

Módulo 09

- Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.



Espaço de Sinais.

[Poole 431 a 518, 650 a 660]

O corpo dos complexos.

Plano complexo. Forma cartesiana e polar.

Fórmula de Euler e teorema de DeMoivre.

Raízes de números complexos

Funções complexas de variável complexa.

Sinais.

Sinais contínuos e discretos.

Sinais periódicos e não periódicos.

Função exponencial complexa contínua.

Função exponencial complexa discreta.

Função impulso unitário discreto.

Espaços vectoriais.

Estruturas algébricas. Grupóide. Semigrupo. Monóide. Grupo.

Grupo comutativo. Anel. Corpo.

Espaço vectorial.

Subespaço vectorial. Combinação linear. Subespaço gerado.

Independência linear.

Base e dimensão.

9.1. O Corpo dos Complexos.

Define-se um **número complexo** como

$$z = a + jb$$

, onde a e b são números reais e j (ou i), designa a **unidade imaginária**

$$j = \sqrt{-1}$$

Designamos a por **parte real** de z , $a = \operatorname{Re}\{z\}$, e b por **parte imaginária** de z , $b = \operatorname{Im}\{z\}$, dizendo-se no caso em que $a = 0$ que z é um número **imaginário puro**.

Dado o número complexo $z = a + jb$ define-se o seu **conjugado** como $z^* = a - jb$

Entre dois número complexos, $z = a + jb$ e $w = c + jd$, definem-se as operações básicas:

igualdade: $a + jb = c + jd$ sse $a = c$ e $b = d$;

adição: $z + w = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$;

multiplicação: $zw = (a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$;

divisão: $\frac{z}{w} = \frac{(a + jb)}{(c + jd)} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$.

Com a igualdade, adição e multiplicação assim definidas, podem demonstrar-se as leis (comutativa, associativa, fecho, etc.) que nos permitem concluir que o conjunto dos números complexos, \mathbb{C} , tal como o conjunto dos números reais, constitui um **corpo**.

Exemplo 1.

Dados os complexos $z = 2 - j$ e $w = 1 + 2j$, temos

$$\begin{aligned} z^* &= 2 + j \\ z + w &= (2 - j) + (1 + 2j) = 3 - j \\ z - w &= (2 - j) - (1 + 2j) = 1 - 3j \\ zw &= (2 - j)(1 + 2j) = 4 + 3j \\ \frac{z}{w} &= \frac{2 - j}{1 + 2j} = -j \end{aligned}$$

Exemplo 2.

Podemos simplificar o complexo $z = \frac{3j^{30} - j^{19}}{2j - 1}$

$$\begin{aligned} z &= \frac{3(j^2)^{15} - (j^2)^9 j}{2j - 1} = \frac{3(-1)^{15} - (-1)^9 j}{2j - 1} \\ &= \frac{-3 + j}{-1 + 2j} = \frac{-3 + j}{-1 + 2j} \frac{-1 - 2j}{-1 - 2j} \\ &= \frac{3 + 6j - j - 2j^2}{1 + 4} = \frac{5 + 5j}{5} \\ &= 1 + j \end{aligned}$$

9.2. Plano Complexo. Forma Cartesiana e Polar.

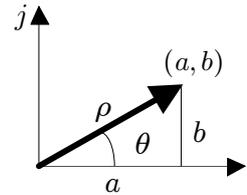
Com a adição e multiplicação entre números complexos como definidas acima, podemos interpretar um número complexo

$$z = a + jb$$

como um **par ordenado** de números reais (a, b) representáveis num plano cartesiano xy .

Designamos o plano de representação por **plano complexo**, **plano de Argand**, ou **plano z** , o eixo dos xx é designado por **eixo real** e o eixo dos yy é designado por **eixo imaginário**.

A cada número complexo corresponde um, e um só, ponto do plano, e a cada ponto do plano corresponde um, e um só, número complexo. Um número complexo pode assim interpretado como um segmento orientado OP , cuja origem, O , é a origem do plano complexo e cujo extremo, P , é o ponto correspondente ao par ordenado (a, b) .



Quando escrito na forma $z = a + jb$, o complexo z diz-se escrito na **forma retangular** (ou **cartesiana**). Podemos escrever um número complexo z noutra forma, dita **forma polar** (ou **exponencial**)

$$z = \rho e^{j\theta}$$

, em que ρ representa o **módulo**, ou **valor absoluto**, do complexo, e θ o seu **argumento**. O módulo é facilmente obtido, recorrendo à representação gráfica do complexo, interpretado como um vector,

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

,ou, multiplicando o complexo pelo seu conjugado

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{zz^*} = \sqrt{(a + jb)(a - jb)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Quando o complexo está expresso na forma polar, o reconhecimento do módulo é imediato

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{zz^*} = \sqrt{\rho e^{j\theta} \rho e^{-j\theta}} \\ &= \rho \end{aligned}$$

Quanto ao argumento, recorrendo à representação gráfica

$$\theta = \arg\{z\} = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

idêntico à relação a partir da forma retangular

$$\begin{aligned} \arg\{z\} &= \arctan\left(\frac{\text{Im}\{z\}}{\text{Re}\{z\}}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

Exemplo 3.

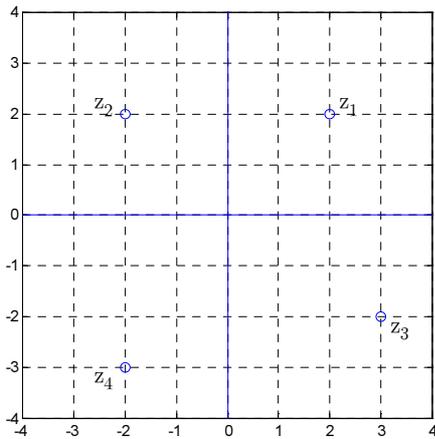


Figura M9.1

A figura M9.1 mostra a representação dos números complexos

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 + 2j \\ z_2 &= -2 + 2j \\ z_3 &= 3 - 2j \\ z_4 &= -2 - 3j \end{aligned}$$

no plano complexo.

Exemplo 4.

O complexo $z = (1 - j)(-1 + j\sqrt{3})$, tendo em atenção que

$$\begin{aligned} \rho_1 &= |1 - j| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \\ \rho_2 &= |-1 + j\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2 \end{aligned}$$

, e ainda que

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arg\{1 - j\} = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} \\ \theta_2 &= \arg\{-1 + j\sqrt{3}\} = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{4\pi}{6} \end{aligned}$$

(notando que $1 - j$ está no 4° quadrante e $-1 + j\sqrt{3}$ está no 2° quadrante) pode ser escrito na forma polar

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} 2e^{-j\frac{4\pi}{6}} \\ &= 2\sqrt{2}e^{-j\frac{5\pi}{12}} \end{aligned}$$

9.3. Fórmula de Euler e Teorema de DeMoivre

De notar que, a partir da representação gráfica, e dado que $\cos(\theta) = \frac{a}{\rho}$ e $\sin(\theta) = \frac{b}{\rho}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} z &= a + jb = \rho(\cos(\theta) + j \sin(\theta)) \\ &= \rho \operatorname{cis}(\theta) \end{aligned}$$

dita, também, forma polar de representação do complexo z . Na verdade, a forma anteriormente apresentada

$$z = \rho e^{j\theta}$$

resulta da **fórmula de Euler**

$$e^{\pm jx} = \cos(x) \pm j \sin(x)$$

, com x real. A partir da fórmula de Euler obtêm-se as definições das funções seno e co-seno com base na função e^{jx} , dita função exponencial complexa ,

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

O produto e a divisão entre dois complexo é mais facilmente obtido quando estes estão escritos na forma polar

$$\begin{aligned} zw &= \rho_1 e^{j\theta_1} \rho_2 e^{j\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \\ \frac{z}{w} &= \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)) \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

Generalizando o produto, temos ainda que

$$\begin{aligned} z^n &= \rho e^{j\theta} \rho e^{j\theta} \dots \rho e^{j\theta} = \rho^n e^{jn\theta} \\ &= \rho^n (\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)) = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta) \end{aligned}$$

, relação conhecida por **teorema de DeMoivre**.

Exemplo 5.

Recorrendo à fórmula de Euler, as relações trigonométricas podem ser facilmente demonstradas. Por exemplo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \frac{e^{j\left(\frac{\pi}{2} - z\right)} - e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - z\right)}}{2j} = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-jz} - e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{jz}}{2j} \\ &= \frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) e^{-jz} - \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) e^{jz}}{2j} \\ &= \frac{(0 + j) j e^{-jz} - (0 - j) e^{jz}}{2j} = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = \cos(z) \end{aligned}$$

9.4. Raízes de Números Complexos.

Um número w diz-se **uma n-ésima raiz de um número complexo** z se $w^n = z$, ou seja, $w = z^{1/n}$.

Atendendo ao teorema de De Moivre podemos demonstrar que, sendo n um inteiro positivo,

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \rho^{1/n} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + j \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right) \\ &= \rho^{1/n} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) && \text{com } k = 0, 1, \dots, n - 1 \\ &= \rho^{1/n} e^{j(\theta + 2k\pi)/n} \end{aligned}$$

pelo que, existem n valores diferentes para $z^{1/n}$, ou seja, n diferentes raízes n-ésimas de z .

Em particular, as soluções da equação $z^n = 1$, sendo n um inteiro positivo, são chamadas as *n-ésimas raízes da unidade*, sendo

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[n]{1} \\ &= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + j \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= e^{j2k\pi/n} \end{aligned}$$

, com $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Geometricamente elas correspondem a pontos do plano complexo equiespaçados sobre a circunferência de equação $|z| = 1$, dito o **círculo unitário**.

Exemplo 6.

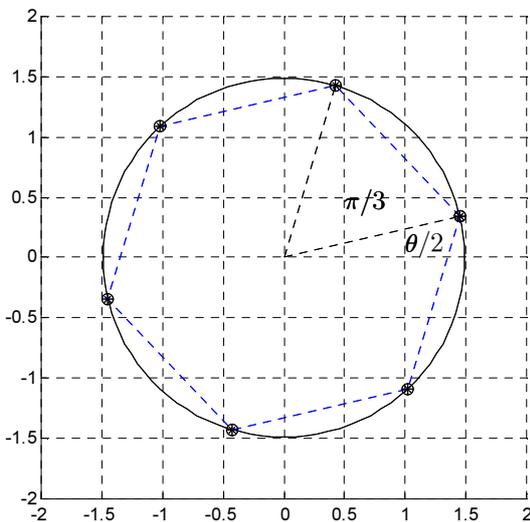


Figura M9.2

1. Dado $z^6 = (2 + j)^3$, sendo para $2 + j$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{4 + 1} = 5^{\frac{1}{2}} \\ \theta &= \arg\left\{ \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

temos

$$z^6 = (5^{\frac{1}{2}} e^{j\theta})^3 = 5^{\frac{3}{2}} e^{j3\theta}$$

, logo

$$\begin{aligned} z &= (5^{\frac{3}{2}} e^{j3\theta})^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{3}{12}} e^{j\left(\frac{3\theta + 2k\pi}{6}\right)} \\ &= 5^{\frac{1}{4}} e^{j\left(\frac{\theta}{2} + k\frac{2\pi}{6}\right)} \\ &= 5^{\frac{1}{4}} e^{j\left(\frac{\theta}{2} + k\frac{\pi}{3}\right)} \end{aligned}$$

, com $k = 0, 1, \dots, 5$. Geometricamente temos seis complexos sobre a circunferência de módulo $5^{1/4}$ e equiespaçados de $k\pi/3$ como se representa na figura M9.2.

9.5. Funções Complexas de Variável Complexa.

Uma aplicação f , em que as variáveis dependente, w , e independente, z , pertencem ambas a um qualquer subconjunto do corpo dos complexos é dita uma **função complexa de variável complexa**, e escrevemos $w = f(z)$.

Para as funções complexas de variável complexa têm lugar, identicamente ao visto em Análise Matemática, os conceitos de: objecto, imagem, domínio, contradomínio; função sobrejectiva, injectiva e bijectiva; restrição e extensão de uma função; função inversa, função composta; etc..

Caso o domínio da função seja um subconjunto de \mathbb{C} e o contradomínio um subconjunto de \mathbb{R} a função diz-se uma **função real de variável complexa**. Caso o domínio da função seja um subconjunto de \mathbb{R} e o contradomínio um subconjunto de \mathbb{C} a função diz-se uma **função complexa de variável real**.

Exemplo 7.

A função $w = f(z) = z^2$, com $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} w &= z^2 \\ u + jv &= (x + jy)^2 \\ &= (x^2 - y^2) + j2xy \end{aligned}$$

, com $u, v, x, y \in \mathbb{R}$, é uma função complexa de variável complexa, $w \in \mathbb{C}$. Quer o domínio quer o contradomínio da função correspondem a todo o plano complexo.

Exemplo 8.

A função $w = e^{jx}$, com $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} w &= e^{jx} \\ u + jv &= \cos(x) + j \sin(x) \end{aligned}$$

, é uma função complexa de variável real, $w \in \mathbb{C}$. Note-se que o contradomínio da função corresponde apenas, no plano complexo, à circunferência de raio unitário, dado que $|w| = |e^{jx}| = 1$.

Exemplo 9.

A função $u = |z|$, com $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} u &= |z| = |x + jy| \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

, é uma função real de variável complexa, $u \in \mathbb{R}_0^+$.

9.6. Sinais. Sinais Contínuos e Sinais Discretos.

Definimos **sinal** como uma função de uma ou mais variáveis independentes, contendo informação sobre um determinado fenómeno físico.

Com base nas suas características, os sinais podem ser classificados de diversos modos. Abordaremos por enquanto apenas a classificação de sinais que dependem de apenas uma variável independente, e o modo como são classificados com base no conjunto de valores assumidos por essa variável.

Sinal contínuo.

Um sinal diz-se um sinal contínuo quando a variável independente é contínua.

Vamos admitir que o domínio do sinal é o conjunto dos reais, e (sem perda de generalidade) está associada ao tempo, e o contradomínio do sinal pertence ao conjunto dos complexos.

Utilizaremos a letra t para a designar a variável independente e, preferencialmente, as letras x, y, z para designar o operador. Assim, um sinal contínuo é uma função $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, significando $x(t)$ o valor que o sinal assume no instante de tempo t .

Sinal discreto.

Um sinal diz-se um sinal discreto quando a variável independente é discreta.

Vamos admitir que o domínio do sinal é o conjunto dos inteiros, e o contradomínio do sinal pertence ao conjunto dos complexos.

Utilizaremos a letra n para a designar a variável independente e, preferencialmente, as letras x, y, z para designar o operador. Assim, um sinal discreto é uma função $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, significando $x[n]$ o valor que o sinal assume no instante n , que, e sem perda de generalidade admitimos estar, de algum modo, associada ao tempo.

Exemplo 10.

O sinal $x(t)$, definido por

$$x(t) = \cos(t) e^{-0.1t}$$

com $t \in \mathbb{R}$, cuja evolução para $0 \leq t \leq 20$ se mostra na figura M9.4, é um sinal contínuo.

O sinal $x[n]$, definido por

$$x[n] = \cos(0.5n) e^{-0.05n}$$

com $n \in \mathbb{Z}$, cuja evolução para $0 \leq n \leq 40$ se mostra na figura M9.3, é um sinal discreto.

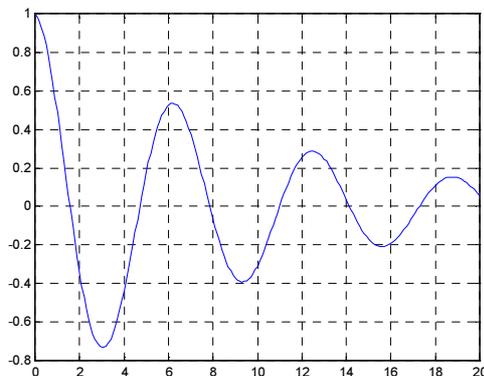


Figura M9.4

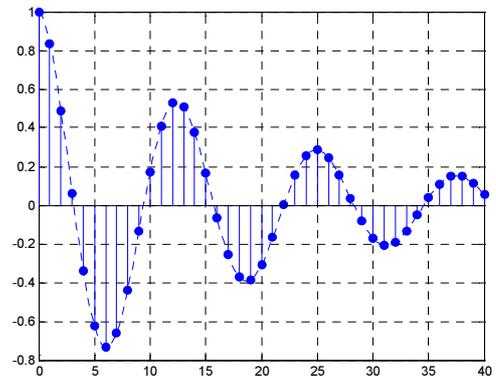


Figura M9.3

9.7. Função Exponencial Complexa Contínua.

Um dos sinais que utilizará nas cadeiras da especialidade é designado por função exponencial complexa de variável contínua

Exponencial complexa contínua.

O sinal

$$x(t) = Ce^{at}$$

em que C e a são, em geral, números complexos é designado por sinal exponencial complexo contínuo.

Escrevendo C na forma polar

$$C = |C|e^{j\theta_0}$$

, e a na forma cartesiana

$$a = \tau + j\omega_0$$

, temos

$$x(t) = Ce^{at} = |C|e^{j\theta_0}e^{(\tau + j\omega_0)t} = |C|e^{\tau t}e^{j(\omega_0 t + \theta_0)}$$

Torna-se assim explícito que a exponencial complexa tem módulo

$$|x(t)| = |C|e^{\tau t}$$

, e argumento

$$\arg\{x(t)\} = \omega_0 t + \theta_0$$

Atendendo à relação de Euler, podemos escrever

$$\begin{aligned} x(t) &= |C|e^{\tau t}e^{j(\omega_0 t + \theta_0)} \\ &= |C|e^{\tau t} \cos(\omega_0 t + \theta_0) + j|C|e^{\tau t} \sin(\omega_0 t + \theta_0) \end{aligned}$$

, o que torna claro que quer a componente real quer a componente imaginária de um sinal exponencial complexo tem uma evolução sinusoidal de período $T_0 = 2\pi/\omega_0$, envolvido por uma exponencial real com um comportamento ao longo do tempo determinado por τ .

$$\text{Re}\{x(t)\} = |C|e^{\tau t} \cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

$$\text{Im}\{x(t)\} = |C|e^{\tau t} \sin(\omega_0 t + \theta_0)$$

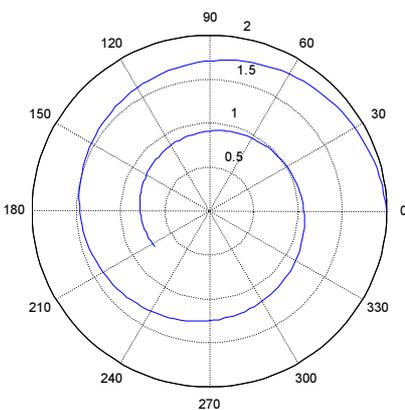


Figura M9.5

Exemplo 11.

O sinal $x(t) = 2e^{(-0.05 + j0.5)t}$, com $t \in \mathbb{R}$, é uma função $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Atribuindo valores a t podemos fazer a sua representação no plano complexo

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{(-0.05 + j0.5)t} \\ &= 2e^{-0.05t}e^{j0.5t} \end{aligned}$$

A figura M9.5 (optou-se aqui pela representação polar e não pela representação cartesiana) mostra a evolução de $x(t)$ para $0 < t < 20$.

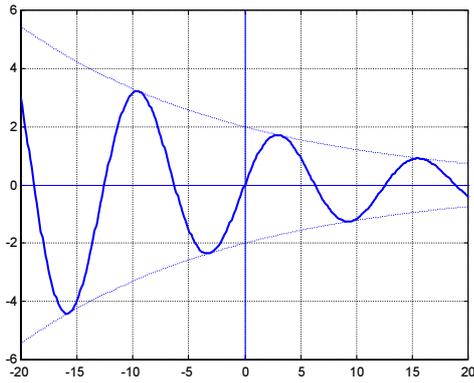


Figura M9.7

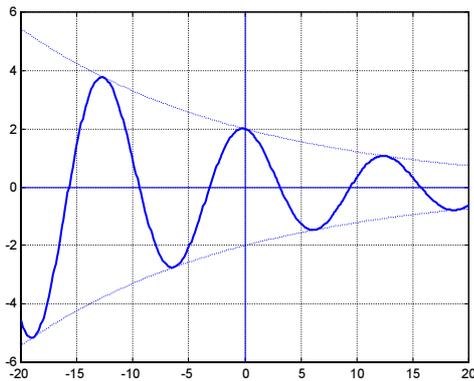


Figura M9.6

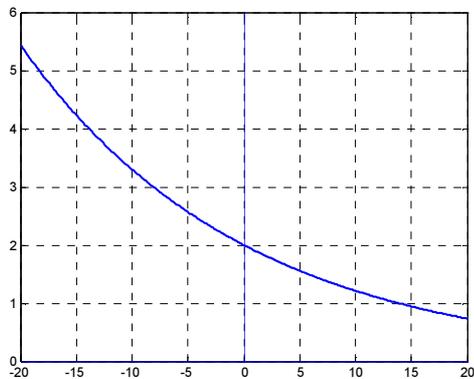


Figura M9.8

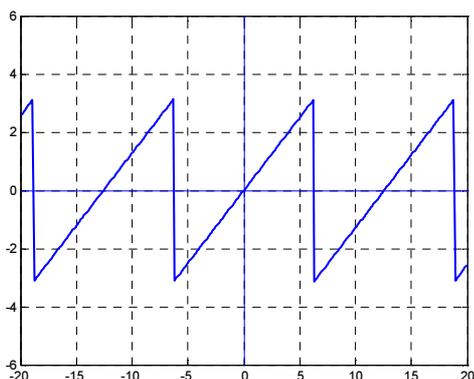


Figura M9.9

Podemos optar por fazer a representação, em dois gráficos separados, da parte real e da parte imaginária da função. Sendo

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 e^{-0.05t} e^{j0.5t} \\ &= 2 e^{-0.05t} (\cos(0.5t) + j \sin(0.5t)) \end{aligned}$$

, temos

$$\text{Re}\{x(t)\} = 2 e^{-0.05t} \cos(0.5t)$$

$$\text{Im}\{x(t)\} = 2 e^{-0.05t} \sin(0.5t)$$

As figuras M9.7 e M9.6 mostram, respectivamente, a evolução da parte real e da parte imaginária de $x(t)$ para $-20 < t < 20$. Como se pode ver a evolução traduz a evolução das funções trigonométricas $\cos(0.5t)$ e $\sin(0.5t)$ afectadas pela multiplicação pela exponencial negativa $e^{-0.05t}$.

A representação mais comum, na área de Telecomunicações e Electrónica, não é no entanto nenhuma destas duas, mas sim a representação do módulo e do argumento de $x(t)$ em planos separados. Temos

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 e^{-0.05t} e^{j0.5t} \\ &= \left| 2 e^{-0.05t} e^{j0.5t} \right| \\ &= 2 e^{-0.05t} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \arg\{x(t)\} &= \arg\{2 e^{-0.05t} e^{j0.5t}\} \\ &= 0.5t \end{aligned}$$

As figuras M9.8 e M9.9 mostram, respectivamente, a evolução do módulo e do argumento de $x(t)$. Na evolução do argumento optou-se pela representação periódica entre $-\pi$ e π , embora, obviamente, esteja em causa apenas a representação da recta $\theta = 0.5t$.

9.8. Função Exponencial Complexa Discreta.

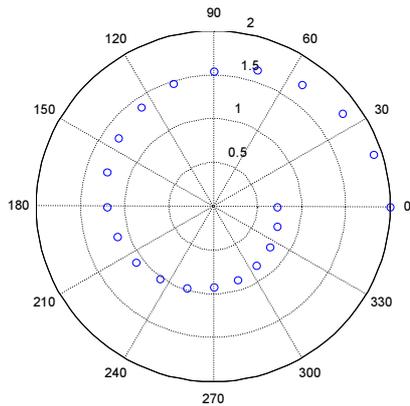


Figura M9.10

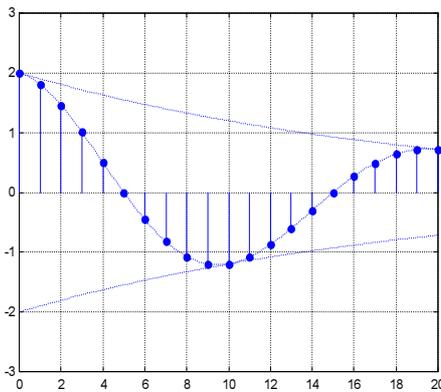


Figura M9.11

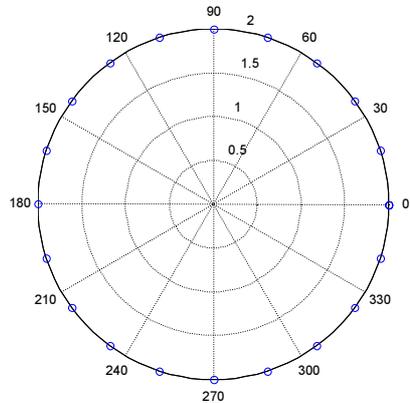


Figura M9.12

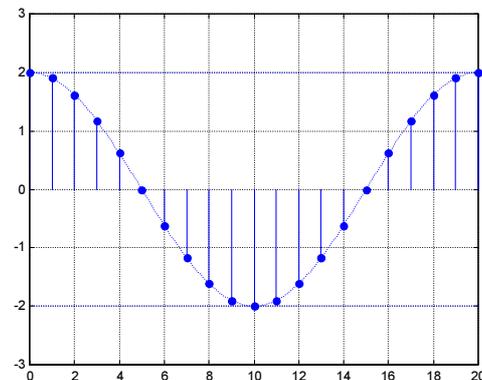


Figura M9.13

Outra das funções que utilizará nas cadeiras da especialidade é a função exponencial complexa discreta.

Exponencial complexa discreta.

O sinal

$$x[n] = Cz^n$$

em que C e z são, em geral, números complexos, é designado por sinal exponencial complexo discreto.

Escrevendo C e z na forma polar

$$C = |C|e^{j\theta_0}$$

$$z = |z|e^{j\Omega_0}$$

, resulta

$$\begin{aligned} x[n] &= Cz^n \\ &= |C|e^{j\theta_0} (|z|e^{j\Omega_0})^n \\ &= |C||z|^n e^{j(\Omega_0 n + \theta_0)} \end{aligned}$$

temos

$$|x[n]| = |C||z|^n$$

e

$$\arg\{x[n]\} = \Omega_0 n + \theta_0$$

Exemplo 12.

As figuras M9.10 e M9.11 mostram o sinal exponencial complexo

$$x[n] = |C||z|^n e^{j(\Omega_0 n + \theta_0)}$$

e a sua parte real,

$$\text{Re}\{x[n]\} = |C||z|^n \cos(\Omega_0 n + \theta_0)$$

, com $C = 2$, $\Omega_0 = \pi/10$, $0 < n < 20$, $\theta_0 = 0$, e $z = 0.95$.

Sendo $|z| < 1$, o afixo do exponencial complexo aproxima-se da origem do plano complexo para valores de n crescentes. A parte real do sinal é um co-seno envolvido pelas exponenciais decrescentes $\pm |C||z|^n$.

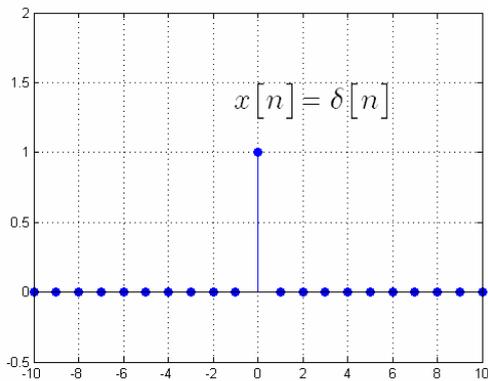
As figuras M9.12 e M9.13 mostram o sinal exponencial complexo e a sua parte real com $C = 2$, $\Omega_0 = \pi/10$, $0 < n < 20$, $\theta_0 = 0$, e $z = 1.00$.

Sendo $|z| = 1$, o módulo do sinal é constante.

9.9. Função Impulso Unitário Discreto.

Define-se o sinal impulso unitário discreto por

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & , n \neq 0 \\ 1 & , n = 0 \end{cases}$$



Exemplo 13.

As figuras M9.14 e M9.15 mostram, para $-10 < n < 10$, a evolução dos sinal impulso unitário

$$x[n] = \delta[n]$$

e dos sinais

$$x_1[n] = \delta[n - 2]$$

$$x_2[n] = \delta[n + 2] + \delta[n - 2]$$

$$x_3[n] = \sum_{i=-2}^2 \delta[n - i]$$

$$x_4[n] = \sum_{i=0}^6 \left| \frac{i}{6} \right| \delta[n - i]$$

$$x_5[n] = \sum_{i=0}^6 e^{-\frac{i}{2}} \delta[n - i]$$

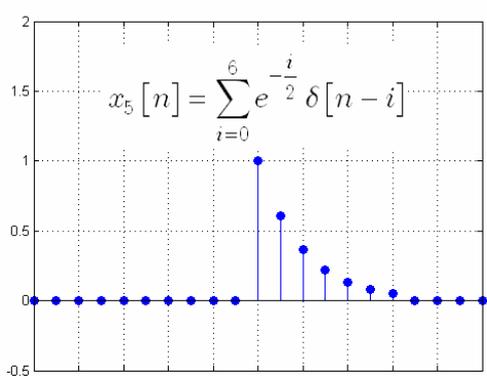
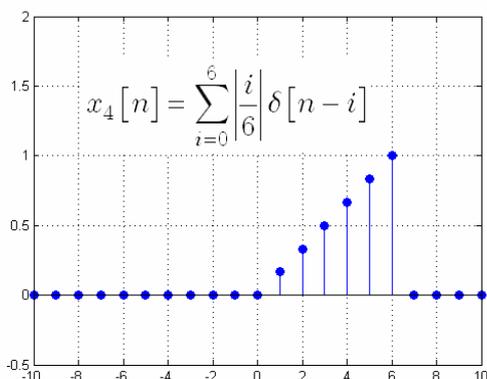
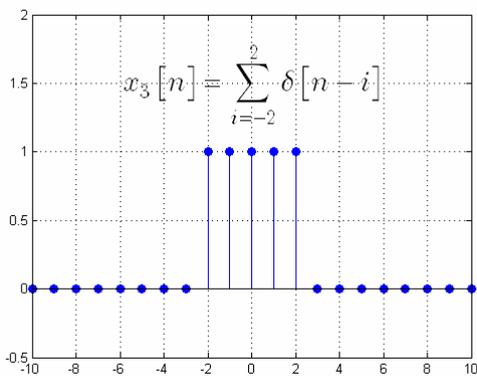
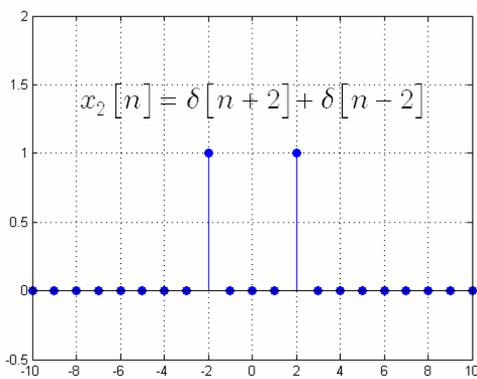
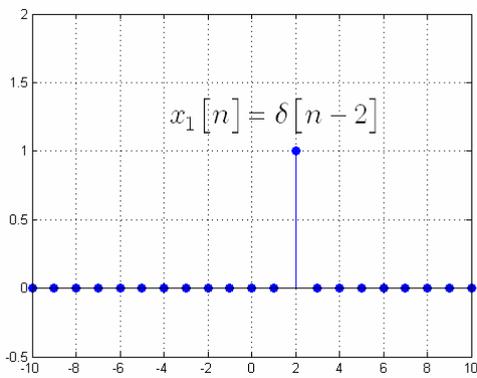
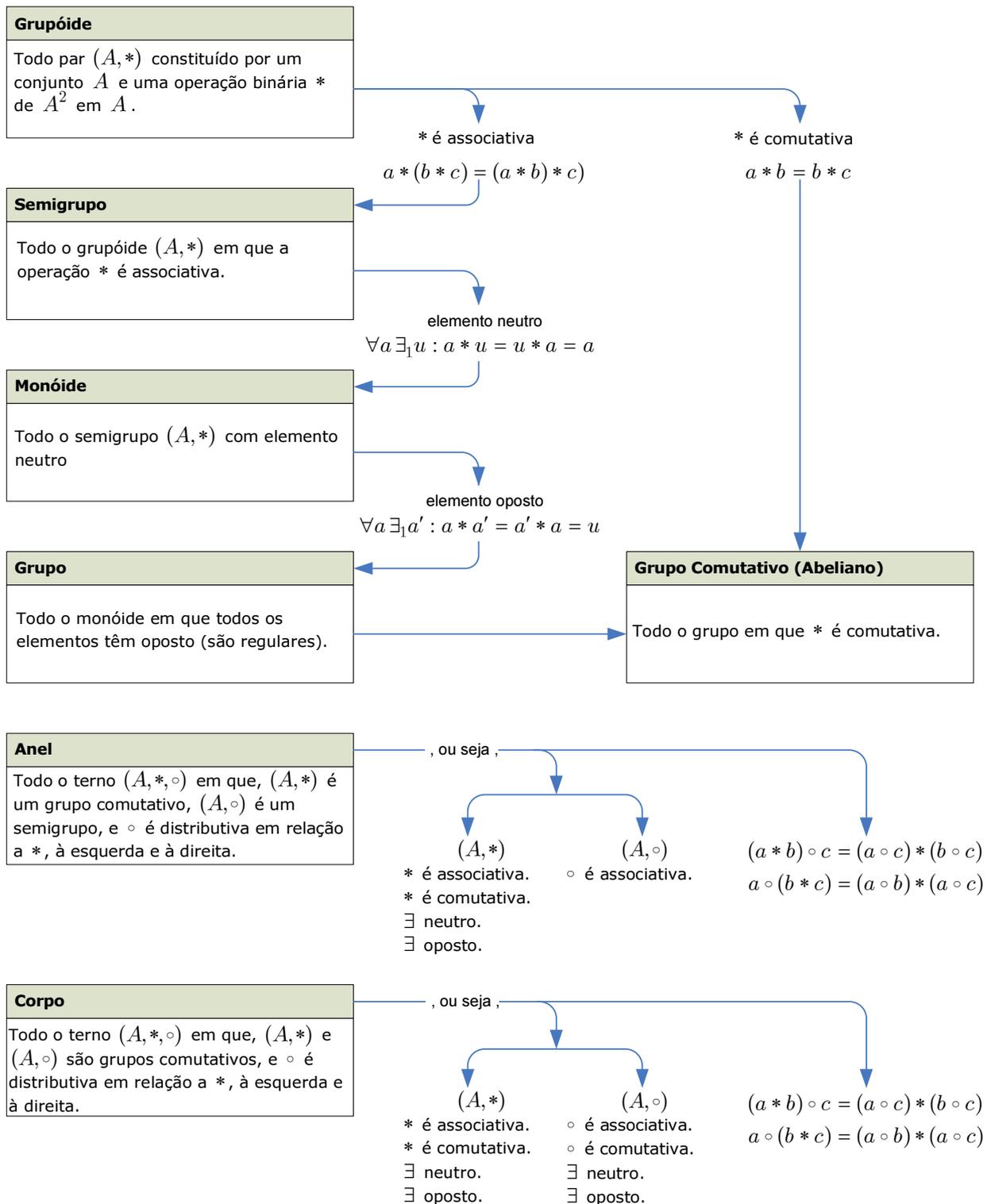


Figura M9.14

Figura M9.15

9.10. Estruturas Algébricas.



Uma estrutura algébrica é um conjunto associado a uma ou mais operações sobre o conjunto que satisfazem certos axiomas. Caso não exista ambiguidade, pode identificar-se o conjunto com a estrutura algébrica. Por exemplo, o corpo $(\mathbb{R}, +, \times)$ refere-se geralmente apenas como o corpo \mathbb{R} (o corpo dos reais). Algumas estruturas algébricas são definidas com mais de um conjunto, por exemplo, um espaço vectorial tem dois conjuntos, um conjunto de vectores e outro de escalares.

9.11. Espaço Vectorial (ou Espaço Linear).

Diz-se que \mathbb{E} é um **espaço vectorial** sobre o corpo \mathbb{K} sempre que se tenha um conjunto \mathbb{E} de elementos $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{w}$ e um corpo \mathbb{K} de elementos $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, e:

a. estiver definida em \mathbb{E} a operação *soma*, $+$, que a $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ e a $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$ associa o elemento $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{E}$, tal que $(\mathbb{E}, +)$ é um grupo comutativo, ou seja, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}$ verifica:

a1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ ($+$ é associativa)

a2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ ($+$ é comutativa)

a3. $\exists_1 \mathbf{0} \in \mathbb{E} : (\mathbf{u} + \mathbf{0}) = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (elemento neutro de $+$)

a4. $\forall \mathbf{u} \exists_1 -\mathbf{u} \in \mathbb{E} : \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (elemento oposto de $+$)

m. estiver definida a operação *produto*, \times , que a $\alpha \in \mathbb{K}$ e a $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ associa o elemento $\alpha \times \mathbf{u} \in \mathbb{E}$ (ou, simplesmente $\alpha \mathbf{u}$), que verifica:

m1. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{v} + \alpha \mathbf{u}$ (\times é distributiva em relação a $+$)

m2. $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{u}$ (\times é distributiva em relação à adição, $+$)

m3. $\alpha(\beta \mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$ (\times é associativa)

m4. $1 \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (elemento neutro de \times)

Os elementos de \mathbb{E} designam-se por **vectores**, e os elementos de \mathbb{K} por **escalares**.

A operação binária $+$ de \mathbb{E}^2 em \mathbb{E} designa-se por **soma vectorial**, e a operação binária \times de $\mathbb{E}\mathbb{K}$ em \mathbb{E} designa-se por **produto escalar**. Saliente-se que um espaço vectorial é fechado relativamente à soma vectorial e ao produto escalar.

Exemplo 14.

São exemplos de espaços vectoriais, ou seja, pode demonstrar-se que verificam cada um dos acima enunciados 8 axiomas, os seguintes conjuntos, com definição habitual de soma entre os seus elementos, e de produto dos seus elementos por um escalar:

- O conjunto \mathbb{R}^n , como temos vindo a considerar até aqui.
- O conjunto dos segmento orientados, que apropriadamente designámos por vectores.
- O conjunto \mathbb{C}^n .
- O conjunto das funções de variável real num intervalo $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (com as definições habituais de adição de funções e de multiplicação de uma função por uma constante $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$). Sendo o vector nulo a função $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

É importante pensar em cada uma das funções como um vector, ou seja, simplesmente como um elemento do espaço vectorial. Para apenas duas funções podemos fazer a analogia com os segmentos orientados em \mathbb{R}^2 .

Sendo um espaço vectorial constituído por funções, é designado por **espaço de funções**, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{I})$, e, particularmente, sendo funções contendo informação sobre um determinado fenómeno físico relevante para a nossa área de aplicação, **espaço de sinais**.

9.12. Subespaço Vectorial. Combinação Linear. Subespaço Gerado.

Seja \mathbb{E} um espaço vectorial, qualquer conjunto não vazio $\mathbb{S} \subset \mathbb{E}$ que seja fechado relativamente à soma vectorial e ao produto escalar designa-se por **subespaço vectorial** de \mathbb{E} .

Saliente-se que o fecho relativamente à soma vectorial e ao produto escalar implica que todos os subespaços contêm o vector nulo.

Dado um conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset \mathbb{E}$, e um conjunto de escalares $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{K}$ o vector

$$\mathbf{u} = k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 + \dots + k_n \mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{u}_i$$

, designa-se por **combinação linear** dos vectores de \mathbb{V} .

O conjunto de todas as combinações lineares de um conjunto de vectores \mathbb{V} é um subespaço vectorial de \mathbb{E} , e designa-se por **subespaço gerado** por \mathbb{V} .

Exemplo 15.

- O conjunto dos polinómios de grau igual ou inferior a n , \mathcal{P}_n , é um subespaço vectorial do conjunto de todos os polinómios sem restrição de grau, \mathcal{P}_∞ .
- O conjunto dos polinómios sem restrição de grau, \mathcal{P}_∞ , dado que todas as funções polinomiais são diferenciáveis, é um subespaço vectorial do conjunto das funções infinitamente diferenciáveis \mathcal{C}^∞ .
- O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis, \mathcal{C}^∞ , é um subespaço vectorial do conjunto de funções continuamente diferenciáveis até à ordem n , \mathcal{C}^n .
- O conjunto de funções continuamente diferenciáveis até à ordem n , \mathcal{C}^n , é um subespaço vectorial do conjunto de funções com primeira derivada contínua, \mathcal{C}^1 .
- O conjunto de funções com primeira derivada contínua, \mathcal{C}^1 , dado que todas as funções diferenciáveis são contínuas, é um subespaço vectorial do conjunto de funções contínuas \mathcal{C} .
- O conjunto das funções contínuas em \mathbb{R} , \mathcal{C} , é um subespaço vectorial do conjunto de funções definidas para todos os valores reais $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
- O conjunto dos inteiros, \mathbb{Z} , não é um espaço vectorial, dado que não é fechado para a multiplicação escalar: o produto de qualquer escalar não inteiro por um inteiro não é um inteiro.

Exemplo 16.

- O polinómio

$$p(x) = x + 2x^3$$

pode ser descrito como uma combinação linear dos polinómios $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$, e $p_3(x) = x^3$:

$$p(x) = 0p_0(x) + 1p_1(x) + 0p_2(x) + 2p_3(x)$$

ou, simplesmente

$$p(x) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 2]$$

- O espaço dos polinómios de grau 3, \mathcal{P}_3 , é gerado pelo conjunto de vectores $\mathbb{P} = \{1, x, x^2, x^3\}$, dado que, por definição, \mathcal{P}_3 , é o conjunto de polinómios da forma $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, ou seja, o conjunto de todas as possíveis combinações lineares dos vectores do conjunto \mathbb{P} .
- Qualquer sinal discreto de duração limitada, N , pode ser expresso como uma combinação linear finita do sinal impulso unitário

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_i \delta[n-k]$$

Na secção 9.9 foram dados vários exemplos de sinais discretos de duração $N = 21$

$$x[n] = \sum_{k=-10}^{10} \alpha_i \delta[n-k]$$

Todos eles podem ser interpretados como vectores pertencentes ao subespaço dos sinais discretos de duração $N = 21$, gerado pelo conjunto de vectores $\mathbb{D} = \{\delta[n+10], \delta[n+9], \dots, \delta[n], \dots, \delta[n-9], \delta[n-10]\}$.

Exemplo 17.

O sinal $\cos(\omega_0 t)$ pode ser expresso como uma combinação linear dos sinais $e^{j\omega_0 t}$ e $e^{-j\omega_0 t}$

$$\cos(\omega_0 t) = 0.5e^{j\omega_0 t} + 0.5e^{-j\omega_0 t}$$

O sinal $\cos(\omega_0 t)$ pode ser interpretado como um vector pertencente ao subespaço das funções contínuas (complexas de variável real) gerado pelos vectores $e^{j\omega_0 t}$ e $e^{-j\omega_0 t}$, e, nesse subespaço, pode ser descrito apenas pelas suas coordenadas

$$\cos(\omega_0 t) = [0.5, 0.5]$$

Também o sinal $\sin(\omega_0 t)$ pode ser expresso como uma combinação linear dos sinais $e^{j\omega_0 t}$ e $e^{-j\omega_0 t}$

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) &= -0.5j e^{j\omega_0 t} + 0.5j e^{-j\omega_0 t} \\ &= [-0.5j \quad 0.5j] \end{aligned}$$

Note que agora o espaço vectorial é necessariamente definido sobre o corpo dos complexos e não sobre o corpo dos reais.

9.13. Independência Linear.

O conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset \mathbb{E}$, diz-se **linearmente independente** se a equação

$$k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 + \dots + k_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

só possui a solução trivial

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

, ou seja, nenhum dos vectores pode ser expresso como combinação linear dos restantes. Caso contrário, isto é, se a equação possui solução não trivial, dizemos que os vectores de \mathbb{V} são linearmente dependentes.

Exemplo 18.

- O conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{3x^2, 1 - x + 2x^2, 2 - 2x + x^2\} \subset \mathcal{P}_2$ é linearmente dependente, dado que

$$3x^2 = 2(1 - x + 2x^2) - (2 - 2x + x^2)$$

- O conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{\sin^2(x), \cos^2(x), \cos(2x)\}$ é linearmente dependente, dado que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

- O conjunto de vectores $\mathbb{P} = \{1, x, x^2, x^3\}$ é linearmente independente. Nenhum dos seus vectores pode ser expresso como combinação linear dos outros.

Exemplo 19.

O conjunto de vectores $\mathbb{P} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ é linearmente independente. Para que a combinação linear dos 3 vectores se anule

$$k_1(1 + x) + k_2(x + x^2) + k_3(1 + x^2) = 0$$

deverá ser

$$\begin{aligned} k_1 + k_1x + k_2x + k_2x^2 + k_3 + k_3x^2 &= 0 \\ (k_1 + k_3) + (k_1 + k_2)x + (k_2 + k_3)x^2 &= 0 \end{aligned}$$

, o que implica

$$\begin{aligned} k_1 + k_3 &= 0 \\ k_1 + k_2 &= 0 \\ k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

, ou seja, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

, pelo que, sendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

, o sistema só possui a solução trivial, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, pelo que os vectores $1 + x$, $x + x^2$, e $1 + x^2$, são linearmente independentes.

Exemplo 20.

Não existe nenhum método geral para demonstrar que um conjunto de n vectores do espaço de funções é linearmente independente. No caso dos n vectores pertencerem a C^{n-1} , a independência linear pode ser demonstrada verificando que o determinante

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

, designado por **Wronskiano** dos n vectores, é não nulo pelo menos para um valor de $x \in \mathbb{R}$.

- Para o conjunto de vectores $\mathbb{P} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$, temos

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1+x & x+x^2 & 1+x^2 \\ 1 & 1+2x & 2x \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= (1+x)(2+4x-4x) - (2x+2x^2-2-2x^2) \\ &= 2+2x-2x+2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

O determinante nunca é nulo (bastaria que não fosse nulo para apenas um valor de x), pelo que os vectores são linearmente independentes.

- Para o conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{3x^2, 1 - x + 2x^2, 2 - 2x + x^2\}$, temos

$$\det \begin{bmatrix} 3x^2 & 1-x+2x^2 & 2-2x+x^2 \\ 6x & -1+4x & -2+2x \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 0$$



```
>> syms x
```

```
>> A=[3*x^2 1-x+2*x^2 2-2*x+x^2;6*x -1+4*x -2+2*x;6 4 2];
```

```
>> det(A)
```

```
ans =
```

```
0
```

Não existe um único valor de x para o qual o determinante não se anule, ou seja o determinante é *identicamente nulo*. Os vectores são linearmente dependentes.

9.14. Base e Dimensão.

Se \mathbb{W} um subespaço de \mathbb{E} , dizemos que o conjunto de vectores $\mathbb{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{W}$ é uma **base** de \mathbb{W} se é um conjunto de geradores de \mathbb{W} e é linearmente independente.

Se \mathbb{W} um subespaço de \mathbb{E} , e $\mathbb{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{W}$ uma base de \mathbb{W} , todas as bases de \mathbb{W} têm o mesmo número k de elementos, chamada a **dimensão** de \mathbb{W} , $\dim(\mathbb{W})$.

Qualquer conjunto de k vectores linearmente independentes pertencentes a \mathbb{W} é uma base de \mathbb{W} , e qualquer conjunto de mais de k vectores é linearmente dependente.

Um espaço vectorial pode ter um número infinito de vectores linearmente independentes, como é o caso da maioria dos espaços de funções, dizendo-se então um *espaço de dimensão infinita*.

Exemplo 21.

- O conjunto de vectores

$$\mathbb{P} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

constitui a base canónica do conjunto dos polinómios de grau n , e é um exemplo de um espaço de funções de dimensão finita. O conjunto dos polinómios de grau n tem dimensão $n + 1$. Por exemplo, os vectores $1, x, x^2$, e x^3 constituem uma base dos polinómios de grau 3, \mathcal{P}_3 .

- O espaço de funções dos polinómios sem restrição de grau, \mathcal{P}_∞ , é um espaço de dimensão infinita. O espaço de funções contínuas tem dimensão infinita. Não há nenhum conjunto finito de vectores que seja base desse espaço.

- O conjunto de vectores $\mathbb{P} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ sendo, como vimos, linearmente independente, e em número igual à dimensão do espaço de polinómios de grau 2, constitui uma base de \mathcal{P}_2 .

Exemplo 22.

- O espaço de sinais discretos, $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, tem dimensão infinita. Qualquer sinal discreto pode ser expresso como uma combinação linear, infinita, do sinal impulso unitário

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \delta[n - k]$$

- O espaço de sinais discretos, $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, de duração limitada, $n \in [0, \dots, N - 1]$, tem dimensão finita N . O conjunto de vectores

$$\mathbb{U} = \{\delta[n], \delta[n - 1], \dots, \delta[n - N + 1]\}$$

constitui uma base de sinais discretos de duração limitada N .



Exercícios.

NÚMEROS COMPLEXOS. FUNÇÕES COMPLEXAS DE VARIÁVEL REAL.

1. Calcular

$$\int_a^b e^{jt} dt$$

Tendo em atenção que $e^{jt} = \cos(t) + j \operatorname{sen}(t)$, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{jt} dt &= \int_a^b (\cos(t) + j \operatorname{sen}(t)) dt = \int_a^b \cos(t) dt + j \int_a^b \operatorname{sen}(t) dt \\ &= [\operatorname{sen}(t) - j \cos(t)]_a^b = [-j(\cos(t) + j \operatorname{sen}(t))]_a^b \\ &= [-je^{jt}]_a^b = \left[\frac{1}{j} e^{jt} \right]_a^b \\ &= \frac{e^{jb} - e^{ja}}{j} \end{aligned}$$

, ou seja, no cálculo das primitivas das funções complexas de variável real podemos considerar j como uma constante, e proceder identicamente às primitivas de funções reais de variável real. Sendo conhecida a primitiva de $f(z) = e^{jt}$ podemos fazer de imediato

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{jt} dt &= \left[\frac{1}{j} e^{jt} \right]_a^b \\ &= \frac{e^{jb} - e^{ja}}{j} \end{aligned}$$

2. Calcular

$$\int_0^\pi \frac{2e^{j\theta} + 2}{2e^{j\theta}} 2je^{j\theta} d\theta$$

Temos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{2e^{j\theta} + 2}{2e^{j\theta}} 2je^{j\theta} d\theta &= \int_0^\pi j(2e^{j\theta} + 2) d\theta \\ &= 2 \left[e^{j\theta} \right]_0^\pi + 2j \left[\theta \right]_0^\pi \\ &= 2(1) + 2(0) + j2(\pi) + 0 \\ &= -4 + j2\pi \end{aligned}$$

3. Calcular

$$\int_0^\pi \frac{(2 + 2j) + 2e^{j\theta} + 2}{(2 + 2j) + 2e^{j\theta}} 2je^{j\theta} d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{(2+2j) + 2e^{j\theta} + 2}{(2+2j) + 2e^{j\theta}} 2je^{j\theta} d\theta &= \int_0^\pi 2je^{j\theta} d\theta + 2 \int_0^\pi \frac{2je^{j\theta}}{2+2j+2e^{j\theta}} d\theta \\ &= \left[2e^{j\theta} \right]_0^\pi + 2 \left[\ln(2+2j+2e^{j\theta}) \right]_0^\pi \\ &= (-2) - (2) + 2 \ln(2j) - 2 \ln(4+2j) \\ &= -4 + 2 \ln(2j) - 2 \ln(4+2j) \end{aligned}$$

4. Calcular as raízes do polinómio

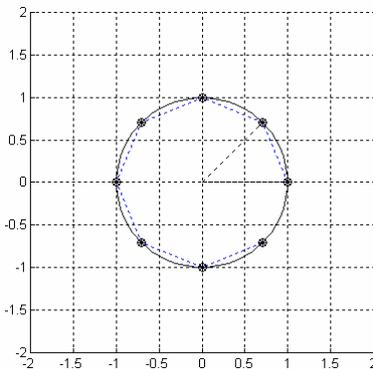
$$f(z) = z^2 + 1$$

Temos

$$\begin{aligned} z^2 + 1 &= 0 \\ z^2 &= -1 \\ z &= \pm j \end{aligned}$$

5. Calcular as raízes do polinómio

$$f(z) = z^8 - 1$$



Tendo em atenção que $z^{1/n} = \rho^{1/n} e^{j(\theta+2k\pi)/n}$, temos

$$\begin{aligned} z^8 - 1 &= 0 \\ z^8 &= 1 \\ z &= (1)^{\frac{1}{8}} = (e^{j0})^{\frac{1}{8}} = e^{j\frac{0+2k\pi}{8}} = e^{jk\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

com $k = 0, 1, \dots, 7$. Ou seja,

$$\begin{aligned} z^8 - 1 &= (z+1)(z-1)(z+j)(z-j) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) \right) \\ &\quad \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) \right) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j) \right) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j) \right) \end{aligned}$$

ESPAÇO DE FUNÇÕES. INDEPENDÊNCIA LINEAR.

6. Verificar se $p(x) = 3x^2$ pertence ao subespaço de \mathcal{P}_2 gerado pelos polinómios $q(x) = 1 - x + 2x^2$ e $r(x) = 2 - 2x + x^2$.

Trata-se de verificar se o vector $p(x)$ pertence ao espaço gerado pelos vectores $q(x)$ e $r(x)$, ou seja, verificar se existem escalares k_1 e k_2 tais que $p(x) = k_1q(x) + k_2r(x)$. Temos então

$$\begin{aligned}
 p(x) &= k_1q(x) + k_2r(x) \\
 3x^2 &= k_1(1 - x + 2x^2) + k_2(2 - 2x + x^2) \\
 &= k_1 - k_1x + 2k_1x^2 + 2k_2 - 2k_2x + k_2x^2 \\
 &= (k_1 + 2k_2) + (-k_1 - 2k_2)x + (2k_1 + k_2)x^2
 \end{aligned}$$

, o que implica

$$\begin{cases}
 0 = (k_1 + 2k_2) \\
 0 = -k_1 - 2k_2 \\
 3 = 2k_1 + k_2
 \end{cases}$$

, ou seja, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

O sistema é possível e determinado

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, sendo, portanto, $k_1 = 2$ e $k_2 = -1$. Ou seja, $p(x) = 2q(x) - 1r(x)$.

7. Verificar se os vectores 1 , e^x , e e^{2x} são linearmente independentes.

Recorrendo ao Wronskiano dos vectores, temos

$$\det \begin{bmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{bmatrix} = 4e^{3x} - 2e^{3x} = 2e^{3x}$$

Dado que o determinante não é nulo para todo o x , os vectores são linearmente independentes.

MUDANÇA DE BASE NO ESPAÇO DE FUNÇÕES.

8. Escrever o vector $1 + 2x - x^2$ na base $\mathcal{P} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$.

Temos

$$\begin{aligned}
 k_1(1 + x) + k_2(x + x^2) + k_3(1 + x^2) &= 1 + 2x - x^2 \\
 k_1 + k_1x + k_2x + k_2x^2 + k_3 + k_3x^2 &= 1 + 2x - x^2 \\
 (k_1 + k_3) + (k_1 + k_2)x + (k_2 + k_3)x^2 &= 1 + 2x - x^2
 \end{aligned}$$

, o que implica

$$\begin{aligned}
 k_1 + k_3 &= 1 \\
 k_1 + k_2 &= 2 \\
 k_2 + k_3 &= -1
 \end{aligned}$$

, ou seja, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e, dado que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

temos

$$1 + 2x - x^2 = 2(1 + x) + 0(x + x^2) - 1(1 + x^2)$$

9. À semelhança de \mathbb{R}^n podemos analisar o problema anterior recorrendo ao conceito de matriz de mudança de base.

Considerando a base canónica de \mathcal{P}_2 , $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, podemos escrever o vector $p(x) = 1 + 2x - x^2$ na forma $[1, 2, -1]_{\mathcal{B}}$, ou seja, explicitando apenas as coordenadas do vector na base canónica. Por outro lado, dado que conhecemos as coordenadas dos vectores da base $\mathcal{P} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ na base canónica, $\mathcal{P} = \{[1, 1, 0]_{\mathcal{B}}, [0, 1, 1]_{\mathcal{B}}, [1, 0, 1]_{\mathcal{B}}\}$, a escrita da matriz de mudança da base \mathcal{P} para a base \mathcal{B} , $M_{\mathcal{P}\mathcal{B}}$, é imediata, dado ser a matriz cujas colunas correspondem às coordenadas dos vectores p_i na base \mathcal{B}

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{P}\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} [p_1]_{\mathcal{B}} & [p_1]_{\mathcal{B}} & [p_1]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resulta então

$$\begin{aligned} [p(x)]_{\mathcal{P}} &= M_{\mathcal{B}\mathcal{P}} [p(x)]_{\mathcal{B}} \\ &= M_{\mathcal{P}\mathcal{B}}^{-1} [p(x)]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

, tal como, naturalmente, tínhamos calculado no exemplo anterior.