

- Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

Módulo 06



Transformações Lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$

[Poole 209 a 223]

Transformações lineares.
 Matriz da transformação.
 Transformações lineares elementares em $\mathbb{R}^2$
 Projecção ortogonal.
 Reflexão.
 Rotação.
 Expansão.
 Contração.
 Transformações lineares elementares em $\mathbb{R}^3$
 Projecção ortogonal.
 Reflexão.
 Rotação.
 Expansão.
 Contração.
 Composição de transformações lineares.
 Transformação linear inversa.
 Transformações afins
 Translação
 Matriz de rotação sobre um eixo arbitrário.



Transformação Linear. Matriz da Transformação.

1. Uma função $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma **transformação linear** (ou uma função linear) se

$$1. T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$$

$$2. T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

, ou seja,

$$T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$$

, para todos os $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e todos os escalares α e β .

2. Sendo $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times n$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, a transformação matricial $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

é uma transformação linear.

3. Sendo $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear e $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$, existe uma (e só uma) matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ tal que

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

, chamada **matriz (canónica) da transformação**, dada por $\mathbf{A} = [T(\mathbf{e}_1) : T(\mathbf{e}_2) : \dots : T(\mathbf{e}_n)]$, em que $T(\mathbf{e}_j)$ são matrizes coluna, resultantes da aplicação da transformação T a cada um dos versores da base canónica de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{e}_j$.



Exemplo 1.

1. A transformação $\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$ é uma transformação linear, dado que $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e todos os escalares α e β .

$$\begin{aligned} T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) &= \mathbf{A}(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\alpha \mathbf{u}) + \mathbf{A}(\beta \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{u}) + \beta(\mathbf{A}\mathbf{v}) \\ &= \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Por exemplo, sendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha = -1$ e $\beta = 4$, temos

$$\begin{aligned} T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) &= \mathbf{A}(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \left(-1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 \\ 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) &= \alpha \mathbf{A}\mathbf{u} + \beta \mathbf{A}\mathbf{v} = -1 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -1 \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ 24 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 \\ 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Seja $w = f(x_1, x_2)$ uma função de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que

$$w_1 = x_1$$

$$w_2 = 2x_1 - x_2$$

$$w_3 = 3x_1 + 4x_2$$

Adoptando a notação matricial, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

e ainda

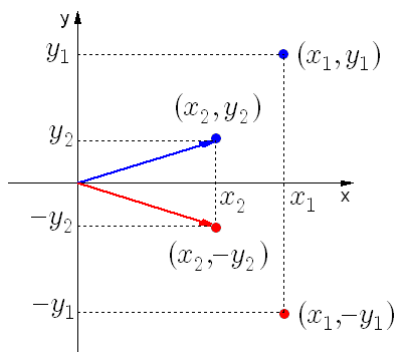
$$w = Ax$$

A função $w = f(x_1, x_2)$ considerada, sendo uma transformação matricial, é uma transformação linear, $w = T(x) = Ax$, sendo a matriz da transformação

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ é possível fazer uma representação geométrica simples do efeito da aplicação de uma transformação linear, quer se considere que os pares ou ternos ordenados são representativos de pontos ou de vectores. Em $\mathbb{R}^n$ a interpretação do resultado da aplicação de uma transformação linear é idêntica, embora a sua representação geométrica não seja possível.

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear, $w = T(x, y)$



$$w = Au$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Temos então

$$w_1 = T(x) = x$$

$$w_2 = T(y) = -y$$

Da aplicação da matriz da transformação

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a qualquer objecto de $\mathbb{R}^2$ resulta uma imagem que corresponde ao seu simétrico relativamente ao eixo dos **xx**

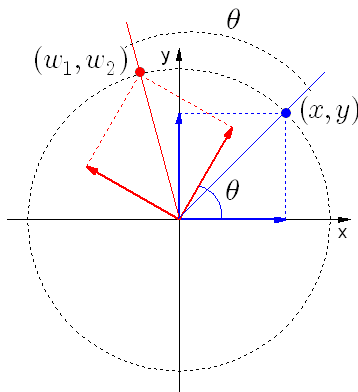
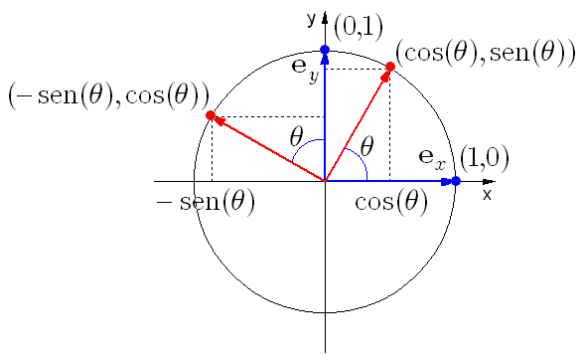
$$T(x, y) = (x, -y)$$

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear, $w = T(x, y)$

$$w = Au$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

em que θ é um ângulo medido no sentido directo.



Cada uma das colunas da matriz de transformação resulta da aplicação da transformação a cada um dos versores da base canónica de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{e}_x$ e $\mathbf{e}_y$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = [T(\mathbf{e}_x) : T(\mathbf{e}_y)]$$

Temos assim que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_x) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_y) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ambos os versores de $\mathbb{R}^2$ sofrem uma rotação de θ no sentido directo.

Em resultado da aplicação de uma transformação com matriz de transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

, todos os objectos do plano sofrem uma rotação de θ no sentido directo. A matriz é por isso chamada matriz de rotação em $\mathbb{R}^2$.



Transformações Lineares Elementares em $\mathbb{R}^2$.

4. Projectção ortogonal.

Projectção ortogonal sobre o eixo dos **xx**.

Equações

$$w_1 = x$$

$$w_2 = 0$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Projectção ortogonal sobre o eixo dos **yy**.

Equações

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = y$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Reflexão.

1. Reflexão sobre o eixo dos **xx**.

Equações

$$w_1 = x$$

$$w_2 = -y$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Reflexão sobre o eixo dos **yy**.

Equações

$$w_1 = -x$$

$$w_2 = y$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Rotação.

Rotação de um ângulo θ no sentido directo.

Equações

$$w_1 = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$$

$$w_2 = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

7. Contração

Contração de um factor k ($0 \leq k < 1$).

Equações

$$w_1 = kx$$

$$w_2 = ky$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

8. Expansão

Expansão de um factor k ($k > 1$).

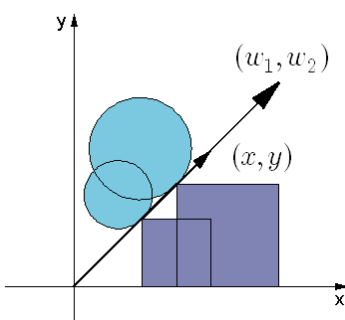
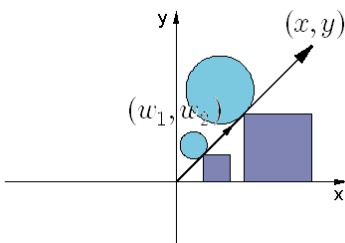
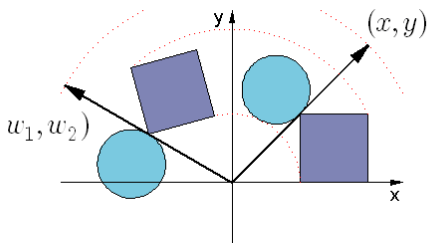
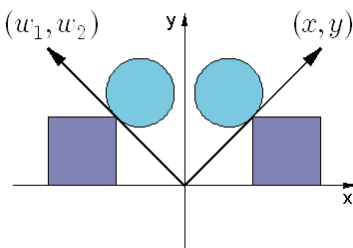
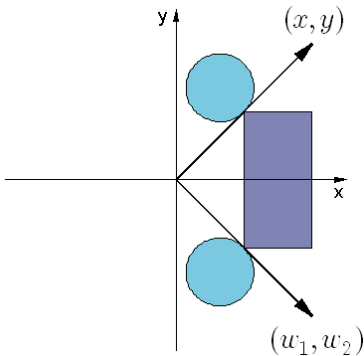
Equações

$$w_1 = kx$$

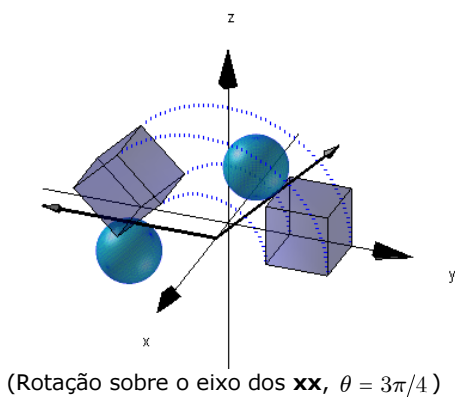
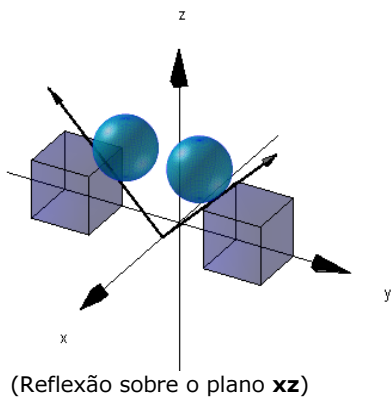
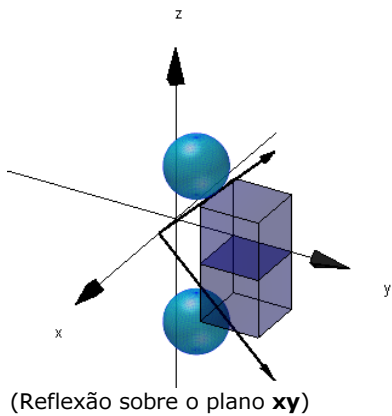
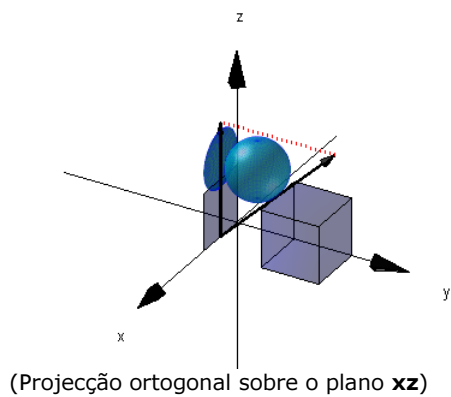
$$w_2 = ky$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$



Transformações Lineares Elementares em $\mathbb{R}^3$.



9. Projectção ortogonal.

Projectção ortogonal sobre plano xy .

Equações

$$w_1 = x$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = 0$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Projectção ortogonal sobre plano xz .

Equações

$$w_1 = x$$

$$w_2 = 0$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projectção ortogonal sobre plano yz .

Equações

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Reflexão.

Reflexão sobre o plano xy .

Equações

$$w_1 = x$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = -z$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Reflexão sobre o plano xz .

Equações

$$w_1 = x$$

$$w_2 = -y$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão sobre o plano yz .

Equações

$$w_1 = -x$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Rotação.

Rotação de um ângulo θ , no sentido directo, sobre o eixo dos xx .

Equações

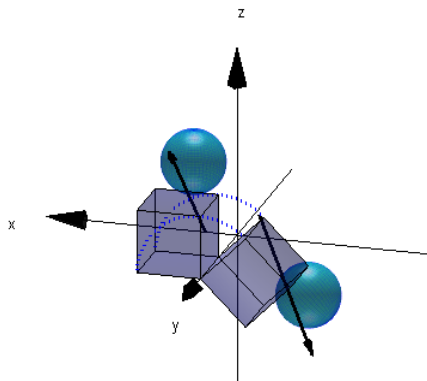
$$w_1 = x$$

$$w_2 = y \cos(\theta) - z \sin(\theta)$$

$$w_3 = y \sin(\theta) + z \cos(\theta)$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

(Rotação sobre o eixo dos **yy**, $\theta = -\pi/4$)

Rotação de um ângulo θ , no sentido directo, sobre o eixo dos **yy**.

Equações

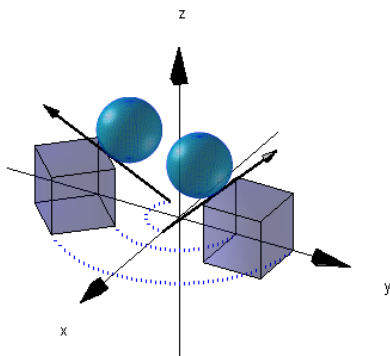
$$w_1 = x \cos(\theta) + z \sin(\theta)$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = -x \sin(\theta) + z \cos(\theta)$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

(Rotação sobre o eixo dos **zz**, $\theta = -3\pi/4$)

Rotação de um ângulo θ , no sentido directo, sobre o eixo dos **zz**.

Equações

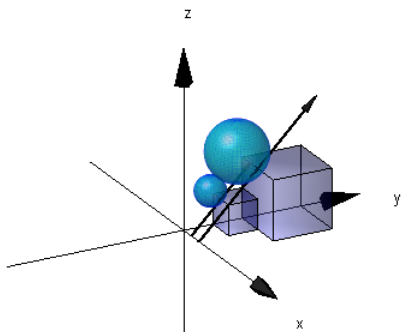
$$w_1 = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$$

$$w_2 = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Contracção, $k = 0.5$)

12. Contracção

Contracção de um factor k ($0 \leq k < 1$).

Equações

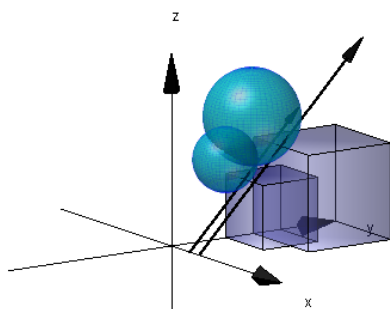
$$w_1 = kx$$

$$w_2 = ky$$

$$w_3 = kz$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

(Expansão, $k = 1.5$)

13. Expansão

Expansão de um factor k ($k > 1$).

Equações

$$w_1 = kx$$

$$w_2 = ky$$

$$w_3 = kz$$

Matriz de Transformação

$$T = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$



Composição de Transformações Lineares.

14. Sendo $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $S : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ transformações lineares, e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, a aplicação da transformação S à imagem, $\in \mathbb{R}^p$, resultante da aplicação da transformação T a um objecto $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$,

$$S(T(\mathbf{u})) = (S \circ T)(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_S \mathbf{A}_T \mathbf{u}$$

, é uma composição linear, chamada **composta** de S com T , cuja matriz de transformação é

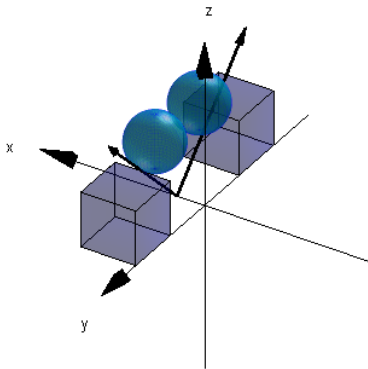
$$\mathbf{A}_{S \circ T} = \mathbf{A}_S \mathbf{A}_T$$



Exemplo 2.

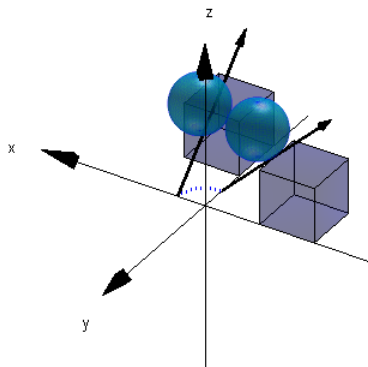
1. Sendo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reflexão sobre o plano $\mathbf{xz}$

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_T \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$



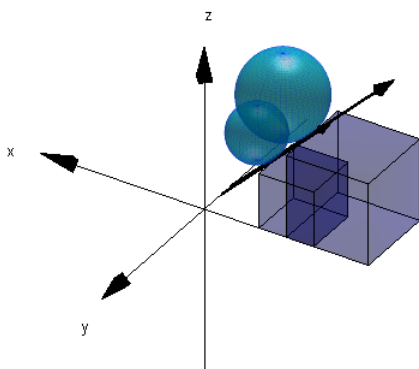
, $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma rotação de $\theta = -\pi/2$ sobre o eixo do $\mathbf{zz}$

$$\mathbf{v} = S(\mathbf{w}) = \mathbf{A}_S \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}$$



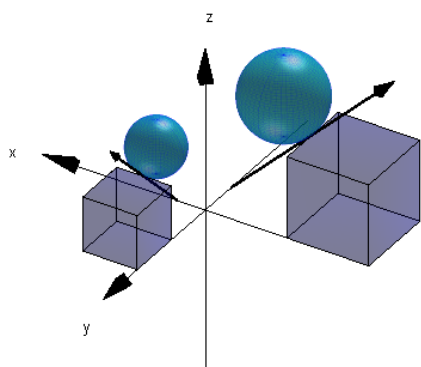
, $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma expansão de $k = 1.5$

$$\mathbf{r} = U(\mathbf{v}) = \mathbf{A}_U \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$



A composição de U com S com T , $\mathbf{r} = V(\mathbf{u}) = U(S(T(\mathbf{u}))) = (U \circ S \circ T)(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_U \mathbf{A}_S \mathbf{A}_T \mathbf{u}$, é uma transformação linear, $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com matriz de transformação

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_V &= \mathbf{A}_U \mathbf{A}_S \mathbf{A}_T \\ &= \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0 \\ -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



, ou seja

$$\mathbf{r} = V(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_V \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0 \\ -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

Saliente-se que a composição de transformações lineares não é comutativa (basta atender ao facto de se tratar de um produto matricial).



Transformação Linear Inversa.

15. Sejam $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas transformações lineares. Dizemos que S e T são **transformações inversas** (uma da outra) se

$$S \circ T = T \circ S = I_n$$

, e escrevemos $S = T^{-1}$ e $T = S^{-1}$.

16. Sendo $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear invertível (i.e. $\exists T^{-1}: T T^{-1} = I_n$), a sua matriz de transformação é uma matriz invertível, e a matriz da transformação inversa é igual à inversa da matriz da transformação

$$A_{T^{-1}} = A_T^{-1}$$



Exemplo 3.

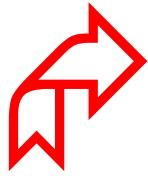
1. Sendo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma rotação de $\theta = -\pi/2$ sobre o eixo do **zz**

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_T \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(-\pi/2) & -\sin(-\pi/2) & 0 \\ \sin(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \end{aligned}$$

, a sua transformação inversa tem matriz de transformação

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= T^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{A}_{T^{-1}} \mathbf{w} = \mathbf{A}_T^{-1} \mathbf{w} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{w} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) & 0 \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w} \end{aligned}$$

ou seja, como seria de esperar, uma rotação de $\theta = \pi/2$.



Transformações Afins. Translação.

17. Chamamos **transformação afim** de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a uma transformação da forma

$$S(\mathbf{u}) = T(\mathbf{u}) + \mathbf{k}$$

, em que T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$ é um vector constante.

(note bem: uma transformação afim não é uma transformação linear.)

18. Uma transformação afim $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ da forma

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{I}_n \mathbf{u} + \mathbf{k}$$

, em que $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ corresponde a uma **translação** de k_i unidades segundo cada um dos versores, $\mathbf{e}_i$, de $\mathbb{R}^n$.



Exemplo 4.

1. A transformação afim $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

corresponde a uma translação de uma unidade segundo $\mathbf{e}_x$ e de 2 unidades segundo $\mathbf{e}_y$

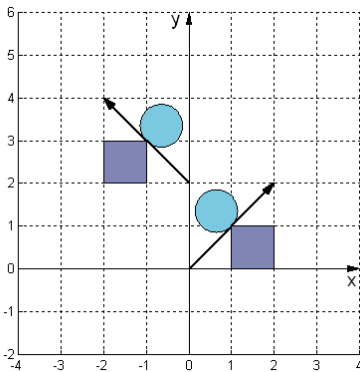
2. A transformação afim $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

corresponde a uma reflexão sobre o eixo dos **yy** seguida de uma translação de 2 unidades segundo $\mathbf{e}_y$.

Por exemplo, para o ponto (2,2) temos

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$





Exercícios.

CALCULAR A IMAGEM DADA A MATRIZ DA TRANSFORMAÇÃO E O OBJECTO.

1. Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, determine $T((1,2))$.

Temos

$$w = Au = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

A imagem do vector $u = e_1 + 2e_2$ é o vector $w = T(u) = 6e_1 - 3e_2 + 8e_3$.



```
>> A=[2 2; -1 -1; 2 3];
>> u=[1 2]';
>> w=A*u
w =
     6
    -3
     8
```

2. Sendo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, determine $T((1,2,3))$.

Temos

$$w = Au = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

A imagem do vector $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ é o vector $w = T(u) = 6e_1 + 12e_2$.



```
>> A=[-2 1 2; -1 2 3];
>> u=[1 2 3]';
>> w=A*u
w =
     6
    12
```

3. Sendo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, determine $T((1,2,1))$.

Temos

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

A imagem do vector $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ é o vector $\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = 2\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$.



```
>> A=[-2 1 2; -1 2 3;-1 0 -1];
>> u=[1 2 1]';
>> w=A*u
w =
     2
     6
    -2
```

4. Dada a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que consiste numa reflexão sobre o eixo dos $\mathbf{y}\mathbf{y}$, seguida duma rotação de $\pi/2$ (no sentido directo) e duma projecção ortogonal sobre o eixo dos $\mathbf{y}\mathbf{y}$, determine $T((2,2))$.

Como vimos, a uma reflexão sobre o eixo dos $\mathbf{y}\mathbf{y}$ corresponde uma matriz de transformação

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, a uma rotação de um ângulo θ no sentido directo corresponde uma matriz de transformação

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

, e a uma projecção ortogonal sobre o eixo dos $\mathbf{y}\mathbf{y}$ corresponde uma matriz de transformação

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo a transformação T uma composição das 3 transformações elementares, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



```
>> A1=[-1 0;0 1];
>> teta=pi/2;
>> A2=[cos(teta) -sin(teta); sin(teta) cos(teta)];
>> A3=[0 0;0 1];
```

```
>> A=A3*A2*A1
A =
      0      0
 -1.0000  0.0000
>> u=[2 2]';
>> w=A*u
w =
      0
 -2.0000
```

5. Considere a seguinte matriz dos vértices de um triângulo em $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine a imagem final (os vértices) do triângulo quando é reflectido sobre o eixo do $\mathbf{yy}$, e depois rodado de $\pi/2$ no sentido directo.

Dado que a uma reflexão sobre o eixo dos $\mathbf{yy}$ corresponde uma matriz de transformação

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, e a uma rotação de um ângulo $\pi/2$ no sentido directo corresponde uma matriz de transformação

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz da transformação é

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que os vértices do triângulo correspondem a vectores coluna correspondentes a cada uma das colunas da matriz $\mathbf{T}_r$

$$\mathbf{T}_r = \left[\begin{bmatrix} v1 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v2 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v3 \\ \end{bmatrix} \right]$$

, resulta que ao produto $\mathbf{A} \mathbf{T}_r$ corresponde uma matriz

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{T}_r &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} v1 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v2 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v3 \\ \end{bmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v1 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v2 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v3 \\ \end{bmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v1 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v2 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v3 \\ \end{bmatrix} \right] \\ &= \left[\mathbf{A} \begin{bmatrix} v1 \\ \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} v2 \\ \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} v3 \\ \end{bmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{bmatrix} w1 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w2 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w3 \\ \end{bmatrix} \right] \end{aligned}$$

em que cada uma das colunas corresponde à imagem de cada um dos vértices do triângulo

$$\begin{aligned} \mathbf{AT}_r &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



```
>> teta=pi/2;
>> A2=[cos(teta) -sin(teta);...
      sin(teta)   cos(teta)];
>> A=A2*A1;
>> Tr=[1 3 2;2 3 1];
>> A*Tr
ans =
    -2.0000    -3.0000    -1.0000
    -1.0000    -3.0000    -2.0000
```

VERIFICAR SE UMA IMAGEM PODE RESULTAR DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR.

6. Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

a matriz da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, verifique se os vectores $\mathbf{w}_1 = (4, -10, 8)$, $\mathbf{w}_2 = (0, 0)$, $\mathbf{w}_3 = (-8, 2, -8)$, $\mathbf{w}_4 = (0, 0, 0)$ e $\mathbf{w}_5 = (3, 2, 1)$ pertencem à imagem (ou contradomínio) de T .

O vector $\mathbf{w}_2 = (0, 0)$ não pertence à imagem de T , dado que $\mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^2$ e o contradomínio de T está contido em $\mathbb{R}^3$. O vector $\mathbf{w}_4 = (0, 0, 0)$ pertence, dado que, para toda a transformação linear, a imagem do vector nulo é o vector nulo ($\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{0}$).

Quanto aos vectores $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_3$ e $\mathbf{w}_5$ podemos verificar se pertencem à imagem de T de diversos modos. Por exemplo, e dado que $\mathbf{A}$ é a matriz a transformação, tendo em atenção que

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

temos

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema



```
>> A=[1 -3;2 3;0 -4];
>> B=[4 -10 8]';
>> rref([A B])
ans =
     1     0    -2
     0     1    -2
     0     0     0
```

, concluímos que o sistema é possível, pelo que w_1 é uma imagem da transformação. Aliás (dado que o sistema é possível e determinado) podemos mesmo concluir que $u_1 = (-2, -2)$ é o objecto cuja imagem é w_1 .

De modo idêntico temos

$$w_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} u_3$$

$$\begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema



```
>> A=[1 -3;2 3;0 -4];
>> B=[-8 2 -8]';
>> rref([A B])
ans =
     1     0    -2
     0     1     2
     0     0     0
```

, concluímos que o sistema é possível, pelo que w_3 é uma imagem da transformação ($u_3 = (-2, 2)$ é o objecto cuja imagem é w_3).

Por último, temos

$$w_5 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} u_5$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema



```
>> A=[1 -3;2 3;0 -4];
>> B=[3 2 1]';
```

```
>> rref([A B])
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

, concluímos que o sistema é impossível, pelo que w_3 não é uma imagem da transformação.

Outro modo de abordar a questão seria **determinar o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelas colunas da matriz da transformação**. Ou seja, sendo $a_1 = (1, 2, 2)$ e $a_2 = (-3, 3, -4)$ os vectores correspondentes às colunas da matriz da transformação, uma imagem, $w = (w_1, w_2)$, não é mais do que uma combinação linear destes vectores, sendo os coeficientes as coordenadas do objecto que lhe dá origem $u = (u_1, u_2)$

$$\begin{aligned} w &= u_1 a_1 + u_2 a_2 \\ w &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= Au \end{aligned}$$

O problema pode assim ser interpretado como um problema de determinação de um subespaço gerado por um conjunto de vectores. Resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

, recorrendo ao método de Gauss-Jordan, resulta



```
>> >> A=[1 -3;2 3;0 -4];
>> B=[w1 w2 w3]. '
>> escalonar([ A B])
[ 1, -3, w1]
[ 2, 3, w2]
[ 0, -4, w3]
Passo 1:
(-2)*L1 + L2 => L2
[ 1, -3, w1]
[ 0, 9, w2-2*w1]
[ 0, -4, w3]
Passo 2:
(1/9)*L2 => L2
[ 1, -3, w1]
[ 0, 1, 1/9*w2-2/9*w1]
[ 0, -4, w3]
Passo 3:
(3)*L2 + L1 ==> L1
(4)*L2 + L3 ==> L3
```

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 1/3*w_1+1/3*w_2 \\ 0, & 1, & 1/9*w_2-2/9*w_1 \\ 0, & w_3+4/9*w_2-8/9*w_1 \end{bmatrix}$$

Concluimos que, para que o sistema seja possível, deverá ser

$$w_3 + \frac{4}{9}w_2 - \frac{8}{9}w_1 = 0 \Leftrightarrow 8w_1 - 4w_2 - 9w_3 = 0$$

Fica assim determinada a restrição do subespaço das imagens. Podemos verificar que $\mathbf{w}_1 = (4, -10, 8)$ e $\mathbf{w}_3 = (-8, 2, -8)$ verificam a restrição ($8 \times 4 - 4 \times (-10) - 9 \times 8 = 0$ e $8 \times (-8) - 4 \times 2 - 9 \times (-8) = 0$, e portanto pertencem à imagem da transformação, mas $\mathbf{w}_5 = (3, 2, 1)$ não verifica ($8 \times 3 - 4 \times 2 - 9 \times 1 \neq 0$), e portanto não pertence à imagem.

DETERMINAR A MATRIZ DA TRANSFORMAÇÃO DADOS UM CONJUNTO DE OBJECTOS E IMAGENS

7. Determine as matrizes das transformações

$$T_1(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 - 3x_2)$$

$$T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$$

$$T_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_3, x_1 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - 3x_4)$$

Conhecida a expressão analítica da transformação a determinação da matriz da transformação é imediata. Para $(w_1, w_2) = T_1(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 - 3x_2)$ temos

$$\begin{cases} w_1 = 2x_1 - x_2 \\ w_2 = x_1 - 3x_2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

logo

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Procedendo de modo análogo, temos para $T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e para $T_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_3, x_1 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - 3x_4)$

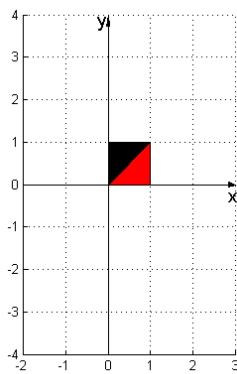
$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

8. Dada a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(e_1) = (-1, 2, 0)$ e $T(e_2) = (0, 2, -1)$ escreva a matriz da transformação.

Sendo a matriz da transformação dada por $A = [T(e_1) \ T(e_2)]$, temos de imediato

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

9. Diga quais das imagens, de b) a d), são compatíveis com uma transformação linear do objecto da figura a) e determine as transformações lineares correspondentes.

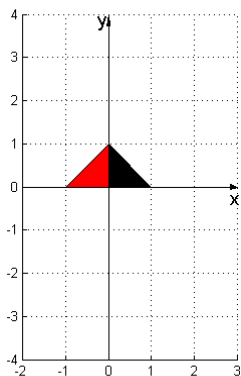


a)

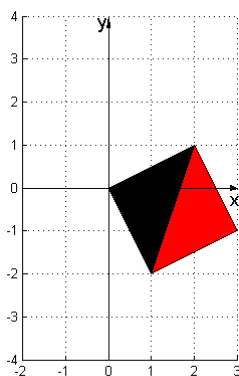
Dados um vector u e um vector v com a mesma direcção de u , $v = ku$, e sendo a imagem de u o vector $w = Au$, temos

$$\begin{aligned} z &= Av \\ &= Aku \\ &= kAu \\ &= kw \end{aligned}$$

Numa transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, **vectores paralelos têm por imagem vectores paralelos**, pelo que é imediato reconhecer que a imagem b) não resulta duma transformação linear do objecto a).



b)



c)

Numa transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ **a imagem do vector nulo é o vector nulo**, $w = A0 = 0$, pelo que é imediato reconhecer que as imagens c) e d) não resultam duma transformação linear do objecto a).

Atendendo à imagem e), dado que

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T(1,0) = T(2,1) \\ T(e_2) &= T(0,1) = T(-1,2) \end{aligned}$$

, e sendo a matriz da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $A = [T(e_1) \ T(e_2)]$, temos de imediato

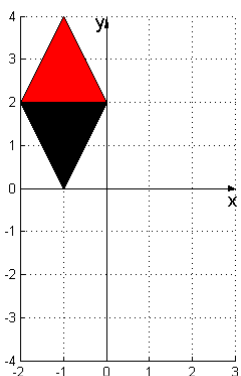
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A transformação linear em causa é, portanto,

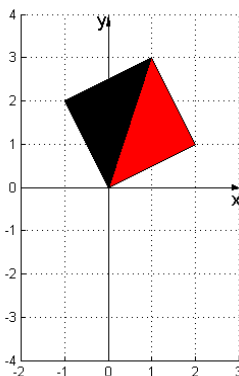
$$T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$$

Por exemplo, para a diagonal do quadrado, temos

$$\begin{aligned} w &= Au \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



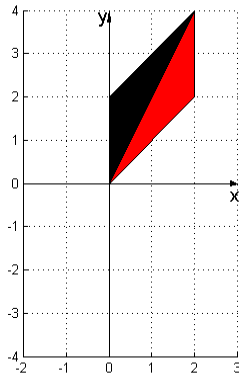
d)



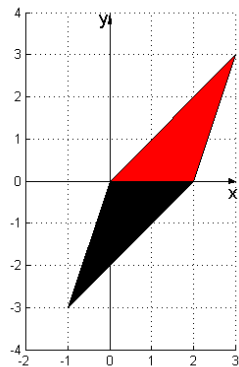
e)

10. Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma o paralelogramo da figura a) no paralelogramo da figura b). Qual das seguintes matrizes pode ser a matriz da transformação em causa

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ -1/3 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 3 & -3/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 2 & -4/3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



a)



b)

Basta atender a que

$$T(0,2) = T(-1,-3)$$

Ora, sendo

$$T(0,2) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} 2\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = 2T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

, temos

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

, pelo que, das matrizes candidatas a única que pode ser a matriz da transformação em causa é a matriz $\mathbf{A}_2$.

Escolhendo dois vectores linearmente independentes, por exemplo, $\mathbf{u}_1 = (0,2)$ e $\mathbf{u}_2 = (2,4)$, temos $\mathbf{w}_1 = T(\mathbf{u}_1) = (-1,-3)$ e $\mathbf{w}_2 = T(\mathbf{u}_2) = (2,0)$, pelo que, sendo

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{A}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 3 & -3/2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Genericamente

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}^{-1}$$



```
>> u1=[0 2]';
>> u2=[2 4]';
>> w1=[-1 -3]';
>> w2=[ 2 0]';
>> A=[w1 w2]*inv([u1 u2])
A =
```

```
2 -1/2
3 -3/2
```

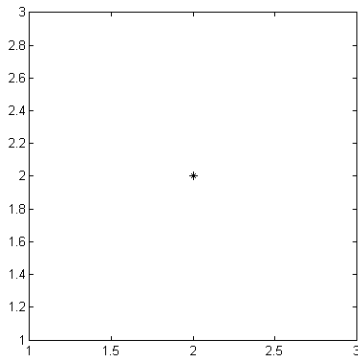


MatLab. Transformações Lineares em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM 2D

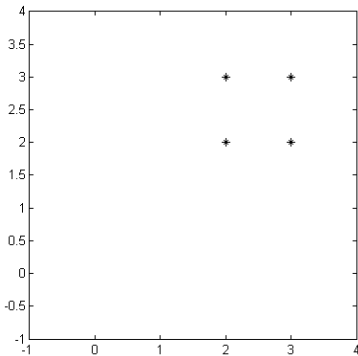
1. Vamos começar por ver alguns procedimentos gráficos básicos.

Representação do ponto $(x, y) = (2, 2)$



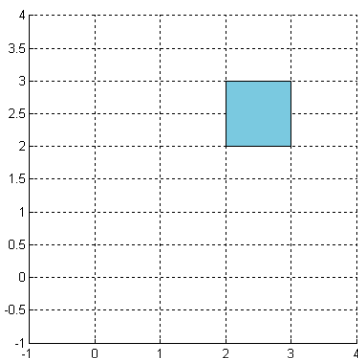
```
figure(1);clf
x=[2 2];
plot(x(1),x(2),'*k');
```

Representação do conjunto de pontos $(x_1, y_1) = (2, 2)$, $(x_2, y_2) = (2, 3)$, $(x_3, y_3) = (3, 3)$, $(x_4, y_4) = (3, 2)$



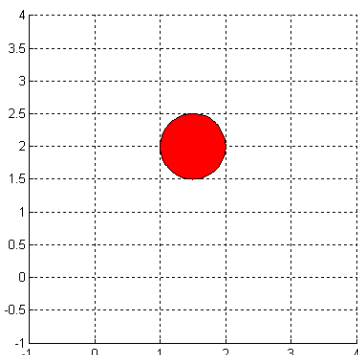
```
figure(2);clf
x1=[2 2];
x2=[2 3];
x3=[3 3];
x4=[3 2];
X=[x1;x2;x3;x4]
plot(X(:,1),X(:,2),'*k');
axis([-1 4 -1 4])
axis square
```

Representação do conjunto de pontos no interior do quadrado de vértices $(x_1, y_1) = (2, 2)$, $(x_2, y_2) = (2, 3)$, $(x_3, y_3) = (3, 3)$, $(x_4, y_4) = (3, 2)$



```
figure(3);clf
x1=[2 2]; x2=[2 3]; x3=[3 3]; x4=[3 2];
X=[x1;x2;x3;x4]
patch(X(:,1), X(:,2), [0.48 0.79 0.88]);
axis([-1 4 -1 4])
grid on
axis square
```

Representação do conjunto de pontos no interior da circunferência de centro $(x, y) = (1.5, 2)$ e raio 0.5



```
figure(4);clf
U = scircle1(1.5,2,0.5);
patch(U(:,1), U(:,2), 'r');
axis([-1 4 -1 4])
grid on
axis square
```

2. Como vimos, da aplicação da transformação linear, $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{w} = T(x, y)$

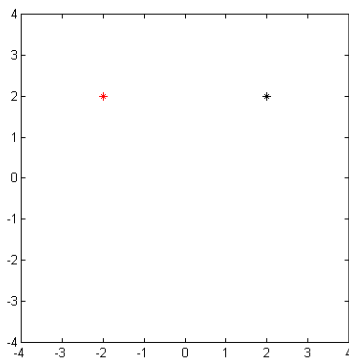
$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

a qualquer objecto de $\mathbb{R}^2$ resulta uma imagem que corresponde ao seu simétrico relativamente ao eixo dos **yy**

$$\mathbf{w} = T(x, y) = (-x, y)$$

Aplicando a transformação ao ponto $\mathbf{x} = (x, y) = (2, 2)$, resulta a imagem $\mathbf{w} = (w, z) = (-2, 2)$

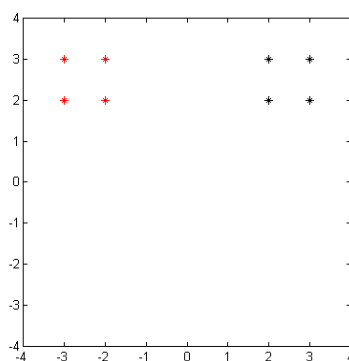


```
figure(5);clf
x=[2 2]';
A = [-1 0; 0 1] % REFLEXÃO Y
w=A*x
hold on
plot(x(1),x(2),'*k');
plot(w(1),w(2),'*r');
hold off
axis([-4 4 -4 4])
```

Note que o ponto é representado por uma matriz coluna, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}^T$, resultando, por aplicação da transformação, a imagem

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando a transformação ao conjunto de pontos $(x_1, y_1) = (2, 2)$, $(x_2, y_2) = (2, 3)$, $(x_3, y_3) = (3, 3)$, $(x_4, y_4) = (3, 2)$, resulta o conjunto de imagens $(w_1, z_1) = (-2, 2)$, $(w_2, z_2) = (-2, 3)$, $(w_3, z_3) = (-3, 3)$, $(w_4, z_4) = (-3, 2)$,



```
figure(6);clf
x1=[2 2]'; x2=[2 3]'; x3=[3 3]'; x4=[3 2]';
X=[x1 x2 x3 x4]
T = [-1 0; 0 1] %REFLEXÃO Y
W=T*X
hold on
plot(X(1,:),X(2:,:), '*k');
plot(W(1,:),W(2:,:), '*r');
axis([-4 4 -4 4])
hold off
```

Note que cada um dos pontos foi representado por uma matriz coluna $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i \end{bmatrix}^T$. A matriz $\mathbf{X}$ é uma matriz de 2×4 em que cada uma das colunas corresponde a cada um dos pontos objecto. Por aplicação da transformação, obtemos a matriz $\mathbf{W}$, 2×4 , em que cada uma das colunas corresponde a cada um dos pontos imagem

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Como vimos, resulta da aplicação da transformação linear, $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $w = T(x, y)$

$$w = Ax$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

que todos os objectos do plano sofrem uma rotação de θ no sentido directo.

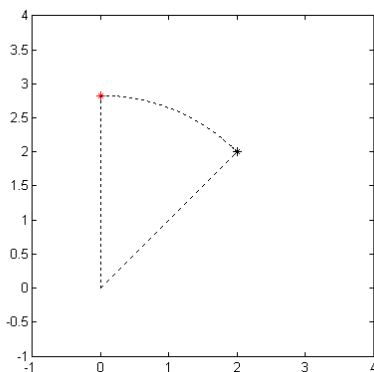
Considerando, por exemplo, $\theta = \pi/4$, e aplicando a transformação ao ponto $x = (x, y) = (2, 2)$, resulta a imagem

$$w = Ax$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

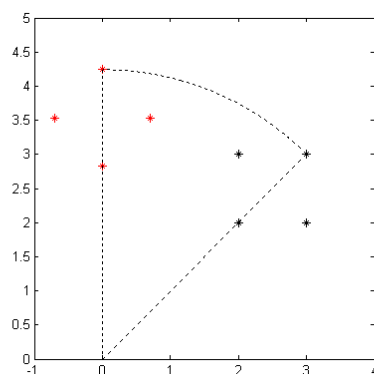
$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \sqrt{2}/2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \sqrt{2}/2 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



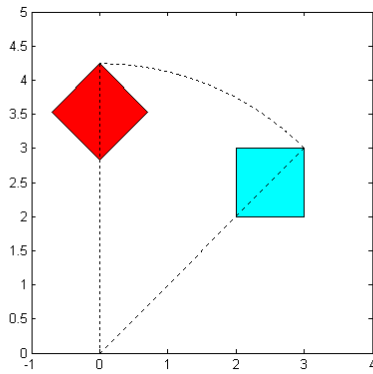
```
figure(7);clf
x=[2 2]';
teta=pi/4;
A = [cos(teta) -sin(teta); sin(teta) cos(teta)];
w=A*x
hold on
plot(x(1),x(2),'*k');
plot(w(1),w(2),'*r');
axis([-1 4 -1 4])
hold off
```

Na aplicação da transformação ao conjunto de pontos $(x_1, y_1) = (2, 2)$, $(x_2, y_2) = (2, 3)$, $(x_3, y_3) = (3, 3)$, $(x_4, y_4) = (3, 2)$



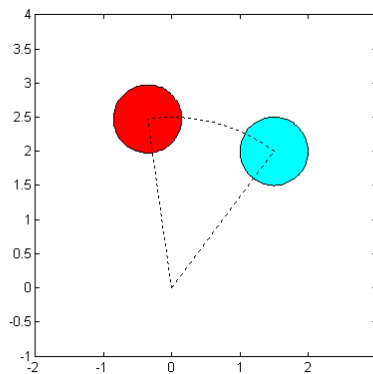
```
figure(8);clf
x1=[2 2]'; x2=[2 3]'; x3=[3 3]'; x4=[3 2]';
X=[x1 x2 x3 x4]
teta=pi/4;
A = [cos(teta) -sin(teta); sin(teta) cos(teta)];
W=A*X
hold on
plot(X(1,:),X(2,:),'*k');
plot(W(1,:),W(2,:),'*r');
axis square; axis equal
axis([-1 4 0 5]); hold off
```

, ou a qualquer outro conjunto de pontos - consideremos por exemplo o caso do quadrado



```
figure(9); clf
x1=[2 2]'; x2=[2 3]'; x3=[3 3]'; x4=[3 2]';
X=[x1 x2 x3 x4]
teta=pi/4;
A = [cos(teta) -sin(teta); sin(teta) cos(teta)]
W=A*X
hold on
patch(X(1,:), X(2,:), 'c');
patch(W(1,:), W(2,:), 'r');
axis([ -1 4 0 5]); axis square; axis equal
hold off
```

e do círculo, visto anteriormente,



```
figure(10);clf
X = scircle1(1.5,2,0.5);
X=X'
teta=pi/4;
A = [cos(teta) -sin(teta); sin(teta) cos(teta)]
W=A*X
hold on
patch(X(1,:), X(2,:), 'c');
patch(W(1,:), W(2,:), 'r');
axis([ -2 3 -1 4]);axis square; hold off
```

O princípio a seguir é o mesmo:

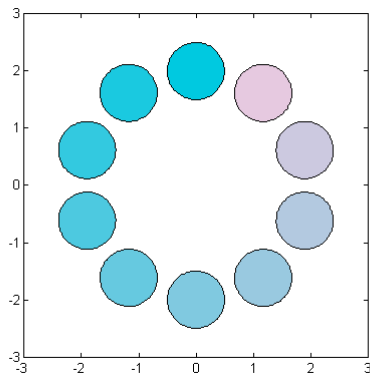
A matriz dos objectos, X , é uma matriz de $2 \times n$ em que cada uma das colunas corresponde a cada um dos pontos objecto, (x_i, y_i) . Por aplicação da transformação, $W = AX$, obtemos a matriz W , $2 \times n$, em que cada uma das colunas corresponde a cada um dos pontos imagem, (w_i, z_i) ,

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \\ z_1 & z_1 & \cdots & z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$$

4. A aplicação de sucessivas transformações lineares a um determinado objecto é trivial, dado que, como vimos, consiste na sucessiva multiplicação das imagens pelas matrizes das transformações.

Por exemplo, consideremos o conjunto de pontos no interior da circunferência de centro $(x, y) = (0, 2)$ e raio 0.5, e a transformação linear resultante da composição de 9 rotações com $\theta = \pi/5$. A figura mostra os sucessivos objectos imagem resultantes

```
figure(11);clf
X = scircle1(0,2,0.5);
% Objectos
X=X';
patch(X(1,:), X(2,:), [0 0.79 0.88]);
axis([ -3 3 -3 3]); axis square;
```



```

hold on
teta=pi/5;
T = [cos(teta) -sin(teta); sin(teta) cos(teta)];
% Imagens resultantes da 1ª transformação
Y=T*X;
patch(Y(1,:), Y(2,:), [1/10 0.79 0.88]);
for i=2:9
    % Imagens resultantes das sucessivas
    % transformações
    Y=T*Y;
    patch(Y(1,:), Y(2,:), [i/10 0.79 0.88]);
end
hold off

```

5. Podemos induzir facilmente a sensação de movimento de um objecto sobre o plano. Reproduza o código seguinte e observe o resultado.

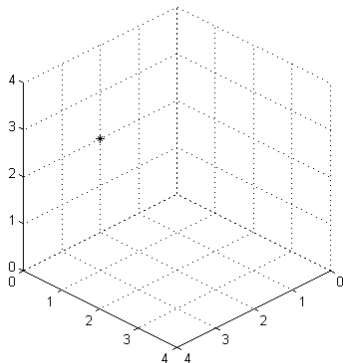
```

close all; figure(12);clf
axis([ -3 3 -3 3]); axis off
x = scircle1(0,2,0.5);
x=x';
teta=pi/100;
T = [cos(teta) -sin(teta) ; ...
     sin(teta)  cos(teta)];
for i=0:1000
    x=T*x;
    h=patch(x(1,:), x(2,:), 'r');
    pause(0.01);
    delete(h);
end

```

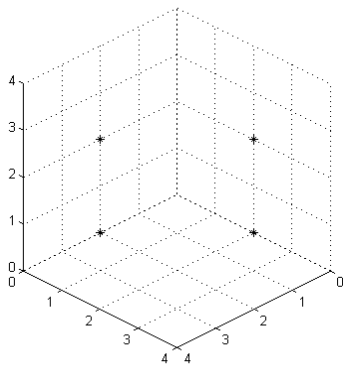
TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM 3D

6. Vamos começar por ver alguns procedimentos gráficos básicos.

Representação do ponto $(x, y, z) = (2, 0, 2)$ 

```
figure(1);clf
x = 2;
y = 0;
z = 2;
plot3(x,y,z,'k*')

axis([0 2 0 2 0 2]); grid on; view(126,16)
```

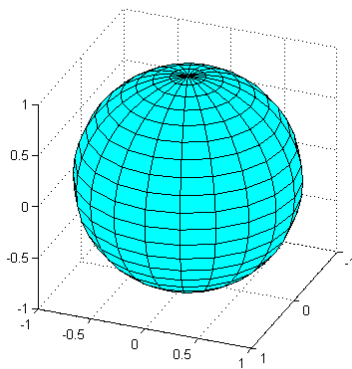
Representação do conjunto de pontos $(x_1, y_1, z_1) = (2, 0, 0)$, $(x_1, y_1, z_1) = (2, 0, 2)$, $(x_1, y_1, z_1) = (0, 2, 0)$ e $(x_1, y_1, z_1) = (0, 2, 2)$.

```
figure(2);clf

x1=[2 0 0]'; x2=[2 0 2]'; x3=[0 2 0]'; x4=[0 2 2]';
X=[x1 x2 x3 x4]
plot3(X(1,:),X(2,:),X(3:),'*k');

axis([ 0 4 0 4 0 4]); axis square; grid on;
view(135,30)
```

Representação de uma esfera de raio unitário centrada na origem.



```
figure(3);clf; hold on

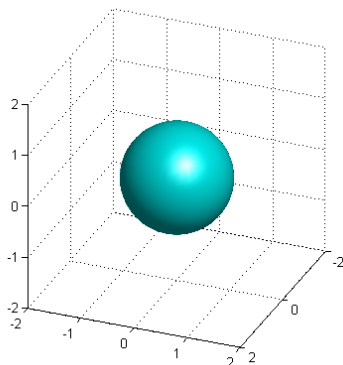
[x,y,z] = sphere(20);
h=surf(x,y,z,...
    'FaceColor','c',...
    'EdgeColor','k');
```

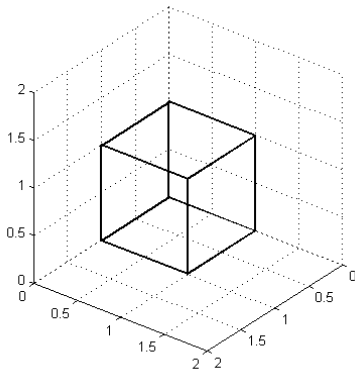
```
axis([-1 1 -1 1 -1 1]); grid on; axis square
view(112,27);
```

OU

```
figure(4);clf; hold on
[x,y,z] = sphere(40);
h=surf(x,y,z,...
    'FaceColor','c',...
    'EdgeColor','n');
```

```
camlight; lighting gouraud;
axis([-2 2 -2 2 -2 2]); grid on; axis square
view(112,27)
```





Representação do conjunto de segmentos correspondentes às arestas de um cubo de volume unitário

```
figure(5);clf
x1=0; y1=0; z1=0;
x2=1; y2=1; z2=1;
C = [x1 x2 x2 x1 x1 x1 x2 x2 x1 x1 x2 x2 x2 x2 x1 x1 ;...
     y1 y1 y2 y2 y1 y1 y1 y2 y2 y1 y1 y1 y2 y2 y2 y2 ;...
     z1 z1 z1 z1 z1 z2 z2 z2 z2 z2 z2 z2 z1 z1 z2 z2 z1];

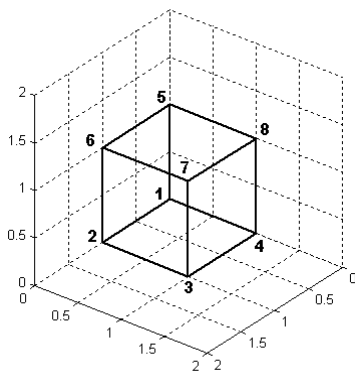
plot3(C(1,:),C(2,:),C(3,:), 'k', 'linewidth',2)
grid on; view(128,30); ;axis equal; axis([0 2 0 2 0 2]);
```

A matriz C contém o conjunto de ternos ordenados de $\mathbb{R}^3$ correspondentes aos vértices adjacentes do cubo.

Definição de uma função ("cubeA") que devolve os vértices e as faces de um cubo

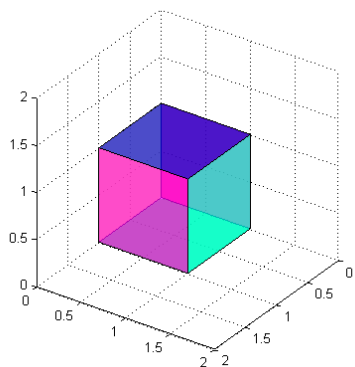
```
function [M N]=cubeA(coord,dim)

x0=coord(1); y0=coord(2); z0=coord(3);
dx=dim(1); dy=dim(2); dz=dim(3);
M=[ [x0 y0 z0 ];
    [x0+dx y0 z0 ]; ...
    [x0+dx y0+dy z0 ]; ...
    [x0 y0+dy z0 ]; ...
    [x0 y0 z0+dz]; ...
    [x0+dx y0 z0+dz]; ...
    [x0+dx y0+dy z0+dz]; ...
    [x0 y0+dy z0+dz]];
N=[ [1 2 6 5];...
    [2 3 7 6];...
    [3 4 8 7];...
    [4 1 5 8];...
    [1 2 3 4];...
    [5 6 7 8] ];
```



Representação de um cubo, utilizando a função "cubeA"

```
figure(6);clf; hold on
axis([0 2 0 2 0 2]);axis square; grid on; view(125,30)
fvc = [1 1 0;1 0 1;0 1 1;1 0 0;0 1 0;0 0 1];
[M N]=cubeA([0 0 0],[1 1 1]);
hc=patch('Vertices' ,M,...
        'Faces' ,N,...
        'FaceVertexCData',fvc,...
        'FaceColor','flat',...
        'FaceAlpha',0.7,...
        'EdgeColor','k',...
        'EdgeAlpha',1);
```



7. Para podermos aplicar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a um conjunto de pontos (ternos ordenados) devolvidos pelas funções 3D pré-definidas em MatLab (como, por exemplo, $[x,y,z] = \text{sphere}(n)$), é necessária uma nota prévia sobre a estrutura dos dados.

Consideremos por exemplo a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

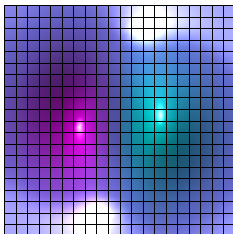
$$z = f(x,y) = 3xe^{(-x^2-y^2)}$$

Se pretendêssemos fazer a sua representação em MatLab seria necessário começar por especificar o domínio de variação das variáveis x e y . Seja, por exemplo $x \in [-2,2]$ e $y \in [-2,2]$ e criemos, para cada uma das variáveis, um vector com 5 valores dentro destes intervalos

```
>> x=-2:1:2
x =
    -2    -1     0     1     2
>> y=-2:1:2
y =
    -2    -1     0     1     2
```

De seguida, é necessário criar, com a função **meshgrid(x,y)**, duas matrizes, que neste caso seriam 5x5, em que estes vectores são replicados, dando assim origem a 25 pares ordenados equiespaçados no plano **xy** (a figura mostra um exemplo com 21x21 pares ordenados)

```
>> [X,Y] = meshgrid(x,y)
X =
    -2    -1     0     1     2
    -2    -1     0     1     2
    -2    -1     0     1     2
    -2    -1     0     1     2
    -2    -1     0     1     2
Y =
    -2    -2    -2    -2    -2
    -1    -1    -1    -1    -1
     0     0     0     0     0
     1     1     1     1     1
     2     2     2     2     2
```



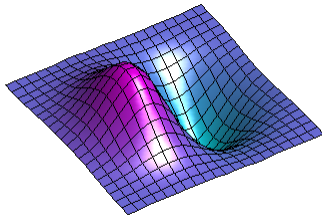
Note-se que os pares ordenados não estão dispostos numa matriz linha (ou coluna) como seria mais natural

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$$

, mas sim sobre duas matrizes quadradas.

Continuando com a representação da função $z = f(x,y)$, vamos agora fazer o cálculo do seu valor para cada um dos pares (x,y)

```
>> Z = 3*X .* exp(-X.^2 - Y.^2);
>> Z =
    -0.0020    -0.0202         0     0.0202     0.0020
    -0.0404    -0.4060         0     0.4060     0.0404
```



```
-0.1099    -1.1036         0     1.1036     0.1099
-0.0404    -0.4060         0     0.4060     0.0404
-0.0020    -0.0202         0     0.0202     0.0020
```

, ficando assim com o conjunto de ternos ordenados (x, y, z) que nos permite fazer a representação 3D

```
surf(X,Y,Z)
```

Admita que se pretende aplicar uma transformação linear ao conjunto de pontos (x, y, z) , por exemplo, correspondente a uma simetria relativamente ao plano **xy**

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Para obtermos o conjunto de imagens é necessário reposicionar as coordenadas dos pontos objecto, que estão distribuídas por 3 matrizes 5x5, numa matriz 3x25 em que cada coluna corresponde a terno ordenado

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{n+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ x_m & \cdots & & x_{m \times n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_{n+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ y_m & \cdots & & y_{m \times n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_{n+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ z_m & \cdots & & z_{m \times n} \end{bmatrix} \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{U} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{m \times n} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{m \times n} \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_{m \times n} \end{bmatrix}$$

, isto pode ser feito facilmente recorrendo à função **reshape(X,m,n)**. No nosso caso teríamos

```
X=reshape(X,1,25);
Y=reshape(Y,1,25);
Z=reshape(Z,1,25);
U=[X; Y; Z];
```

Podemos verificar a dimensão da nova matriz

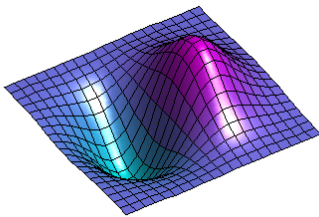
```
>> size(U)
ans =
     3     25
```

Procedendo à transformação,

```
A=[1 0 0;0 1 0;0 0 -1];
W=A*U;
```

, obtemos a matriz 3×25 das imagens. É agora necessário reposicionar os ternos ordenados obtidos em 3 matrizes 5×5 de modo a obter de novo a estrutura de dados necessária ao MatLab para fazer a representação 3D

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & \cdots & x'_{m \times n} \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_{m \times n} \\ z'_1 & z'_2 & \cdots & z'_{m \times n} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & \cdots & x'_n \\ x'_{n+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ x'_m & \cdots & & x'_{m \times n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ y'_{n+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ y'_m & \cdots & & y'_{m \times n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z'_1 & z'_2 & \cdots & z'_n \\ z'_{n+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ z'_m & \cdots & & z'_{m \times n} \end{bmatrix} \end{matrix}$$



```
X=W(1,:);
Y=W(2,:);
Z=W(3,:);
X=reshape(X,5,5);
Y=reshape(Y,5,5);
Z=reshape(Z,5,5);
surf(X,Y,Z)
```

8. Criar uma esfera de raio unitário centrada em $(x,y,z) = (0,2,0)$, aplicar uma transformação linear correspondente a uma rotação de $\theta = \pi$ no sentido directo em torno do eixo dos **zz**, e proceder à representação 3D do objecto e da imagem.

Começamos por criar uma esfera de raio unitário na origem

```
figure(1); clf; hold on;
[X,Y,Z] = sphere(40);
```

As coordenadas dos pontos (x,y,z) estão distribuídas por 4 matrizes 41×41 , correspondendo portanto a 1681 pontos. De seguida procedemos a uma transformação afim, $T(\mathbf{u}) = \mathbf{I}_n \mathbf{u} + \mathbf{k}$, correspondente a uma translação de duas unidades segundo o eixo dos **yy**, de modo a centrar a esfera no ponto $(x,y,z) = (0,2,0)$

```
k=[0 2 0];
X=X+k(1);
Y=Y+k(2);
Z=Z+k(3);
```

,e fazemos a representação do objecto

```
h=surf(X,Y,Z,'EdgeColor','none');
```

De seguida criamos a matriz da transformação correspondente a uma rotação $\theta = \pi$ no sentido directo em torno do eixo dos **zz**,

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

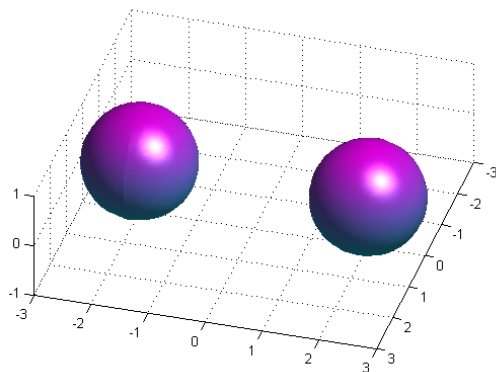
```
teta=pi;
A = [cos(teta) -sin(teta) 0 ; ...
     sin(teta) cos(teta) 0 ; ...
     0         0         1];
```

, determinamos a imagem resultante da transformação

```
[m,n] = size(X);
X=reshape(X,1,m*n);
Y=reshape(Y,1,m*n);
Z=reshape(Z,1,m*n);
U=[X; Y; Z];
W=A*U;
X=W(1,:);
Y=W(2,:);
Z=W(3,:);
X=reshape(X,m,n);
Y=reshape(Y,m,n);
Z=reshape(Z,m,n);
```

,e fazemos a representação da imagem

```
h=surf(X,Y,Z,'EdgeColor','none');
```

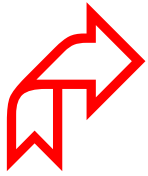


```
colormap(cool(100))
set(gca, 'DataAspectRatio' , [1 1 1]);
set(gcf, 'color', [1 1 1]);
axis ([-3 3 -3 3 -1 1]);
view(106,33); grid on
camlight; lighting phong;
```

9. Podemos induzir facilmente a sensação de movimento de um objecto em $\mathbb{R}^3$ aplicando sucessivas transformações lineares. Reproduza o código seguinte e observe o resultado.

```
figure(10); clf; hold on;
[X,Y,Z] = sphere(40);
k=[0 2 0]; X=X+k(1); Y=Y+k(2); Z=Z+k(3);
teta=pi/100;
A = [cos(teta) -sin(teta) 0; sin(teta) cos(teta) 0; 0 0 1];
[m,n] = size(X);
colormap(cool(100)); set(gca, 'DataAspectRatio' , [1 1 1]);
axis ([-3 3 -3 3 -1 1]); view(106,33); grid on;
camlight; lighting phong;
```

```
for i=1:1000
    X=reshape(X,1,m*n);
    Y=reshape(Y,1,m*n); Z=reshape(Z,1,m*n);
    U=[X; Y; Z];
    W=A*U;
    X=W(1,:); Y=W(2,:); Z=W(3,:);
    X=reshape(X,m,n); Y=reshape(Y,m,n); Z=reshape(Z,m,n);
    h=surf(X,Y,Z,'EdgeColor','none');
    pause(0.001)
    delete(h)
end
```



Matriz de Rotação Sobre um Eixo Arbitrário.

19. Pode deduzir-se que a matriz da transformação correspondente a uma rotação em sentido directo de um ângulo θ em torno de um versor arbitrário $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c + u_x^2(1-c) & u_x u_y(1-c) - u_z s & u_x u_z(1-c) + u_y s \\ u_x u_y(1-c) + u_z s & c + u_y^2(1-c) & u_y u_z(1-c) - u_x s \\ u_x u_z(1-c) - u_y s & u_y u_z(1-c) + u_x s & c + u_z^2(1-c) \end{bmatrix}$$

, em que $c = \cos(\theta)$ e $s = \sin(\theta)$.

Exemplo 5.

1. Se admitirmos que o versor arbitrário de rotação é, por exemplo, o versor do eixo dos $\mathbf{x}$ $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, resulta

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

, como seria de esperar, dado que se trata de uma rotação sobre o eixo dos $\mathbf{x}$.

2. Para qualquer versor $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, com $\theta = 2\pi$ resulta

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, qualquer objecto é transformado nele mesmo.

3. Para uma rotação de em torno do vector $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ resulta

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A imagem do vector $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ é

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

