temos o sistemas de equações

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ w - x - z = 0 \end{cases}$$

Fazendo

$$\begin{cases} y = x + 2z \\ w = x + z \end{cases}$$

, o que corresponde a considerar x e z como variáveis livres, e y e w como variáveis principais, resulta que os vectores $\mathbf{u} = (x, y, z, w)$ pertencentes ao subespaço são da forma

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x + 2z \\ z \\ x + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2z \\ z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, são uma combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1)$ e $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 1, 1)$. Dado que \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 são linearmente independentes fica assim determinada uma base de \mathbb{W} .

Se analisarmos formalmente o sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ w - x - z = 0 \end{cases}$$

, ou seja, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Recorrendo ao MatLab:

```
>> A=[1 -1 2 0;-1 0 -1 1];
>> B=[0 0]';
>> rref([A B])
ans =
     1     0     1    -1     0
     0     1    -1    -1     0
```

, concluímos que o sistema é possível e indeterminado, sendo x e y variáveis principais e z e w variáveis livres, as soluções do sistema são da forma

$$\begin{cases} x = w - z \\ y = w + z \end{cases}$$

ou seja

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w - z \\ w + z \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ w \\ 0 \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são portanto uma combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = (1,1,0,1)$ e $\mathbf{u}_3 = (-1,1,0,1)$. Dado que \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_3 são linearmente independentes, fica assim determinada uma outra base de \mathbb{W} . Note-se que $\mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_2$. O subespaço \mathbb{W} tem dimensão 2; quaisquer 2 vectores linearmente independentes resultantes de uma combinação linear dos vectores \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 é uma base de \mathbb{W} .

REPRESENTAR UM VECTOR EM BASES DIFERENTES.

11. Vimos no exemplo 7.1 que dados, em \mathbb{R}^2 , a base canónica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ e a base $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, com $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, sendo conhecida a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{W} , $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, podemos encontrar a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{E}

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$$

, atendendo ao conceito de matriz de transição,

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} &= M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{w}_1]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{w}_2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Caso fossem conhecidos $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, e a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{E} , $\mathbf{v} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, e se pretendesse encontrar a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{W}

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}}$$

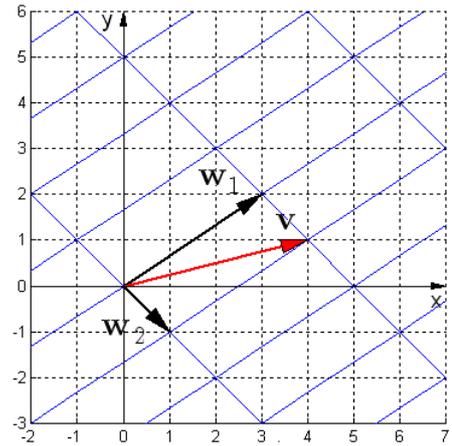
, deveríamos ter em atenção que

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{E}}^{-1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$$

logo

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou seja $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$.



12. Sejam em \mathbb{R}^2 a base canónica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ e a base $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, com $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, e seja o vector $\mathbf{v} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$

Consideremos o problema de, sendo conhecida a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{E} , encontrar a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{U}

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

Sendo conhecida a matriz de transição da base \mathcal{U} para a base \mathcal{E}

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{U}\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

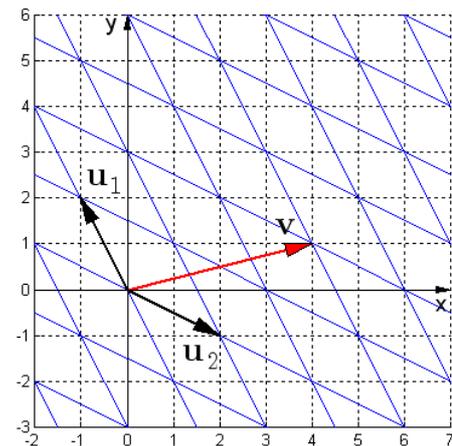
, e dado que

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{U}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1}$$

temos

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

, ou seja, $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$.



13. Sejam em \mathbb{R}^2 a base $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, com $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, e a base $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, com $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, sendo conhecida a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{W} , $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, pretendemos encontrar a representação de \mathbf{v} na base \mathcal{U} .

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

Com os dados do problema, é fácil determinar as matrizes de transição das base \mathcal{W} e \mathcal{U} para a base canónica

$$M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{U}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Pelo que, considerando a representação intermédia de \mathbf{v} na base canónica

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

, sendo

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}}$$

e

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{U}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$$

resulta

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

, ou seja, $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$.



Recorrendo ao MatLab:

```
>> u1=[-1 2]';
>> u2=[2 -1]';
>> w1=[3 2]';
>> w2=[1 -1]';
>> Mwe=[w1 w2];
>> Mue=[u1 u2];
>> vw=[1 1]';
>> vu=inv(Mue)*Mwe*vw
vu =
    2.0000
    3.0000
```