

Módulo 07

• Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

• Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.



Factorização de Matrizes.

[Poole 193 a 200, 252 a 261, 289 a 308, 363 a 405]

Valores e Vectores Próprios.

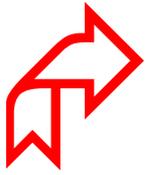
Valores e vectores próprios.
Subespaço próprio.
Equação característica.
Multiplicidade algébrica e geométrica

Diagonalização.

Matriz semelhante.
Matriz diagonalizável.
Factorização PDP⁻¹

Ortogonalização.

Ortogonalidade em \mathbb{R}^n .
Complemento ortogonal.
Espaços fundamentais de uma matriz.
Ortogonalização de Gram-Schmidt
Matriz ortogonal.
Isometria.
Factorização QR.
Diagonalização de matrizes simétricas.



Valores e Vectors Próprios. Equação Característica.

1. Dada uma matriz quadrada A , $n \times n$, diz-se que um escalar λ é um **valor próprio** da matriz A se existir um vector não nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Av = \lambda v$$

, dizendo-se que v é um **vector próprio** de A associado a λ . O conjunto dos valores próprios é designado por **espectro** de A .

2. O conjunto reunião do vector nulo com os vectores próprios associados a um dado valor próprio, λ , é chamado o **subespaço próprio** de λ , E_λ .

3. Os valores próprios da matriz quadrada A , $n \times n$, correspondem às soluções da equação

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

, chamada **equação característica** de A , ou seja, são as raízes do polinómio

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

designado por **polinómio característico** de A . Os vectores próprios associados a cada valor próprio são os vectores, não nulos, solução do sistema

$$(A - \lambda I)v = 0$$

4. Chama-se **multiplicidade algébrica** de um valor próprio λ ao seu grau de multiplicidade como raiz da equação característica, e **multiplicidade geométrica** à dimensão do seu subespaço próprio.

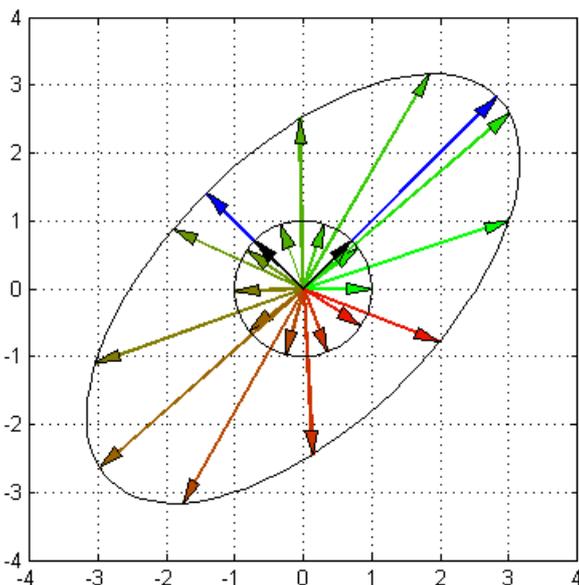


Exemplo 1.

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. O polinómio característico da matriz A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

, pelo que os valores próprios da matriz A são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$



Podemos agora determinar os vectores próprios associados resolvendo os sistemas $(A - \lambda_1 I)v = 0$ e $(A - \lambda_2 I)v = 0$.

Assim, para $(A - \lambda_1 I)v = 0$ temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral, ou seja, o conjunto de todos os vectores próprios associados a $\lambda_1 = 4$, é $v = k \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Para $(A - \lambda_2 I)v = 0$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral, ou seja, o conjunto de todos os vectores próprios associados a $\lambda_2 = 2$, é $v = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

Exercícios.

CALCULAR OS VALORES E OS VECTORES PRÓPRIOS DE UMA MATRIZ.

1. Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

O polinómio característico da matriz \mathbf{A} é

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \end{aligned}$$

, pelo que os valores próprios da matriz \mathbf{A} são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

Podemos agora determinar os vectores próprios associados resolvendo os sistemas $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Assim, para $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ temos

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral, ou seja, o conjunto de todos os vectores próprios associados a $\lambda_1 = 3$, é $\mathbf{v} = k[1 \quad -2]^T$. Para $(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ temos

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral, ou seja, o conjunto de todos os vectores próprios associados a $\lambda_2 = -1$, é $\mathbf{v} = k[1 \quad 2]^T$.



Recorrendo ao MatLab, podemos calcular os valores e vectores próprios de uma matriz com a função **[v d]=eig(A)**, em que **d** é uma matriz diagonal com os valores próprios e **v** uma matriz em que as colunas correspondem aos vectores próprios ordenados conforme os elementos de **d**

```
>> A=[1 -1;-4 1]
A =
     1     -1
    -4      1
>> [V,D] = eig(A)
V =
    0.4472    0.4472
   -0.8944    0.8944
D =
    3.0000         0
         0   -1.0000
```

Os vectores próprios apresentados pelo MatLab têm norma unitária. Podemos verificar que correspondem a um múltiplo dos valores deduzidos teoricamente.

```
>> v/v(1)
ans =
    1.0000    1.0000
   -2.0000    2.0000

Podemos ainda recorrer ao MatLab para resolver o problema seguindo a
dedução analítica

>> syms d
p=det(A-d*eye(2))
p =
-3-2*d+d^2
>> d=solve(p)
d =
    3
   -1
>> rref([A-d(1)*eye(2) [0 0]'])
ans =
[ 1, 1/2, 0]
[ 0, 0, 0]
>> rref([A-d(2)*eye(2) [0 0]'])
ans =
[ 1, -1/2, 0]
[ 0, 0, 0]
```

2. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O polinómio característico da matriz A é

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & -\lambda & -3 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda((-1-\lambda)^2 - 1) \\ &= -\lambda^2(\lambda + 2) \end{aligned}$$

, pelo que os valores próprios da matriz A são $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (ou seja, o valor próprio $\lambda = 0$ tem multiplicidade algébrica 2), e $\lambda_3 = -2$.

Podemos agora determinar os vectores próprios associados resolvendo os sistemas $(A - \lambda_1 I)v = 0$ (que é idêntico a $(A - \lambda_2 I)v = 0$) e $(A - \lambda_3 I)v = 0$. Assim, para $(A - \lambda_1 I)v = 0$ temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é $x - z = 0$, ou seja, o conjunto de todos os vectores próprios associados a $\lambda = 0$, é

$$E_0 = \begin{bmatrix} z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, ou seja, o subespaço gerado pelos vectores $[0 \ 1 \ 0]^T$ e $[1 \ 0 \ 1]^T$, que são linearmente independentes. O valor próprio $\lambda = 0$ tem multiplicidade geométrica 2, tendo associados os valores próprios $\mathbf{v}_1 = k[0 \ 1 \ 0]^T$ e $\mathbf{v}_2 = k[1 \ 0 \ 1]^T$.

Para $(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 3z \end{cases}$$

ou seja, o conjunto de todos os vectores próprios associados a $\lambda = -2$, é

$$E_{-2} = \begin{bmatrix} -z \\ 3z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, ou seja, o subespaço gerado pelo vector $[-1 \ 3 \ 1]^T$. O valor próprio $\lambda = -2$ tem multiplicidade geométrica 1, tendo associados os valores próprios $\mathbf{v}_3 = k[-1 \ 3 \ 1]^T$.

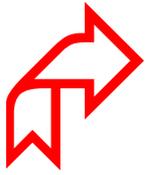


Recorrendo ao MatLab, podemos calcular os valores e vectores próprios de uma matriz com a função **[v d]=eig(A)**, em que **d** é uma matriz diagonal com os valores próprios e **v** uma matriz em que as colunas correspondem aos vectores próprios ordenados conforme os elementos de **d**

```
>> [v,d]=eig(A)
v =
     0     0.7071    -0.3015
    1.0000         0     0.9045
     0     0.7071     0.3015

d =
     0     0     0
     0     0     0
     0     0    -2

>> [v(:,1),v(:,2)/v(4),-v(:,3)/v(7)]
ans =
     0     1    -1
     1     0     3
     0     1     1
```



Matriz Semelhante. Matriz Diagonalizável. Factorização PDP^{-1} .

5. Os valores próprios de uma matriz diagonal e de uma matriz triangular correspondem aos valores dos elementos da diagonal.

6. Dizemos que a matriz A , $n \times n$, é uma **matriz semelhante** à matriz B , $n \times n$, se existir uma matriz P tal que $P^{-1}AP = B$, e escrevemos $A \sim B$.

7. Matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios (mas não, em geral, os mesmos vectores próprios), o mesmo determinante e a mesma característica.

8. Uma matriz quadrada A diz-se uma **matriz diagonalizável** se existir uma matriz diagonal D tal que $A \sim D$, ou seja, se existir uma matriz P , dita **matriz diagonalizante**, e uma matriz diagonal D , tais que $A = PDP^{-1}$.

9. Uma matriz quadrada A , $n \times n$, é diagonalizável sse possui n vectores próprios linearmente independentes, e as matrizes

$$P = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}$$

10. Valores próprios diferentes têm associados vectores próprios linearmente independentes, pelo que, se A tem n valores próprios diferentes então é diagonalizável.



Exemplo 2.

As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

são semelhantes. Considerando a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

podemos verificar que $AP = PD$ (o que é o mesmo que $P^{-1}AP = D$, multiplicando à esquerda por P , e evitando assim ter que inverter a matriz), e portanto $A \sim D$

$$AP = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = PD = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Nota: Embora utilizemos o mesmo símbolo, a semelhança entre matrizes não deve ser confundida com a equivalência por linhas: **As operações elementares sobre as linhas de uma matriz não preservam os seus valores próprios.**

Dado que D é uma matriz diagonal, podemos dizer que A é diagonalizável. Note-se que, conforme vimos no exemplo 1, D corresponde à matriz dos valores próprios da matriz A e P corresponde à matriz dos vectores próprios associados, sendo

$$A = PDP^{-1}$$



Exercícios.

DIAGONALIZAR UMA MATRIZ (FACTORIZAÇÃO PDP^{-1}).

3. A diagonalização de uma matriz A , $n \times n$, segue, em geral, os seguintes passos:

1. Determinar os valores próprios de A .
2. Para cada valor próprio determinar uma base do seu subespaço próprio.
3. A matriz A é diagonalizável sse as dimensões dos subespaços próprios somam n . Nesse caso, obtêm-se n vectores linearmente independentes, pelo que $A = PDP^{-1}$, em que P é a matriz cujas colunas são os vectores próprios e D é a matriz diagonal dos valores próprios a que cada vector próprio, ordenadamente, está associado.

4. Vimos que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$, a que estão associados os vectores próprios $\mathbf{v}_1 = k[1 \ -2]^T$ e $\mathbf{v}_2 = k[1 \ 2]^T$. Sendo os valores próprios diferentes, os vectores próprios que lhe estão associados são linearmente independentes, pelo que A é diagonalizável, sendo que uma matriz diagonalizadora da matriz A é

$$P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

, sendo a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Temos então

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Podemos verificar a diagonalização. Recorrendo ao MatLab



```
>> A=[1 -1;-4 1]
>> [V,D] = eig(A);
>> V*D*inv(V)
ans =
    1.0000    -1.0000
   -4.0000     1.0000
```

5. Vimos que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

tem valores $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, e $\lambda_3 = -2$, a que estão associados os vectores próprios $\mathbf{v}_1 = k[0 \ 1 \ 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = k[1 \ 0 \ 1]^T$, e $\mathbf{v}_3 = k[-1 \ 3 \ 1]^T$. Como λ_1 e λ_2 são iguais, é necessário verificar se \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 são linearmente independentes.



```
>> v1=[0 1 0]';
v2=[1 0 1]';
rref([v1 v2 [0 0 0]'])
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     0
```

Dado que \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 são linearmente independentes \mathbf{A} é diagonalizável, sendo que uma matriz diagonalizadora da matriz \mathbf{A} é

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

, sendo a matriz diagonal

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Temos então

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Podemos verificar a diagonalização. Recorrendo ao MatLab



```
>> A=[-1 0 1;3 0 -3;1 0 -1];
[V,D] = eig(A);
V*D*inv(V)
ans =
    -1     0     1
     3     0    -3
     1     0    -1
```

6. Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

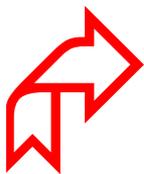
Recorrendo ao MatLab para calcular os valores e vectores próprios, temos



```
>> A=[0 1 0;0 0 1;2 -5 4];
[V,D] = eig(A)
V =
    -0.5774    0.5774   -0.2182
    -0.5774    0.5774   -0.4364
    -0.5774    0.5774   -0.8729
D =
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    2.0000
>> [V(:,1)/V(1),V(:,2)/V(4),V(:,3)/V(7)]
ans =
    1.0000    1.0000    1.0000
    1.0000    1.0000    2.0000
    1.0000    1.0000    4.0000
```

Os valores próprios da matriz A são $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, e $\lambda_3 = 2$. O valor próprio $\lambda = 1$ tem multiplicidade algébrica 2. Os vectores próprios associados a $\lambda = 1$ são $\mathbf{v}_1 = k[1 \ 1 \ 1]^T$ e $\mathbf{v}_2 = k[1 \ 2 \ 4]^T$. O valor próprio $\lambda = 1$ tem multiplicidade geométrica 1.

Havendo apenas dois vectores próprios linearmente independentes, as dimensões dos subespaços próprios não somam $n(= 3)$, pelo que a matriz A não é diagonalizável.



Ortogonalidade em \mathbb{R}^n .

Recordemos que:

A. Sendo u e v (não nulo) $\in \mathbb{R}^n$, podemos sempre decompor o vector u na soma de dois vectores $u = u_1 + u_2$, tendo u_1 a direcção de v , chamado **projectão ortogonal de u sobre v** ,

$$\text{proj}_v u = u_1 = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v$$

e sendo u_2 ortogonal a v

$$\text{perp}_v u = u_2 = u - u_1 = u - \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v$$

B. Se $u_1, u_2, \dots, u_r \in \mathbb{R}^n$ são **vectores ortogonais**, isto é, $u_i \cdot u_j = 0$ para $i \neq j$, então o conjunto $S = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ é **linearmente independente**, e, para todo o vector u que possa ser expresso como uma combinação linear dos vectores u_i , temos

$$u = \sum_{i=1}^r k_i u_i = \sum_{i=1}^r \frac{u \cdot u_i}{\|u_i\|^2} u_i = \sum_{i=1}^r \frac{u \cdot u_i}{u_i \cdot u_i} u_i = \sum_{i=1}^r \text{proj}_{u_i} u$$

C. Sendo $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ uma base dum subespaço de \mathbb{R}^n dizemos que S é uma **base ortogonal** se $u_i \cdot u_j = 0$ para $i \neq j$, e é uma **base ortonormada** se, para além de ser uma base ortogonal, $\|u_i\| = 1$ para $i = 1, \dots, k$.



Exemplo 3.

1. Os vectores $u_1 = [2 \ 1 \ -1]^T$, $u_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$ são ortogonais, dado que $u_1 \cdot u_2 = 0$,



```
>> u1=[2 1 -1]';
>> u2=[0 1 1]';
>> u1'*u2
ans =
    0
```

Para encontrar um terceiro vector ortogonal a u_1 e u_2 , podemos recorrer ao conceito de produto externo, dado que $u_3 = u_1 \times u_2$ é ortogonal a u_1 e u_2 (e tem um sentido ditado pela regra da mão direita)



```
>> u3=cross(u1,u2)
u3 =
     2
    -2
     2
```

Podemos verificar que u_1 , u_2 , e $u_3 = [2 \ -2 \ 2]^T$ formam um conjunto ortogonal, isto é, $u_i \cdot u_j = 0$ para $i \neq j$,



```
>> U=[u1 u2 u3];
>> U'*U
ans =
     6     0     0
     0     2     0
     0     0    12
```

Sendo ortogonais, os vectores são linearmente independentes, pelo que formam uma base de \mathbb{R}^3 (recordando que n vectores linearmente independentes formam uma base de \mathbb{R}^n), e, porque são ortogonais, $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma **base ortogonal** de \mathbb{R}^3 .

Nenhum dos vectores tem norma unitária. Como se constata pela diagonal da matriz $U^T U$, temos $\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{6}$, $\|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{2}$, e $\|\mathbf{u}_3\| = \sqrt{12}$. Se normalizarmos os vectores, encontramos os versores de cada um deles

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{12} \\ -2/\sqrt{12} \\ 2/\sqrt{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

, resultando que $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ é uma **base ortonormada** de \mathbb{R}^3 .



```
>> q1=u1/sqrt(u1'*u1);
>> q2=u2/sqrt(u2'*u2);
>> q3=u3/sqrt(u3'*u3);
>> Q=[q1 q2 q3];
>> Q'*Q
ans =
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    1.0000
```

2. Consideremos a base ortogonal de \mathbb{R}^3 constituída pelos vectores \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , e \mathbf{u}_3 do exemplo anterior, $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Qualquer vector de \mathbb{R}^3 , \mathbf{u} , pode ser expresso como uma combinação linear dos vectores da base, $\mathbf{u} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3$, sendo que cada um dos coeficientes da combinação linear corresponde à projecção ortogonal do vector \mathbf{u} sobre cada um dos vectores \mathbf{u}_i

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|^2} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^3 \text{proj}_{\mathbf{u}_i} \mathbf{u}$$

Consideremos agora a base ortonormada $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ do exemplo anterior. Sendo, como vimos, $\mathbf{q}_i = \mathbf{u}_i / \|\mathbf{u}_i\|$, temos

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|^2} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|} \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|} \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^3 \text{proj}_{\mathbf{q}_i} \mathbf{u}$$

Como vemos, sendo a base ortonormada, o cálculo do coeficientes que permitem representar qualquer vector como uma combinação linear dos versores da base é mais simples, correspondendo apenas ao produto interno do vector com cada um dos versores $k_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i$.

Seja o vector $\mathbf{u} = [1 \ -2 \ 1]^T$. Note-se que se subentende que o vector está expresso na base canónica de \mathbb{R}^3 , $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, ou seja,

$$\mathbf{u} = 1\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$$

, que é uma base ortonormada, pelo que cada uma das coordenadas do vector \mathbf{u} não é mais do que a sua projecção ortogonal sobre cada um dos versores canónicos.

Podemos representar \mathbf{u} na base ortogonal $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Sendo

$$k_i = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}$$



```
>> u=[1 -2 1]';
>> format rat
>> k1=u'*u1/(u1'*u1)
>> k1 =
    -1/6
>> k2=u'*u2/(u2'*u2)
k2 =
    -1/2
>> k3=u'*u3/(u3'*u3)
k3 =
    2/3
```

temos

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{6}\mathbf{u}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{u}_3$$

Podemos representar \mathbf{u} na base ortonormada $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$. Sendo simplesmente

$$k_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i$$



```
>> k1=u'*q1
k1 =
    -0.4082
>> k2=u'*q2
k2 =
    -0.7071
>> k3=u'*q3
k3 =
    2.3094
```

temos

$$\mathbf{u} = -\frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{q}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{q}_2 + \frac{2\sqrt{12}}{3}\mathbf{q}_3$$

Note-se ainda que, sendo $k_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i = \mathbf{u}^T \mathbf{q}_i$, temos

$$\begin{aligned} [k_1 \quad k_2 \quad k_3] &= [\mathbf{u}^T \mathbf{q}_1 \quad \mathbf{u}^T \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{u}^T \mathbf{q}_3] \\ &= \mathbf{u}^T [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3] \\ &= \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \end{aligned}$$

, sendo \mathbf{Q} uma matriz em que cada coluna corresponde a cada um dos versores da base.



```
>> u'*[q1 q2 q3]
ans =
    -0.4082    -0.7071     2.3094
```

3. O exemplo anterior pode, evidentemente, ser interpretado num contexto mais geral de representação de um vector em diferentes bases (não necessariamente ortogonais).

Temos $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, com $\mathbf{u}_1 = [2 \ 1 \ -1]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$, e $\mathbf{u}_3 = [2 \ -2 \ 2]^T$. Sabendo $[\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} = [1 \ -2 \ 1]^T$, temos

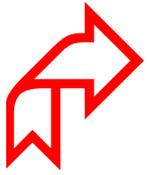
$$M_{\mathcal{U}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}]_{\mathcal{U}} &= M_{\mathcal{E}\mathcal{U}} [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} \\ &= M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



```
>> format rat
>> Wue=[2 0 2;1 1 -2;-1 1 2];
>> ue=[1 -2 1]';
>> uu=inv(Wue)*ue
uu =
    -1/6
    -1/2
     2/3
```



Complemento Ortogonal.

11. Seja W um subespaço de \mathbb{R}^n . Dizemos que um vector $u \in \mathbb{R}^n$ é **ortogonal ao subespaço** W se for ortogonal a todos os vectores de W . O conjunto de todos os vectores ortogonais a W é designado por **complemento ortogonal do subespaço** W , e escrevemos W^\perp

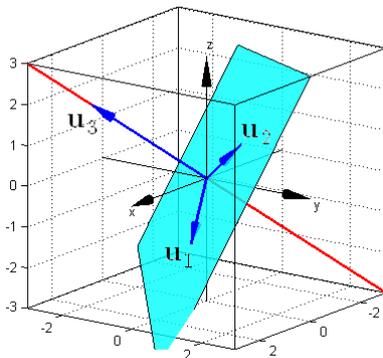
$$W^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : u \cdot v = 0, \forall v \in W\}$$

, sendo que W^\perp é um subespaço de \mathbb{R}^n , $W \cap W^\perp = \{0\}$, e $\dim(W) + \dim(W^\perp) = n$.



Exemplo 4.

1. Os vectores $u_1 = [2 \ 1 \ -1]^T, u_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$ do exemplo 3.1 geram um subespaço W de \mathbb{R}^3 correspondente a um plano que passa na origem. O vector $u_3 = [2 \ -2 \ 2]^T$, ortogonal a



u_1 e a u_2 está contido no complemento ortogonal do subespaço W , uma recta, r , que passa na origem e é perpendicular ao plano que contém u_1 e u_2 , $r = W^\perp$. Todos os vectores com a direcção de r (os múltiplos escalares de u_3) são ortogonais a todos os vectores contidos no plano. Do mesmo modo, todos os vectores contidos no plano são ortogonais ao conjunto aos vectores contidos na recta, constituindo o seu complemento ortogonal $W = r^\perp$.

2. Os vectores $u_1 = [1 \ -3 \ 5 \ 0 \ 5]^T, u_2 = [-1 \ 1 \ 2 \ -2 \ 3]^T$, e $u_3 = [0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 5]^T$

geram um subespaço U de \mathbb{R}^5 , e, sendo linearmente independentes, constituem uma base desse subespaço, $\dim(U) = 3$.

O vectores $w_1 = [-3 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ e $w_2 = [-4 \ -3 \ -2 \ 0 \ 1]^T$ geram um subespaço W de \mathbb{R}^5 , e, sendo linearmente independentes, constituem uma base desse subespaço, $\dim(W) = 2$.

Os vectores u_1, u_2 e u_3 , assim como qualquer vector de U , que pode ser escrito como uma combinação linear destes 3 vectores, são ortogonais aos vectores w_1 e w_2 .

Podemos verificar a relação de ortogonalidade calculando o produto interno entre eles

$$U = [u_1 \ u_2 \ u_3]$$

$$W = [w_1 \ w_2]$$

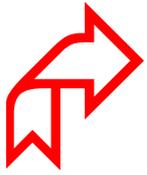
$$U^T W = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} [w_1 \ w_2] = \begin{bmatrix} u_1 \cdot w_1 & u_1 \cdot w_2 \\ u_2 \cdot w_1 & u_2 \cdot w_2 \\ u_3 \cdot w_1 & u_3 \cdot w_2 \end{bmatrix}$$



```
>> u1=[1 -3 5 0 5]';  
>> u2=[-1 1 2 -2 3]';  
>> u3=[0 -1 4 -1 5]';  
>> w1=[-3 -1 0 1 0]';  
>> w2=[-4 -3 -2 0 1]';  
>> U=[u1 u2 u3];  
>> W=[w1 w2];  
>> U'*W  
ans =  
      0      0  
      0      0  
      0      0
```

Do mesmo modo, os vectores w_1 e w_2 , assim como qualquer vector de \mathbb{W} , que pode ser escrito como uma combinação linear destes 2 vectores, são ortogonais aos vectores u_1 , u_2 e u_3 .

O subespaço \mathbb{W} é o complemento ortogonal do subespaço \mathbb{U} , $\mathbb{W} = \mathbb{U}^\perp$, tal como o subespaço \mathbb{U} é o complemento ortogonal do subespaço \mathbb{W} , $\mathbb{U} = \mathbb{W}^\perp$, sendo $\dim(\mathbb{U}) + \dim(\mathbb{W}) = 5$.



Espaços Fundamentais de uma Matriz.

12. Uma matriz A , $m \times n$, tem 4 espaços fundamentais:

1. Designa-se por **espaço coluna** de A , ou **imagem** de A , $\text{col}(A)$ ou $\text{Im}(A)$, o subespaço de \mathbb{R}^m gerado pelas colunas de A , ou seja, o conjunto de todas as combinações lineares das colunas de A .

2. Designa-se por **espaço linha** de A , $\text{lin}(A)$, o subespaço de \mathbb{R}^n gerado pelas linhas de A , ou seja, o conjunto de todas as combinações lineares das linhas de A , sendo $\text{lin}(A) = \text{col}(A^T)$ e $\text{col}(A) = \text{lin}(A^T)$.

3. Designa-se por **espaço nulo (à direita)**, ou **núcleo**, de A , $\text{Ker}(A)$, o subespaço de \mathbb{R}^n gerado por todos os vectores x tais que $Ax = 0$, ou seja, correspondente às soluções do sistema homogéneo $Ax = 0$.

4. Designa-se por **espaço nulo à esquerda**, $\text{Ker}(A^T)$, o subespaço de \mathbb{R}^m gerado por todos os vectores x tais que $x^T A = 0^T$, ou seja, correspondente às soluções do sistema homogéneo $x^T A = 0^T$ ($\Leftrightarrow A^T x = 0$, ou seja, o núcleo da matriz transposta).



Exemplo 5.

1. Podemos determinar uma base do espaço linha de uma matriz A reduzindo a matriz à forma escalonada. As operações elementares sobre as linhas de uma matriz não alteram o espaço linha, ou seja, **duas matrizes equivalentes por linhas têm o mesmo espaço linha**.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Escalonando a matriz



```
>> A=[2 0 2;1 1 2;-1 1 0];
```

```
>> EL=rref(A)
```

```
EL =
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, temos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os vectores $u_1 = [1 \ 0 \ 1]^T$ e $u_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$, correspondentes à 1ª e 2ª linha da forma escalonada, formam uma base do espaço linha de A , que tem dimensão 2, $\dim(\text{lin}(A)) = 2$.

Podemos agora caracterizar o espaço linha da matriz A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{L} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1 + x_2\}$$

2. As operações elementares sobre as linhas de uma matriz alteram o espaço coluna, ou seja, **duas matrizes equivalentes por linhas não têm o mesmo espaço coluna**. No entanto, dado que $\text{col}(A) = \text{lin}(A^T)$, podemos determinar o espaço coluna de uma matriz determinando o espaço linha da sua matriz transposta

Seja a matriz A do exemplo anterior. Escalonando a sua matriz transposta



```
>> EC=rref(A')
```

EC =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, temos

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os vectores $\mathbf{u}_3 = [1 \ 0 \ -1]^T$ e $\mathbf{u}_4 = [0 \ 1 \ 1]^T$, correspondentes à 1ª e 2ª linha da forma escalonada de \mathbf{A}^T , formam uma base do espaço coluna de A , que tem dimensão 2, $\dim(\text{col}(A)) = 2$.

Podemos agora caracterizar o espaço coluna da matriz A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C} = L(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = -x_1 + x_2\}$$

3. Podemos determinar o núcleo de uma matriz procurando as soluções do sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Seja a matriz A do exemplo anterior. Escalonando a matriz completa



```
>> Nd=rref([A [0 0 0]'])
```

Nd =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

resulta $x_1 + x_3 = 0$ e $x_2 + x_3 = 0$, ou seja

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, pelo que podemos especificar uma base para o núcleo da matriz $\mathbf{u}_5 = [-1 \ -1 \ 1]^T$, sendo $\dim(\text{Ker}(\mathbf{A})) = 1$.

$$\mathbb{K} = L(\mathbf{u}_5) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -x_3 \wedge x_2 = -x_3\}$$

4. Podemos determinar o núcleo à esquerda de uma matriz procurando as soluções do sistema homogéneo $\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Seja a matriz \mathbf{A} do exemplo anterior. Escalonando a matriz completa correspondente à transposta, temos



```
>> Ne=rref([A' [0 0 0]'])
```

Ne =

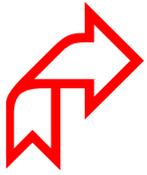
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

resulta $x_1 - x_3 = 0$ e $x_2 + x_3 = 0$, ou seja

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, pelo que podemos especificar uma base para o núcleo à esquerda da matriz $\mathbf{u}_6 = [1 \ -1 \ 1]^T$, sendo $\dim(\text{Ker}(\mathbf{A}^T)) = 1$

$$\mathbb{K}_e = L(\mathbf{u}_6) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3 \wedge x_2 = -x_3\}$$



Espaços Fundamentais de uma Matriz. Característica. Nulidade.

13. Os espaços linha e coluna da matriz A , $m \times n$, possuem a mesma dimensão.

14. O espaço das linhas de uma matriz A corresponde ao complemento ortogonal do núcleo da matriz

$$\text{Ker}(A) = \text{lin}(A)^\perp = \text{col}(A^T)^\perp$$

15. O espaço das colunas de uma matriz A corresponde ao complemento ortogonal do núcleo da sua matriz transposta

$$\text{Ker}(A^T) = \text{col}(A)^\perp = \text{lin}(A^T)^\perp$$

16. A **característica** da matriz A , $\text{car}(A)$, é igual à dimensão do seu espaço coluna (ou do espaço linha), ou seja, é igual ao número de colunas (ou linhas) da matriz linearmente independentes.

17. Designa-se por **nulidade** da matriz A , $\text{nul}(A)$, a dimensão do seu núcleo (igual ao número de variáveis livres do sistema $Ax = 0$).

$$\text{car}(A) + \text{nul}(A) = n$$

$$\text{car}(A) + \text{nul}(A^T) = m$$

$$\text{car}(A) = \text{car}(A^T)$$

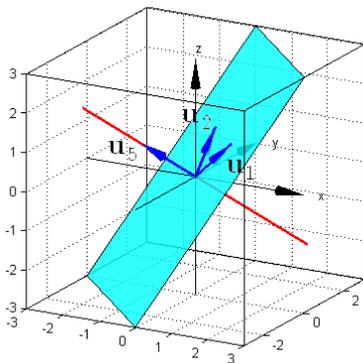
$$\text{car}(A^T A) = \text{car}(A)$$



Exemplo 6.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



do núcleo da matriz (e vice-versa)

Como vimos no exemplo 5, o espaços linha e coluna da matriz A possuem a mesma dimensão

$$\dim(\text{lin}(A)) = \dim(\text{col}(A)) = 2$$

Vimos ainda que o núcleo da matriz tem dimensão 1, sendo portanto

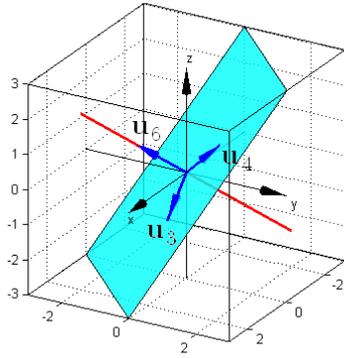
$$\dim(\text{col}(A)) + \dim(\text{Ker}(A)) = \text{car}(A) + \text{nul}(A) = 2 + 1 = 3 = n$$

Os vectores $u_1 = [1 \ 0 \ 1]^T$ e $u_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$ formam uma base do espaço linha, e o vector $u_5 = [-1 \ -1 \ 1]^T$ é uma base do núcleo de A . Podemos verificar que o espaço linha da matriz corresponde ao complemento ortogonal, em \mathbb{R}^3 ,

$$\text{Ker}(A) = \text{lin}(A)^\perp$$



```
>> u1=[1 0 1]';
>> u2=[0 1 1]';
>> u5=[-1 -1 1]';
>> [u1 u2]'*u5
```



```
ans =
    0
    0
```

Os vectores $u_3 = [1 \ 0 \ -1]^T$ e $u_4 = [0 \ 1 \ 1]^T$ formam uma base do espaço coluna, e o vector $u_6 = [1 \ -1 \ 1]^T$ é uma base do núcleo à esquerda de A . Podemos verificar que o espaço coluna da matriz corresponde ao complemento ortogonal, em \mathbb{R}^3 , do núcleo à esquerda de A , ou seja do núcleo de A^T (e vice-versa)

$$\text{Ker}(A^T) = \text{col}(A)^\perp$$



```
>> u3=[1 0 -1]';
>> u4=[0 1 1]';
>> u6=[1 -1 1]';
>> [u3 u4]'*u6
ans =
    0
    0
```

Exercícios.

DETERMINAR UMA BASE PARA O ESPAÇO DAS LINHAS DE UMA MATRIZ.

Como duas matrizes equivalentes por linhas têm o mesmo espaço linha, para determinar uma base do espaço linha de uma matriz, basta seleccionar as linhas não nulas da matriz escalonada equivalente

7. Determinar uma base para o espaço linha da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Determinando a matriz escalonada reduzida equivalente



```
>> A=[2 1 3 1 3; 1 -1 0 1 -1;-1 2 1 -2 0; 3 0 3 0 -6];
```

```
>> L=rref(A)
```

```
L =
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, temos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{L}$$

Seleccionando as linhas não nulas da matriz \mathbf{L} , temos um conjunto de 3 vectores

$$\mathbf{u}_1 = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -2]^T, \mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 3]^T \text{ e } \mathbf{u}_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 4]^T$$

que formam uma base do espaço linha de \mathbf{A} , que tem dimensão 3, $\dim(\text{lin}(\mathbf{A})) = 3$.

DETERMINAR UMA BASE PARA O ESPAÇO DAS COLUNAS DE UMA MATRIZ.

Dado que $\text{col}(\mathbf{A}) = \text{lin}(\mathbf{A}^T)$, para determinar uma base do espaço coluna de uma matriz basta determinar uma base do espaço linha da sua matriz transposta, seleccionando as linhas não nulas da matriz escalonada equivalente a \mathbf{A}^T .

8. Determinar uma base para o espaço coluna da matriz \mathbf{A} do exemplo anterior.

Sendo a matriz transposta

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Determinando a matriz escalonada reduzida equivalente à matriz transposta



```
>> C=rref(A')
```

```
C =
```

```

1     0     0     0
0     1     0     6
0     0     1     3
0     0     0     0
0     0     0     0
```

, temos

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

Seleccionando as linhas não nulas da matriz \mathbf{C} , temos um conjunto de 3 vectores

$$\mathbf{u}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \mathbf{u}_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 6]^T \text{ e } \mathbf{u}_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 3]^T$$

que formam uma base do espaço coluna de \mathbf{A} , que tem dimensão 3, $\dim(\text{col}(\mathbf{A})) = 3$.

A dimensão do espaço coluna é sempre igual à dimensão do espaço linha, e igual à característica da matriz, $\dim(\text{lin}(\mathbf{A})) = \dim(\text{col}(\mathbf{A})) = \text{car}(\mathbf{A}) = 3$.

Caso tenhamos escalonado a matriz \mathbf{A} , podemos determinar uma base do espaço coluna da matriz, seleccionando as colunas de \mathbf{A} correspondentes às colunas com pivot da sua matriz escalonada.

Como vimos no exemplo anterior

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{L}$$

A matriz \mathbf{L} tem pivots na 1ª 2ª e 3ª colunas, seleccionando as colunas respectivas da matriz \mathbf{A} temos um conjunto de 3 vectores

$$\mathbf{u}_1 = [2 \ 1 \ -1 \ 3]^T, \mathbf{u}_2 = [1 \ -1 \ 2 \ 0]^T \text{ e } \mathbf{u}_3 = [1 \ 1 \ -2 \ 0]^T$$

que formam uma base do espaço coluna de \mathbf{A} .

Podemos verificar que se trata de uma combinação linear dos vectores determinados a partir da matriz transposta



```
>> rref([2 1 -1 3;1 -1 2 0;1 1 -2 0])
```

```
ans =
```

```

1     0     0     0
0     1     0     6
0     0     1     3
```

DETERMINAR UMA BASE PARA O NÚCLEO DE UMA MATRIZ.

Para determinar uma base para o núcleo de uma matriz procuramos as soluções do sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

9. Determinar uma base para o núcleo da matriz \mathbf{A} dos exemplos anteriores.

Dada a matriz, procuramos a matriz escalonada reduzida equivalente. Como vimos, temos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, sendo x_3 e x_5 as variáveis livres, temos

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_5 \\ x_2 = -x_3 - 3x_5 \\ x_4 = -4x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 + 2x_5 \\ -x_3 - 3x_5 \\ x_3 \\ -4x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pelo que os 2 vectores

$$\mathbf{u}_1 = [-1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0]^T, \text{ e } \mathbf{u}_2 = [2 \ -3 \ 0 \ -4 \ 1]^T$$

formam uma base do núcleo de \mathbf{A} , sendo a nulidade da matriz $\text{nul}(\mathbf{A}) = \dim(\text{Ker}(\mathbf{A})) = 2$, e $\text{car}(\mathbf{A}) + \text{nul}(\mathbf{A}) = 5 = n$

DETERMINAR UMA BASE PARA O NÚCLEO À ESQUERDA DE UMA MATRIZ.

Para determinar uma base para o núcleo à esquerda de uma matriz procuramos as soluções do sistema homogéneo $\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

10. Determinar uma base para o núcleo à esquerda da matriz \mathbf{A} dos exemplos anteriores.

Dada a matriz, procuramos a matriz escalonada reduzida equivalente à matriz transposta. Como vimos, temos

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, sendo x_4 uma variável livre, temos

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -6x_4 \\ x_3 = -3x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6x_4 \\ -3x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pelo que o vector

$$\mathbf{u}_1 = [0 \ -6 \ -3 \ 1]^T$$

forma uma base do núcleo à esquerda de \mathbf{A} , sendo a nulidade da matriz transposta $\text{nul}(\mathbf{A}^T) = \dim(\text{Ker}(\mathbf{A}^T)) = 1$, e $\text{car}(\mathbf{A}) + \text{nul}(\mathbf{A}^T) = 4 = m$

RELAÇÃO ENTRE OS 4 ESPAÇOS FUNDAMENTAIS DE UMA MATRIZ.

11. Podemos verificar que o espaço linha da matriz \mathbf{A} dos exemplos anteriores corresponde ao complemento ortogonal, em \mathbb{R}^5 , do núcleo da matriz (e vice-versa)

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{lin}(\mathbf{A})^\perp$$



```
>> u1=[1 0 1 0 -2]';
>> u2=[0 1 1 0 3]';
>> u3=[0 0 0 1 4]';
>> u4=[-1 -1 1 0 0]';
>> u5=[2 -3 0 -4 1]';
>> C=[u1 u2 u3];
>> N=[u4 u5];
>> C'*N
ans =
     0     0
     0     0
     0     0
```

, e que o espaço coluna da matriz corresponde ao complemento ortogonal, em \mathbb{R}^4 , do núcleo à esquerda de \mathbf{A} , ou seja do núcleo de \mathbf{A}^T (e vice-versa)

$$\text{Ker}(\mathbf{A}^T) = \text{col}(\mathbf{A})^\perp$$



```
>> u1=[2 1 -1 3]';
>> u2=[1 -1 2 0]';
>> u3=[1 1 -2 0]';
>> Ne=[0 -6 -3 1]';
>> L=[u1 u2 u3];
>> L'*Ne
ans =
     0
     0
     0
```

DETERMINAÇÃO DOS 4 ESPAÇOS FUNDAMENTAIS DE UMA MATRIZ COM O MATLAB

12. O MatLab tem funções predefinidas que permitem o cálculo imediato dos espaços de uma matriz.

As funções **colspace(A)** e **null(A)** determinam uma base do espaço coluna e do núcleo de uma matriz, quando definida simbolicamente.

As funções **orth(A)** e **null(A)** determinam uma base ortonormada do espaço coluna do núcleo de uma matriz quando definida numericamente.

Dada a matriz A dos exemplos anteriores, a determinação dos seus espaços linha e coluna é trivial.



```
>> A=[2 1 3 1 3; 1 -1 0 1 -1;-1 2 1 -2 0; 3 0 3 0 -6];
>> A=sym(A);
>> colspace(A)
ans =
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
[ 0, 0, 1]
[ 0, 6, 3]
>> colspace(A')
ans =
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
[ 1, 1, 0]
[ 0, 0, 1]
[-2, 3, 4]
>> null(A)
ans =
[-1, 2]
[-1, -3]
[ 1, 0]
[ 0, -4]
[ 0, 1]
>> null(A')
ans =
0
-6
-3
1
```

, confirmando as deduções feitas anteriormente.

Recorrendo às funções `orth(A)` e `null(A)` podemos determinar os versores dos 4 espaços fundamentais da matriz



```
>> A=[2 1 3 1 3; 1 -1 0 1 -1;-1 2 1 -2 0; 3 0 3 0 -6];
>> orth(A) % versores do espaço coluna
ans =
0.0982 -0.9910 0.0911
-0.1738 0.0225 0.4321
0.0211 -0.0801 -0.8930
-0.9796 -0.1051 -0.0867
>> orth(A') % versores do espaço linha
ans =
0.3929 0.4500 0.3554
```

```

-0.0420    0.2406   -0.6060
  0.3508    0.6906   -0.2507
  0.0157    0.1658    0.6580
-0.8488    0.4849    0.1031
>> null(A) % versores do núcleo
ans =
  0.7136   -0.0873
  0.0811   -0.7526
-0.4606    0.3534
-0.5060   -0.5323
  0.1265    0.1331
>> null(A') % versores do núcleo à esquerda
ans =
      0
  0.8847
  0.4423
-0.1474
    
```

DETERMINAR UMA BASE PARA O COMPLEMENTO ORTOGONAL DE UM SUBESPAÇO.

Podemos determinar uma base para o complemento ortogonal de um subespaço recorrendo às relações entre os espaços fundamentais de uma matriz.

13. Sendo W o subespaço de \mathbb{R}^5 gerado pelos vectores

$$u_1 = [1 \ -1 \ 0 \ 2 \ 0]^T, \ u_2 = [0 \ 2 \ -1 \ 1 \ 1]^T \ e \ u_3 = [2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1]^T$$

determinar uma base para o complemento ortogonal de W .

Colocando os vectores $u_1, u_2, e u_3$ nas colunas de uma matriz A , W^\perp corresponde ao núcleo da matriz transposta, $\text{Ker}(A^T) = \text{col}(A)^\perp$. Assim, sendo

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

, e determinando a matriz escalonada reduzida equivalente



```

>> u1=[1 -1 0 2 0]';
>> u2=[0 2 -1 1 1]';
>> u3=[2 0 0 -1 1]';
>> U=[u1 u2 u3];
>> rref(U')
ans =
  1.0000    0    0   -0.5000    0.5000
      0    1.0000    0   -2.5000    0.5000
      0    0    1.0000   -6.0000    0
    
```

temos

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo x_4 e x_5 as variáveis livres, temos

$$\begin{cases} x_1 = 0.5x_4 - 0.5x_5 \\ x_2 = 2.5x_4 - 0.5x_5 \\ x_3 = 6x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x_4 - 0.5x_5 \\ 2.5x_4 - 0.5x_5 \\ 6x_4 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2.5 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

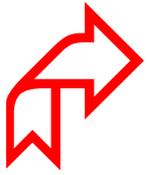
pelo que os 2 vectores

$$\mathbf{w}_1 = [0.5 \ 2.5 \ 6 \ 1 \ 0]^T, \text{ e } \mathbf{w}_2 = [-0.5 \ -0.5 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

formam uma base do complemento ortogonal de \mathbb{W} , o que podemos verificar



```
>> w1=[0.5 2.5 6 1 0]';
>> w2=[-0.5 -0.5 0 0 1]';
>> W=[w1 w2];
>> U'*W
ans =
    0    0
    0    0
    0    0
```



Ortogonalização de Gram-Schmidt.

18. A ortogonalização de Gram-Schmidt é uma sequência de procedimentos que, a partir de uma qualquer base de um subespaço \mathbb{W} de \mathbb{R}^n , permite obter uma base ortonormada para esse subespaço.

Seja $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ uma base de um subespaço \mathbb{W} de \mathbb{R}^n e façamos:

1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ $\mathbb{W}_1 = L(\mathbf{u}_1)$
 2. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1$ $\mathbb{W}_2 = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$
 3. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2$ $\mathbb{W}_3 = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$
- ⋮

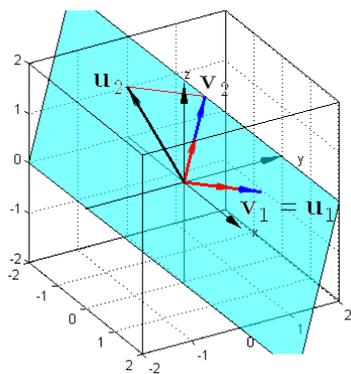
$$\mathbf{k.} \quad \mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i} \mathbf{v}_i \quad \mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$$

Em cada iteração i , $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i\}$ é uma base ortogonal de \mathbb{W}_i , sendo $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ uma base ortogonal de \mathbb{W} . Finalmente, normalizando cada um dos vectores, $\mathbf{q}_i = \mathbf{v}_i / \|\mathbf{v}_i\|$, obtemos uma base ortonormada, $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$, do subespaço \mathbb{W} .



Exemplo 7.

Consideremos os vectores linearmente independentes $\mathbf{u}_1 = [1 \ 1 \ 0]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [-2 \ 0 \ 1]^T$ que formam uma base de um subespaço \mathbb{W} de \mathbb{R}^3 e determinemos uma base ortonormada para \mathbb{W} seguindo o algoritmo de Gram-Schmidt:



$$1. \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = [1 \ 1 \ 0]^T$$

$$\mathbf{v}_2 = \text{perp}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_2$$

$$2. \quad = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$



Exercícios.

ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT.

14. Dados o conjunto de vectores linearmente independentes $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, com $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 2, 1)$, que constituem uma base de um subespaço \mathcal{W} de \mathbb{R}^4 , obter uma base ortonormada para esse subespaço.

Procedendo conforme a ortogonalização de Gram-Schmidt, temos

1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = [1 \ 1 \ 0 \ 1]^T$

2.

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 \\ -1/6 \\ 2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

e finalmente, normalizando cada um dos vectores obtidos, temos

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ e } \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{150} \\ -1/\sqrt{150} \\ 12/\sqrt{150} \\ 2/\sqrt{150} \end{bmatrix}$$



```
>> u1=[1 1 0 1]';
>> u2=[0 2 0 1]';
>> u3=[1 0 2 1]';
>> v1=u1;
```

```

>> v2=u2-(u2'*v1)/(v1'*v1)*v1;
>> v3=u3-(u3'*v2)/(v2'*v2)*v2-(u3'*v1)/(v1'*v1)*v1;
>> q1=v1/norm(v1);
>> q2=v2/norm(v2);
>> q3=v3/norm(v3);
>> [v1 v2 v3]
ans =
    1.0000    -1.0000   -0.1667
    1.0000     1.0000   -0.1667
         0         0     2.0000
    1.0000         0     0.3333
>> [q1 q2 q3]
ans =
    0.5774   -0.7071   -0.0816
    0.5774    0.7071   -0.0816
         0         0     0.9798
    0.5774         0     0.1633

```

, ou simplesmente, recorrendo à função **orth(A)**



```

>> u1=[1 1 0 1]';
>> u2=[0 2 0 1]';
>> u3=[1 0 2 1]';
>> orth([u1 u2 u3])
ans =
   -0.3854    0.2643   -0.7884
   -0.5802   -0.6578    0.2660
   -0.4138    0.7050    0.5401
   -0.5862   -0.0205   -0.1262

```

Nota : A função **orth** não utiliza o algoritmo de Gram-Schmidt para obter os versores do subespaço gerado por $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, pelo que os versores são diferentes.



Matriz Ortogonal. Isometria.

- 19.** Como vimos, uma matriz Q , $n \times n$, diz-se **ortogonal** sse $Q^{-1} = Q^T$ (e portanto $Q^{-1}Q = Q^TQ = I_n$).
- 20.** As colunas de uma matriz ortogonal, tal como as suas linhas, são um conjunto ortonormado de vectores.
- 21.** Sendo Q uma matriz ortogonal
1. $\|Qu\| = \|u\|$
 2. $Qu \cdot Qv = u \cdot v$
 3. Q^{-1} é uma matriz ortogonal.
 4. Se Q_1 e Q_2 são matrizes ortogonais Q_2Q_1 é uma matriz ortogonal.
 5. $\det(Q) = \pm 1$.
 6. Se λ é um valor próprio de Q então $|\lambda| = 1$
- 22.** As colunas de uma matriz Q , $m \times n$, formam um conjunto ortonormado sse $Q^TQ = I_n$.



Exemplo 8.

Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ correspondente a uma rotação de um ângulo θ no sentido directo. Como vimos, a matriz da transformação é

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Dado que

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) & -\cos(\theta)\text{sen}(\theta) + \text{sen}(\theta)\cos(\theta) \\ -\text{sen}(\theta)\cos(\theta) + \cos(\theta)\text{sen}(\theta) & \text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

, concluímos que a matriz de rotação em \mathbb{R}^2 é uma matriz ortogonal, $A^T A = I_n (= A^{-1}A)$. Independentemente do valor de θ , as colunas da matriz (tal como as linhas) formam um conjunto de vectores ortogonais.

Sendo uma matriz ortogonal, então $\|Au\| = \|u\|$, ou seja, as imagens resultantes da transformação têm a mesma norma dos objectos que lhe dão origem, $\|w\| = \|u\|$. Temos ainda que $Au \cdot Av = u \cdot v$, o que significa que, e dado que imagens e objectos têm a mesma norma, os ângulos entre os objectos também são preservados pela transformação.

Uma transformação deste tipo é designada por **isometria** (nalguns contextos designada por **transformação de corpo rígido**): quando aplicada a uma determinada figura geométrica, a transformação mantém as distâncias entre pontos. Os vectores da figura transformada têm comprimento igual aos da figura original, podendo variar a direcção e o sentido, e os ângulos entre eles mantêm a sua amplitude. A rotação e a reflexão são exemplos de isometria simples (embora não sendo uma transformação linear a translação também é uma isometria).

Qualquer transformação linear em que a matriz associada seja ortogonal é uma isometria.



Exercícios.

VERIFICAR SE UMA MATRIZ É ORTOGONAL.

Uma matriz quadrada, Q , diz-se ortogonal se $Q^{-1} = Q^T$, e portanto $Q^{-1}Q = Q^TQ = I_n$, pelo que, para verificar se uma matriz é ortogonal, basta verificar se $Q^TQ = I_n$.

15. Verificar se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal.

Temos

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I_2$$

, logo, A é uma matriz ortogonal.



```
>> u= 1/sqrt(2);
>> A=[u u; -u u];
>> A*A'
ans =
    1.0000    0
         0    1.0000
```

16. Verificar se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal.

Temos

$$AA^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \neq I_3$$

, logo, A não é uma matriz ortogonal.



```
>> A=[-2 0 1; 1 -1 2; 0 2 1];
>> A*A'
ans =
     5     0     1
     0     6     0
     1     0     5
```

17. Verificar se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\sin(\theta) & -\cos(\theta) & -\sin^2(\theta) \\ \cos^2(\theta) & \sin(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal.

Temos

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

, logo, A é uma matriz ortogonal.



```
>> syms t
>> A=[cos(t)*sin(t)   -cos(t)   -sin(t)^2   ;...
      cos(t)^2        sin(t)   -cos(t)*sin(t);...
      sin(t)          0        cos(t)];
>> simplify(A*A.')
ans =
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
[ 0, 0, 1]
```

VERIFICAR SE UMA DADA TRANSFORMAÇÃO LINEAR É UMA ISOMETRIA.

Qualquer transformação linear em que a matriz associada seja ortogonal é uma isometria, pelo que, para verificar se um transformação linear é uma isometria basta verificar se a matriz da transformação é ortogonal.

18. Verificar se uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ consistindo numa reflexão sobre o plano \mathbf{xz} , seguida de uma rotação de $\theta = -\pi/2$ sobre o eixo dos \mathbf{zz} é uma isometria

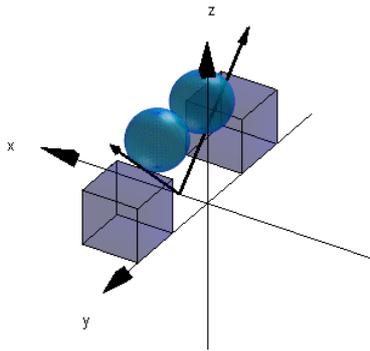
Sendo a matriz de uma reflexão sobre o plano \mathbf{xz}

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, e a matriz de uma rotação de $\theta = -\pi/2$ sobre o eixo dos \mathbf{zz}

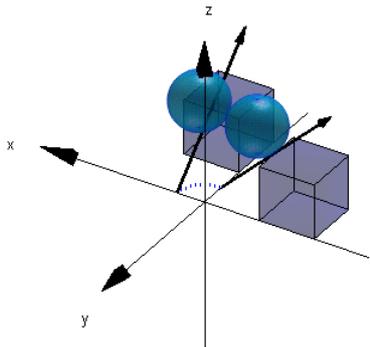
$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz da transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é



$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para verificar se a transformação linear é uma isometria vamos verificar se a matriz \mathbf{A} é ortogonal



$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3 \end{aligned}$$

, logo a transformação linear é uma isometria.



```
>> A1=[1 0 0;0 -1 0;0 0 1];
>> A2=[0 1 0;-1 0 0;0 0 1];
>> A=A2*A1;
>> A'*A
ans =
    1    0    0
    0    1    0
    0    0    1
```



Factorização QR.

23. Uma matriz A , $m \times n$, com colunas linearmente independentes, pode ser factorizada na forma

$$A = QR$$

, em que Q é uma matriz $m \times n$ de colunas ortonormadas, e R é uma matriz $n \times n$ triangular superior invertível.

Seja $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$, a matriz $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$ pode ser obtida por ortogonalização de Gram-Schmidt das colunas da matriz A , sendo

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} a_1 \cdot q_1 & a_2 \cdot q_1 & \dots & a_n \cdot q_1 \\ 0 & a_2 \cdot q_2 & \dots & a_n \cdot q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \cdot q_n \end{bmatrix}$$



Exemplo 9.

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

podemos verificar que as suas colunas são linearmente independentes

$$[A \ | \ \mathbf{0}] \sim [I \ | \ \mathbf{0}]$$



```
>> u1=[1 1 1]';
>> u2=[0 1 1]';
>> u3=[0 0 1]';
>> A=[u1 u2 u3];
>> rref(A)
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

Recorrendo à ortogonalização de Gram-Schmidt, podemos obter uma base ortonormada para o subespaço gerado pelas colunas da matriz A , calculando os sucessivos versores

$$v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{u_k \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} v_i$$

Temos então

1. $v_1 = u_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$

2. $v_2 = \text{perp}_{v_1} u_2 = u_2 - \text{proj}_{v_1} u_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

$$3. \mathbf{v}_3 = \text{perp}_{W_2} \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2} \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

e finalmente

$$4. \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Assim sendo, temos

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \dots \quad \mathbf{q}_n] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Temos assim que a matriz \mathbf{A} é factorizável na forma $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, sendo

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Embora possamos recorrer ao MatLab para proceder ao cálculos das matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} conforme acima ficou descrito, o procedimento é desnecessário dada a existência da função **qr(A)** que procede à factorização QR da matriz \mathbf{A}



```
>> u1=[1 1 1]';
>> u2=[0 1 1]';
>> u3=[0 0 1]';
>> A=[u1 u2 u3];
>> [Q R]=qr(A)
Q =
    -0.5774    0.8165   -0.0000
    -0.5774   -0.4082   -0.7071
    -0.5774   -0.4082    0.7071
R =
    -1.7321   -1.1547   -0.5774
         0    -0.8165   -0.4082
         0         0    0.7071
```

Exercícios.

CÁLCULO DE VALORES PRÓPRIOS POR FACTORIZAÇÃO QR

A factorização QR tem várias aplicações no domínio dos métodos numérico, sendo uma delas o cálculo dos valores próprios de uma matriz.

O processo numérico iterativo consiste em, dada a matriz A , factorizar em cada passo a matriz $A_k = Q_k R_k$ e criar a matriz $A_{k+1} = R_{k+1} Q_{k+1}$. Com este procedimento, os valores da diagonal da matriz A_{k+1} convergem para os valores próprios da matriz A .

19. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

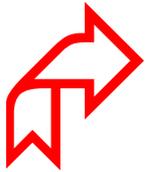
Recorrendo ao MatLab, vamos calcular os valores próprios da matriz recorrendo à factorização QR



```
A=[1 0 -1;1 2 1;-4 0 1];
for i=1:15
    [Q R]=qr(A);
    B=R*Q;
    [Q R]=qr(B);
    A=R*Q;
    diag(A) '
end
ans =
    3.2667    1.9805   -1.2472
    3.0675    1.9619   -1.0295
    3.0277    1.9756   -1.0033
    3.0125    1.9878   -1.0004
    3.0057    1.9944   -1.0000
    3.0025    1.9975   -1.0000
    3.0011    1.9989   -1.0000
    3.0005    1.9995   -1.0000
    3.0002    1.9998   -1.0000
    3.0001    1.9999   -1.0000
    3.0000    2.0000   -1.0000
    3.0000    2.0000   -1.0000
    3.0000    2.0000   -1.0000
    3.0000    2.0000   -1.0000
    3.0000    2.0000   -1.0000
```

Podemos confirmar o processo recorrendo à função eig(A)

```
>> [V D]=eig(A);
>> diag(D) '
    3.0000    2.0000   -1.0000
```



Diagonalização de Matrizes Simétricas. Decomposição espectral.

24. Recordemos que uma matriz quadrada A se diz **simétrica** se $A^T = A$, e **ortogonal** se $A^{-1} = A^T$

25. Os valores próprios de uma matriz simétrica real são números reais.

26. Os vectores próprios de uma matriz simétrica associados a valores próprios diferentes são ortogonais.

27. Toda a matriz simétrica é diagonalizável por uma matriz ortogonal, ou seja, existe uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal D , tais que

$$A = QDQ^T$$

, sendo D composta pelos valores próprios de A e Q obtida a partir dos vectores próprios.

28. A factorização $A = QDQ^T$ pode ser escrita na forma

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$$

, em que \mathbf{q}_i é a coluna i da matriz Q , chamada **decomposição espectral** da matriz A .



Exemplo 10.

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

, podemos determinar os seus valores próprios a partir do polinómio característico. Sendo

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

, os valores próprios da matriz A são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, e $\lambda_3 = 1$

Podemos agora determinar os vectores próprios associados resolvendo os sistemas homogéneos correspondentes. Assim, para $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ temos

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que o conjunto de todos os vectores próprios associados a $\lambda_1 = 3$, é

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para $(A - \lambda_2 I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ temos

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que o conjunto de todos os vectores próprios associados a $\lambda_2 = 2$, é

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, e, para $(A - \lambda_3 I)v = 0$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que o conjunto de todos os vectores próprios associados a $\lambda_3 = 1$, é

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A matriz **A** tem 3 valores próprios diferentes, pelo que os valores próprios são ortogonais. Temos então

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Normalizando cada um dos valores próprios, resulta

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos então a matriz **A** diagonalizada por uma matriz ortogonal

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

, como podemos verificar



```
>> A=[2 -1 0;-1 2 0;0 0 2];
>> [V D]=eig(A);
>> V*D*V'
ans =
    2.0000    -1.0000         0
   -1.0000     2.0000         0
         0         0     2.0000
```

Exercícios.

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS

20. Determinar a matriz ortogonal que diagonaliza a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz \mathbf{A} tem valores próprios $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, e $\lambda_3 = 4$, tendo associado ao valor próprio $\lambda_{1,2} = 2$ os vectores próprios $\mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ 0]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [0 \ 0 \ 1]^T$, e ao valor próprio $\lambda_3 = 4$ o valor próprio $\mathbf{v}_3 = [1 \ -1 \ 0]^T$ (como poderíamos deduzir pelo método habitual).

Como a matriz tem valores próprios iguais não temos a garantia que os vectores próprios sejam ortogonais. \mathbf{v}_3 é necessariamente ortogonal a \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , quanto a estes dois, dado que estão associados a valores próprio iguais, é necessário verificar. Temos

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Os vectores são ortogonais, pelo que basta construir a matriz dos vectores próprios e normalizar cada um deles para obter a matriz ortogonal que diagonaliza a matriz \mathbf{A} .

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos verificar



```
>> A=[3 -1 0;-1 3 0;0 0 2];
>> [V D]=eig(A)
V =
   -0.7071         0   -0.7071
   -0.7071         0    0.7071
         0    1.0000         0
D =
     2     0     0
     0     2     0
     0     0     4
>> V*D*V'
ans =
     3.0000   -1.0000         0
    -1.0000     3.0000         0
         0         0     2.0000
```

(Nota: Se \mathbf{A} for uma matriz simétrica, em resultado do algoritmo utilizado no cálculo pelo MatLab, a função `eig(A)` devolve uma matriz ortogonal de vectores próprios.)

21. Determinar a matriz ortogonal que digonaliza a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

A matriz \mathbf{A} tem valores próprios $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, e $\lambda_3 = 8$, tendo associado ao valor próprio $\lambda_{1,2} = 2$ os vectores próprios $\mathbf{v}_1 = [-1 \ 1 \ 0]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [-1 \ 0 \ 1]^T$, e ao valor próprio $\lambda_3 = 8$ o valor próprio $\mathbf{v}_3 = [1 \ 1 \ 1]^T$ (como poderíamos deduzir pelo método habitual).

Como a matriz tem valores próprios iguais não temos a garantia que os vectores próprios sejam ortogonais. \mathbf{v}_3 é necessariamente ortogonal a \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , quanto aos dois últimos temos

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$$

, pelo que os vectores não são ortogonais, é por isso necessário, recorrendo ao método de Gram-Smidt, encontrar uma base ortogonal para o subespaço próprio de $\lambda_{1,2} = 2$. Temos então

$$1. \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 = [-1 \ 1 \ 0]^T$$

$$2. \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proj}_{\mathbf{v}'_1} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}'_1}{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_1} \mathbf{v}'_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ficamos assim com 3 vectores ortogonais, pelo que basta construir a matriz dos vectores próprios e normalizar cada um deles para obter a matriz ortogonal que digonaliza a matriz \mathbf{A}

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Podemos verificar que a matriz é ortogonal, e que diagonaliza a matriz \mathbf{A}



```
>> Q=[-1/sqrt(2) -1/sqrt(6) 1/sqrt(3);...
      1/sqrt(2) -1/sqrt(6) 1/sqrt(3);...
      0 2/sqrt(6) 1/sqrt(3)];

>> Q'*Q
ans =
    1.0000    0    0
         0    1.0000    0
         0    0    1.0000

>> D=[2 0 0;0 2 0;0 0 8];
>> Q*D*Q'
ans =
    4.0000    2.0000    2.0000
    2.0000    4.0000    2.0000
    2.0000    2.0000    4.0000
```

DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL DE UMA MATRIZ SIMÉTRICA.

22. Conhecidos os valores próprios e a matriz Q , podemos escrever a matriz A na forma da sua decomposição espectral

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$$

Temos então

$$\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_3 \mathbf{q}_3^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

, pelo que, e reordenando os valores próprios por ordem decrescente, a decomposição espectral da matriz A é

$$A = 8 \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja o vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i \mathbf{u} &= \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{u} = \mathbf{q}_i (\mathbf{u}^T \mathbf{q}_i)^T = \mathbf{q}_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i)^T \\ &= \mathbf{q}_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i) && \text{(dado que } \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i \text{ é um escalar)} \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i) \mathbf{q}_i \\ &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_i}{\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i} \mathbf{q}_i && \text{(dado que } \|\mathbf{q}_i\| = 1) \\ &= \text{proj}_{\mathbf{q}_i} \mathbf{u} \end{aligned}$$

Cada uma das matrizes $\mathbf{M}_i = \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$ corresponde à matriz de projecção no subespaço gerado por \mathbf{q}_i , ou seja, corresponde à matriz de projecção no subespaço próprio de λ_i .

Por exemplo, para $\mathbf{u} = [1 \ 2 \ 3]^T$



```
>> q1=Q(:,1); q2=Q(:,2); q3=Q(:,3);
>> M1=q1*q1'; M2=q2*q2'; M3=q3*q3';
>> u=[1 2 3]';
>> [(u'*q3)*q3 (u'*q2)*q2 (u'*q1)*q1]
ans =
      2          -1/2          -1/2
```

```

2          -1/2         1/2
2          1           0
>> [M3*u M2*u M1*u]
ans =
2          -1/2        -1/2
2          -1/2         1/2
2          1           0
    
```

, temos $\mathbf{u} = \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1$, sendo $\mathbf{u}_3 = [2 \ 2 \ 2]^T$, $\mathbf{u}_2 = [-1/2 \ -1/2 \ 1]^T$, $\mathbf{u}_1 = [-1/2 \ 1/2 \ 0]^T$ as projecções de \mathbf{u} sobre cada um dos subespaços próprios. A transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a que a matriz \mathbf{A} está associada transforma o vector \mathbf{u} no vector $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = 8\mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_1$

```


>> 8*M3*u + 2*M2*u + 2*M1*u
ans =
    14
    16
    18
>> w=A*u
w =
    14
    16
    18
    
```

DETERMINAR UMA MATRIZ COM VALORES E VECTORES PRÓPRIOS ESPECÍFICOS.

Determinar uma matriz simétrica com valores e vectores próprios (ortogonais) específicos é trivial, quer a partir da decomposição $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$, quer a partir da decomposição espectral da matriz $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$.

23. Determinar a matriz simétrica \mathbf{A} com valores próprios $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$, e vectores próprios $\mathbf{v}_1 = [-1 \ 1]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [1 \ 1]^T$.

Sendo \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 ortogonais, basta calcular o respectivos versores $\mathbf{q}_1 = [-1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]^T$ e $\mathbf{q}_2 = [1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]^T$, resultando

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

```


>> D=[4 0;0 2];
Q=[-1/sqrt(2) 1/sqrt(2); 1/sqrt(2) 1/sqrt(2)];
A=Q*D*Q'
A =
    3.0000    -1.0000
   -1.0000    3.0000
    
```