

Módulo 10

• Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

• Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.



Espaço de Sinais com Métrica.

[Poole 540 a 550, 619 a 626,]

Espaços vectoriais.

Produto interno. Norma. Distância.

Ângulo. Vectors ortogonais. Base ortogonal. Base ortonormada.

Projecção ortogonal.

Melhor aproximação. Projecção num subespaço. Mínimo erro quadrático.

Ortogonalização de Gram-Schmidt.

10.1. Produto Interno. Norma. Distância.

Define-se o **produto interno** num espaço vectorial \mathbb{E} sobre um corpo \mathbb{K} , como qualquer aplicação $(\cdot) : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ que verifica os seguintes axiomas

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^*$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ sse $\mathbf{u} = 0$

Um espaço vectorial em que está definido um produto interno é designado por **espaço com produto interno**.

Define-se a **norma** num espaço vectorial \mathbb{E} sobre um corpo \mathbb{K} , como qualquer aplicação $\|\cdot\| : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica os seguintes axiomas

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0$ sse $\mathbf{u} = 0$
3. $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\|$
4. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Embora as definições sejam independentes, para todo o espaço vectorial \mathbb{E} em que se defina um produto interno, fica definida a aplicação $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

que, por verificar os 4 axiomas da norma, constitui uma norma no espaço \mathbb{E} .

Seja \mathbb{E} um espaço vectorial em que está definido um produto interno, definimos a **distância entre dois vectores** $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ como a norma do vector entre eles

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Exemplo 1.

- Dados dois vectores de \mathcal{P}_n , $p_1(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ e $p_2(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$, podemos demonstrar que

$$p_1 \cdot p_2 = a_0b_0 + a_1b_1 + \dots + a_nb_n$$

define um produto interno em \mathcal{P}_n , isto é, tal como definida, a operação verifica os quatro axiomas do produto interno.

Por exemplo, sendo $p_1(x) = 1 + x + 2x^2$ e $p_2(x) = 1 + x - x^2$, temos

$$p_1 \cdot p_2 = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times (-1) = 0$$

Resulta ainda que

$$\|p_1\| = \sqrt{p_1 \cdot p_1} = \sqrt{1 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 2} = \sqrt{6}$$

$$\|p_2\| = \sqrt{p_2 \cdot p_2} = \sqrt{1 \times 1 + 1 \times 1 - 1 \times (-1)} = \sqrt{3}$$

e

$$\begin{aligned} \text{dist}(p_1, p_2) &= \|p_1 - p_2\| = \|1 + x + 2x^2 - (1 + x - x^2)\| \\ &= \|x^2\| = \sqrt{x^2 \cdot x^2} = \sqrt{1 \times 1} = 1 \end{aligned}$$

- Sendo $f(x)$ e $g(x)$ dois vectores do espaço das funções contínuas num intervalo $[a, b]$, $\mathcal{C}[a, b]$, podemos demonstrar que

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g^*(x)dx$$

define um produto interno no espaço $\mathcal{C}[a, b]$, bem como em qualquer dos seus subespaços, $\mathcal{C}^n[a, b]$, $\mathcal{P}_n[a, b]$ etc.

Consideremos de novo os vectores de \mathcal{P}_2 , $p_1(x) = 1 + x + 2x^2$ e $p_2(x) = 1 + x - x^2$, o seu produto em $\mathcal{C}[-1, 1]$, tal como acima definido é

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= \int_{-1}^1 (1 + x + 2x^2)(1 + x - x^2)dx \\ &= \int_{-1}^1 (1 + x + 2x^2 + x + x^2 + 2x^3 - x^2 - x^3 - 2x^4)dx \\ &= \int_{-1}^1 (1 + 2x + 2x^2 + x^3 - 2x^4)dx \\ &= \left[x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{5}x^5 \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{38}{15} \end{aligned}$$

Temos assim dois exemplos de diferentes produtos internos definidos sobre o mesmo espaço, ou seja, o mesmo espaço com uma **métrica** diferente: cada um dos produtos internos tem associado uma norma, e deles resultam diferentes noções de ortogonalidade e distância entre os elementos do espaço vectorial.

Exemplo 2.

São exemplos de normas num espaço vectorial:

- A norma euclidiana em \mathbb{R}^n , tal como foi definida nos módulos anteriores

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}$$

, que em \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , e \mathbb{R}^3 associamos à noção de distância, noção esta que podemos generalizar a outros espaços (já o fizemos em \mathbb{R}^n).

- A norma euclidiana em \mathbb{C}^n

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2} = \sqrt{(\mathbf{u}^*)^T \mathbf{u}}$$

- A norma $-p$ em \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n

$$\|\mathbf{u}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |u_i|^p}$$

A norma euclidiana é um caso particular da norma $-p$, para $p = 2$, podendo escrever-se $\|\mathbf{u}\|_2$, norma -2 .

Exemplo 3: Energia e Potência Média de um Sinal Contínuo.

- Dado um sinal contínuo $x(t)$, define-se a **energia do sinal**, E , como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Dado um sinal contínuo $x(t)$, periódico, de período T_0 , isto é, um sinal tal que $x(t) = x(t + T_0), \forall t \in \mathbb{R}$ em que T_0 é uma constante positiva, define-se a **potência média do sinal**, P , como

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

Dizemos que um sinal é um **sinal de energia** se a sua energia for finita não nula, $0 < E < \infty$. Resulta das definições anteriores que um sinal de energia tem potência média nula.

Dizemos que um sinal é um **sinal de potência** se a sua potência for finita não nula, $0 < P < \infty$, Resulta das definições anteriores que um sinal de potência tem energia infinita.

Exemplo 4: Energia e Potência Média de um Sinal Discreto.

- Dado um sinal discreto $x[n]$, define-se a **energia do sinal**, E , como

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

- Dado um sinal discreto $x[n]$, periódico, de período N , isto é, um sinal tal que $x[n] = x[n + N], \forall n \in \mathbb{Z}$ em que N é um inteiro positivo, define-se a **potência média do sinal**, P , como

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

Exemplo 5: Produto interno em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Define-se o **produto interno** entre dois sinais contínuos, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, num intervalo $[t_1, t_2]$, ou seja, o produto interno entre dois vectores do espaço, $\mathcal{C}(\mathbb{I})$, num intervalo $\mathbb{I} = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, como

$$x_1 \cdot x_2 = \int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2^*(t)dt$$

, sendo a norma associada

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

Em particular para o espaço das funções quadraticamente integráveis, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, ou seja, para os sinais contínuos de energia, o produto interno assim definido corresponde à energia do sinal

$$x \cdot x = \|x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E$$

Exemplo 6: Produto interno em $l^2(\mathbb{R})$

Define-se o **produto interno** entre dois sinais discretos, $x_1[n]$ e $x_2[n]$, num intervalo $[n_1, n_2]$, como

$$x_1 \cdot x_2 = \sum_{n_1}^{n_2} x_1[n] x_2^*[n]$$

, sendo a norma associada

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2 \right)^{1/2}$$

Em particular para o espaço das funções de variável inteira quadraticamente somáveis, $l^2(\mathbb{R})$, ou seja, para os sinais discretos de energia, o produto interno assim definido corresponde à energia do sinal

$$x \cdot x = \|x\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = E$$

10.2. Ângulo. Vectores Ortogonais. Base Ortogonal. Base Ortonormada.

Define-se o **ângulo entre dois vectores**, \mathbf{u} e \mathbf{v} dum espaço vectorial \mathbb{E} , em que está definido um produto interno como

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right)$$

Se o produto interno entre os dois vectores for nulo,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

, os vectores dizem-se **vectores ortogonais**.

Sendo $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ uma base dum subespaço \mathbb{W} dum espaço vectorial \mathbb{E} , em que está definido um produto interno, dizemos que \mathcal{S} é uma **base ortogonal** se $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ para $i \neq j$, ou seja, se os vectores da base são ortogonais. Dizemos que \mathcal{S} é uma **base ortonormada** se, para além de ser uma base ortogonal, $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ para $i = 1, \dots, n$.

Exemplo 7

O conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2\}$ constitui uma base de \mathcal{P}_2 . Relativamente ao produto interno em $\mathcal{C}[-1, 1]$

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g^*(x)dx$$

\mathcal{B} não é uma base ortogonal, dado que p_1 e p_2 são ortogonais

$$p_1 \cdot p_2 = \int_{-1}^1 (1 \times x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = 0$$

, tal como p_2 e p_3

$$p_2 \cdot p_3 = \int_{-1}^1 (x \times x^2)dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^1 = 0$$

, mas p_1 e p_3 não são ortogonais

$$p_1 \cdot p_3 = \int_{-1}^1 (1 \times x^2)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

Exemplo 8: Espaço de sinais.

Um conjunto de m sinais contínuos $\{y_k(t)\}$, com $k = 1, 2, \dots, m$, ortogonais num intervalo $[t_1, t_2]$, constitui uma base ortogonal de sinais, sendo que qualquer sinal contínuo $x(t)$ que exista nesse espaço, pode ser representado como uma combinação linear dos vectores que definem a base, ou seja, dos sinais $y_k(t)$, ditos *sinais de base*

$$x(t) = \sum_{k=1}^m a_k y_k(t)$$

O mesmo se pode dizer para um conjunto de m sinais discretos $\{y_k[n]\}$, com $k = 1, 2, \dots, m$, ortogonais num intervalo $[n_1, n_2]$. Estes sinais constituem uma base dum espaço de sinais discretos, sendo que qualquer sinal discreto $x[n]$ que exista

nesse espaço pode ser representado como uma combinação linear dos vectores que definem a base,

$$x[n] = \sum_{k=1}^m a_k y_k[n]$$

Exemplo 9: Ortogonalidade no espaço de sinais.

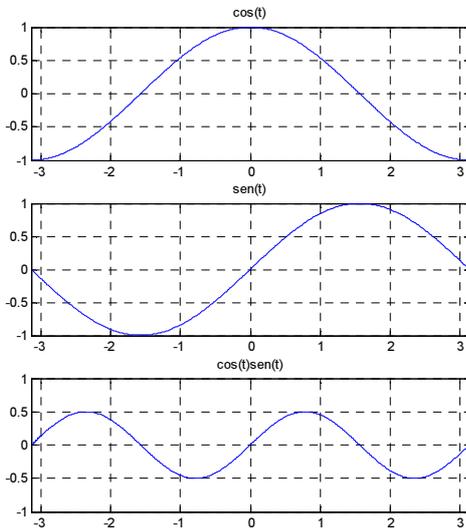


Figura M10.1

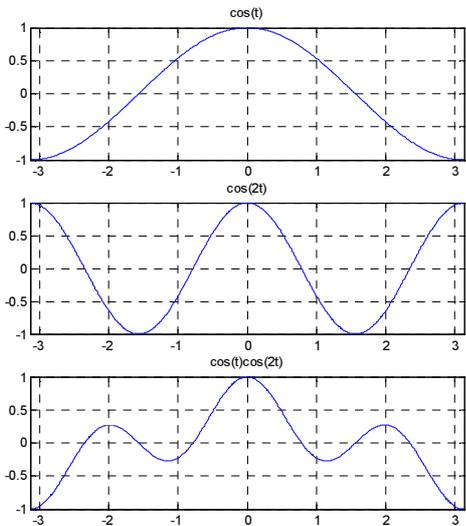


Figura M10.2

Dois sinais contínuos, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, dizem-se sinais ortogonais, num intervalo $[t_1, t_2]$, se o seu produto interno for nulo

$$\int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2^*(t)dt = 0$$

Observe a figura M10.1. A área sob a curva do sinal $x(t) = \cos(t)\text{sen}(t)$ acima e abaixo do eixo das abcissas é igual, ou seja, o produto interno entre os sinais, $x_1(t) = \cos(t)$ e $x_2(t) = \text{sen}(t)$, no intervalo $[-\pi, \pi]$, dado por

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\text{sen}(t)dt$$

, é nulo, pelo que os sinais são ortogonais no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Observe a figura M10.2. A área sob a curva do sinal $x(t) = \cos(t)\cos(2t)$ acima e abaixo do eixo das abcissas é igual, ou seja, o produto interno entre os sinais, $x_1(t) = \cos(t)$ e $x_2(t) = \cos(2t)$, no intervalo $[-\pi, \pi]$, dado por

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\cos(2t)dt$$

, é nulo, pelo que os sinais são ortogonais no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Dois sinais discretos, $x_1[n]$ e $x_2[n]$, dizem-se sinais ortogonais, num intervalo $[n_1, n_2]$, se o seu produto interno for nulo

$$\sum_{n_1}^{n_2} x_1[n]x_2^*[n] = 0$$

10.3. Projecção Ortogonal.

Seendo \mathbf{u} e \mathbf{v} , não nulo, dois vectores dum espaço vectorial \mathbb{E} em que está definido um produto interno, podemos sempre decompor o vector \mathbf{u} na soma de dois vectores, \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

, tendo \mathbf{u}_1 a direcção de \mathbf{v} e sendo \mathbf{u}_2 ortogonal a \mathbf{v} . O vector \mathbf{u}_1 é chamado **projecção ortogonal de \mathbf{u} sobre \mathbf{v}** , $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$, sendo

$$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

, e sendo a componente ortogonal

$$\text{perp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

Exemplo 10

Consideremos os vectores $f_1(x) = 1 - x^2$ e $f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ no espaço das funções contínuas no intervalo $[-1,1]$, $\mathcal{C}[-1,1]$, com o produto interno

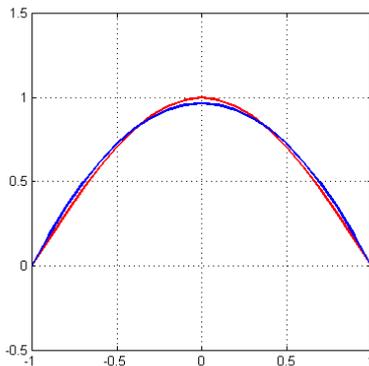


Figura M10.3

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g^*(x)dx$$

A projecção ortogonal de f_2 sobre f_1 é

$$\begin{aligned} \text{proj}_{f_1} f_2 &= \frac{f_2 \cdot f_1}{f_1 \cdot f_1} f_1 \\ &= \frac{\int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)(1-x^2)dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)(1-x^2)dx} (1-x^2) \\ &= \frac{30}{\pi^3} (1-x^2) \end{aligned}$$

, sendo a componente ortogonal

$$\text{perp}_{f_1} f_2 = f_2 - \text{proj}_{f_1} f_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{30}{\pi^3} (1-x^2)$$

Poderíamos verificar que

$$\int_{-1}^1 (\text{proj}_{f_1} f_2)(\text{perp}_{f_1} f_2)dx = \int_{-1}^1 \frac{30}{\pi^3} (1-x^2) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{30}{\pi^3} (1-x^2) \right) dx = 0$$

A figura M10.3 mostra os vectores $f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ e $\text{proj}_{f_1} f_2 = \frac{30}{\pi^3} (1-x^2)$

10.4. Melhor Aproximação. Projecção num Subespaço. Mínimo Erro Quadrático.

Seja \mathbb{W} um subespaço dum espaço vectorial \mathbb{E} , em que está definido um produto interno, o vector $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$, e os vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ uma base ortogonal do subespaço \mathbb{W} , designamos por **melhor aproximação** de \mathbf{u} em \mathbb{W} o vector $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{W}$ tal que a distância de \mathbf{u} a $\hat{\mathbf{u}}$ é menor do que a distância de \mathbf{u} a qualquer outro vector de \mathbb{W} ,

$$\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\| < \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{W}$$

, correspondendo $\hat{\mathbf{u}}$ à **projecção ortogonal do vector \mathbf{u} no subespaço \mathbb{W}** , que se define como

$$\hat{\mathbf{u}} = \text{proj}_{\mathbb{W}} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \text{proj}_{\mathbf{u}_i} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{u}_i$$

O vector $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}$ designa-se por vector de erro, e pertence ao complemento ortogonal do subespaço \mathbb{W} , \mathbb{W}^\perp , sendo a sua norma, $\|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|$, designada por **mínimo erro quadrático**. Se a base do subespaço for ortonormada, dado que $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = \|\mathbf{u}_i\|^2 = 1$, resulta que os coeficientes da projecção ortogonal são dados apenas por

$$k_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i$$

Exemplo 11.

A projecção ortogonal de $f(x) = e^x$ no subespaço vectorial, $\mathbb{W} = \mathcal{P}_1[-1,1]$, dos polinómios do 1º grau no intervalo $[-1,1]$, com o produto interno

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g^*(x)dx$$

, tendo em atenção que $\mathcal{B} = \{1, x\}$ constitui uma base ortogonal de \mathbb{W} , é dada por

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \text{proj}_{\mathbb{W}} f \\ &= \frac{f \cdot p_1}{p_1 \cdot p_1} p_1 + \frac{f \cdot p_2}{p_2 \cdot p_2} p_2 = \frac{\int_{-1}^1 e^x dx}{\int_{-1}^1 dx} + \frac{\int_{-1}^1 e^x x dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} x \\ &= \frac{[e^x]_{-1}^1}{2} + \frac{[(-1+x)e^x]_{-1}^1}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1} x = \frac{e - e^{-1}}{2} + \frac{2e^{-1}}{2/3} x \\ &= \frac{e - e^{-1}}{2} + 3e^{-1} x \\ &\approx 1.18 + 1.10x \end{aligned}$$

A função $f(x) = e^x$ não pode ser representada exactamente por um polinómio do 1º grau. A função $\hat{f} \approx 1.18 + 1.10x$ corresponde, de todos os polinómios do 1º grau, $\hat{f} = b + ax$, àquele cuja *distância* a $f(x) = e^x$ é menor do que a distância de qualquer outro polinómio do 1º grau a $f(x) = e^x$.

Uma distância está associada a uma norma,

$$\text{dist}(f, \hat{f}) = \|f - \hat{f}\|$$

, e uma norma está associada a um produto interno,

$$\|f - \hat{f}\| = \sqrt{(f - \hat{f}) \cdot (f - \hat{f})^*}$$

Ao considerarmos o produto interno num domínio de continuidade $[a, b]$

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g^*(x)dx$$

, a minimização da distância entre f e \hat{f}

$$\begin{aligned} \min \|f - \hat{f}\| &= \min \sqrt{(f - \hat{f}) \cdot (f - \hat{f})^*} \\ &= \min \sqrt{\int_a^b (f - \hat{f})(f - \hat{f})^* dx} \\ &= \min \sqrt{\int_a^b |(f - \hat{f})|^2 dx} \end{aligned}$$

, corresponde à minimização da função

$$\int_a^b |e(x)|^2 dx$$

, com $e(x) = f(x) - \hat{f}(x)$, ou seja, corresponde à minimização do somatório do quadrado do erro cometido ponto a ponto para todos os valores de $x \in [a, b]$.

Adoptemos um outro ponto de vista. Sendo $f(x) = e^x$, e o modelo que consideramos ser adequado um polinómio do 1º grau $\hat{f}(x) = b + ax$, a diferença ponto a ponto entre as duas funções, ou seja, o erro cometido, é

$$\begin{aligned} e(x) &= f(x) - \hat{f}(x) \\ &= e^x - (b + ax) \end{aligned}$$

, pelo que a minimização do erro quadrático no intervalo $[-1, 1]$, resulta

$$\begin{aligned} \min(E) &= \min \int_{-1}^1 (e^x - (b + ax))^2 dx \\ &= \min \left(2b^2 + (2e^{-1} - 2e)b + \frac{2}{3}a^2 - 4ae^{-1} + \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) \right) \end{aligned}$$

Derivando a expressão em ordem aos parâmetros a e b e igualando a zero temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= -4e^{-1} + \frac{4}{3}a = 0 \Rightarrow a = 3e^{-1} \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= 2e^{-1} + 4b - 2e = 0 \Rightarrow b = \frac{e - e^{-1}}{2} \end{aligned}$$

, ou seja, as soluções encontradas anteriormente através da projecção ortogonal.

Determinar a projecção ortogonal sobre um espaço de funções $\mathcal{F}[a, b]$ com produto interno $f \cdot g = \int_a^b f(x)g^(x)dx$, corresponde a calcular a solução de mínimo erro quadrático.*

Exemplo 12.

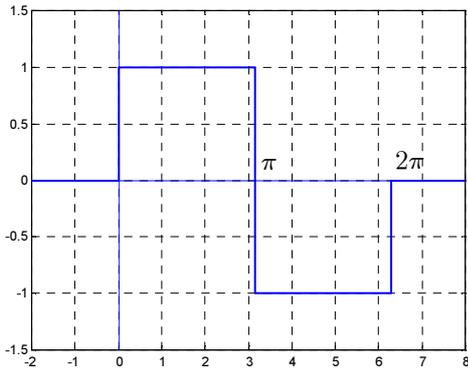


Figura M10.4

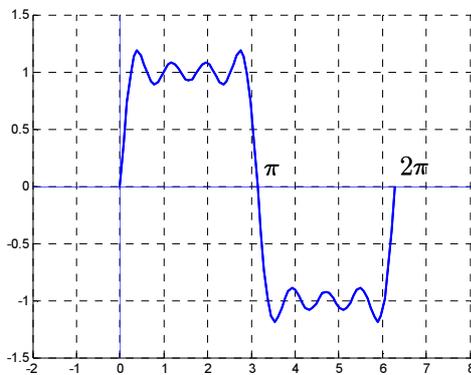


Figura M10.5

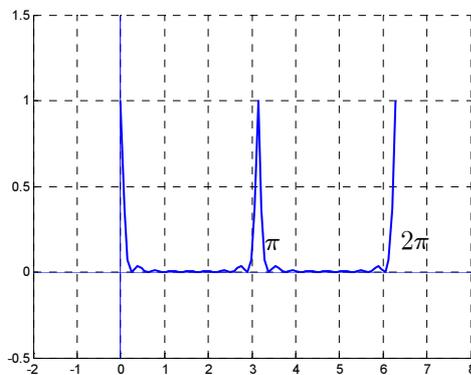


Figura M10.6

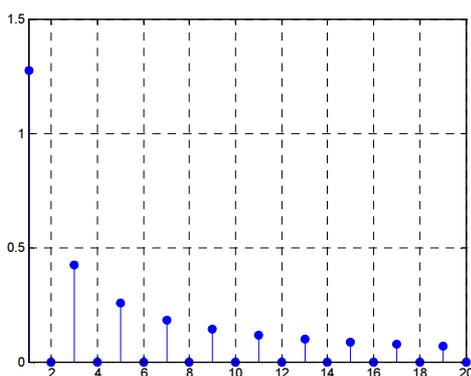


Figura M10.7

É possível demonstrar que os sinais $\text{sen}(n\omega t)$ e $\text{sen}(m\omega t)$, com n e m inteiros, e diferentes entre si, são ortogonais em qualquer intervalo $[t_1, t_1 + 2\pi/\omega]$. Assim sendo, e considerando $\omega = 1$ e $t_1 = 0$, o conjunto de sinais $\mathcal{S} = \{ \text{sen}(kt) \}$, com $k \in \mathbb{Z}$, constitui uma base ortogonal de sinais no intervalo $[0, 2\pi]$.

Considerando, por exemplo, o sinal $x(t)$ que se mostra na figura M10.4, e $n = 7$, podemos representar $x(t)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ a menos de um sinal de erro, $x_e(t)$,

$$x(t) = \sum_{k=1}^7 a_k \text{sen}(kt) + x_e(t)$$

A figura M10.5 mostra o sinal

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^7 a_k \text{sen}(kt)$$

, correspondente à projecção ortogonal do sinal $x(t)$ no espaço gerado por \mathcal{S} , e a figura M10.6 mostra o sinal $x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, pertencente ao complemento ortogonal do espaço gerado por \mathcal{S} .

Note que na expressão dos coeficientes

$$a_k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)y_k^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} y_k(t)y_k^*(t)dt}$$

o numerador corresponde ao produto interno entre o sinal a representar e os sinais que definem o espaço de representação, ditos *sinais base*, sendo portanto uma medida de semelhança do sinal com cada um dos sinais base. O denominador corresponde à energia de cada um dos sinais base no intervalo considerado, tendo apenas a função de normalizar os valores dos coeficientes. Se os sinais base tiverem norma unitária, ou seja, se forem versores do espaço que definem, o denominador tem valor 1, não influenciando o valor do coeficiente.

De modo a que a energia do sinal de erro no intervalo $[0, 2\pi]$, ou, o que é proporcional, o erro quadrático médio

$C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_e^2(t)dt$ seja o menor possível, os coeficientes a_k devem ser convenientemente calculados,

sendo para este exemplo $a_k = \frac{2}{k\pi} (1 - \cos(k\pi))$.

A figura M10.7 mostra a evolução dos coeficientes para sucessivos valores de k , no caso para os primeiros 20 coeficientes.

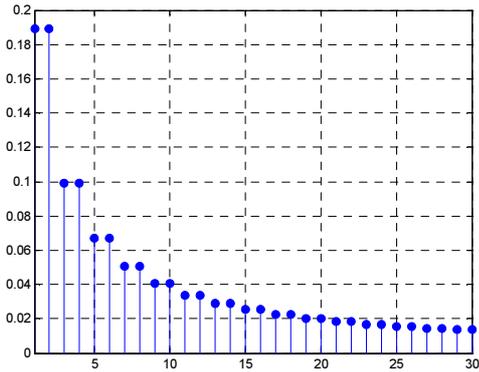


Figura M10.8

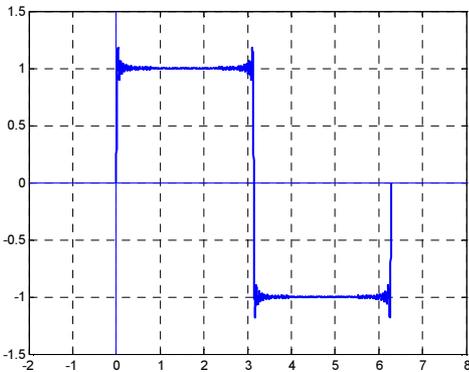


Figura M10.9

A figura M10.8 mostra a evolução do erro quadrático médio à medida que se vão somando as sucessivas componentes de $\tilde{x}(t)$.

A figura M10.9 mostra a aproximação $\tilde{x}(t)$ conseguida se utilizássemos 100 coeficientes.

O erro quadrático médio da representação num intervalo $[t_1, t_2]$ de um sinal contínuo $x(t)$, num espaço de sinais $\{y_k(t)\}$, é dado por

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \hat{x}(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) \right]^2 dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x_e^2(t) dt \end{aligned}$$

O erro quadrático médio da representação num intervalo $[n_1, n_2]$ de um sinal discreto $x[n]$, num espaço de sinais $\{y_k[n]\}$, é dado por

$$C = \frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{n_1}^{n_2} \left[x[n] - \sum_{k=1}^n a_k y_k[n] \right]^2$$

10.5. Ortogonalização de Gram-Schmidt.

A ortogonalização de Gram-Schmidt é uma sequência de procedimentos que, a partir de uma qualquer base de um subespaço \mathbb{W} dum espaço vectorial \mathbb{E} , em que está definido um produto interno, permite obter uma base ortonormada para esse subespaço. Seja $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ uma base do subespaço \mathbb{W} , e façamos:

1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$

2. Para $k = 2$ até n

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i} \mathbf{v}_i$$

3. $\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$

O conjunto de vectores $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n\}$ é uma base ortonormada, do subespaço \mathbb{W} .

Exemplo 13.

Consideremos a base canónica de \mathcal{P}_2 , $\mathcal{B} = \{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2\}$ e o produto interno em $\mathcal{C}[-1,1]$

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g^*(x)dx$$

Como vimos, os vectores de \mathcal{B} não são ortogonais. Aplicando a ortogonalização de Gram-Schmidt aos vectores de \mathcal{B} podemos construir uma base ortogonal para \mathcal{P}_2 . Temos então

1. $r_1 = p_1 = 1$

2. $r_2 = p_2 - \frac{p_2 \cdot r_1}{r_1 \cdot r_1} r_1 = x - \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 dx} = x - \frac{0}{2} = x$

$$r_3 = p_3 - \frac{p_3 \cdot r_2}{r_2 \cdot r_2} r_2 - \frac{p_3 \cdot r_1}{r_1 \cdot r_1} r_1$$

3.
$$= x^2 - \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} x - \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 dx} = x^2 - \frac{0}{2/3} x - \frac{2/3}{2}$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}$$

Assim, o conjunto $\mathcal{U} = \left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$ constitui uma base ortogonal de $\mathcal{P}_2[-1,1]$ relativamente ao produto interno

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g^*(x)dx$$



Exercícios.

PRODUTO INTERNO NO ESPAÇO DE FUNÇÕES.

1. O sinal $x_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$, com k inteiro, é um sinal periódico de período $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Em qualquer intervalo correspondente a um período $[t_1, t_1 + T_0]$, a norma de $x_k(t)$ é

$$\begin{aligned} \|x_k\| &= \sqrt{x_k \cdot x_k} = \left(\int_{t_1}^{t_1+T_0} x_k(t)x_k^*(t) dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{jk\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t} dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{t_1}^{t_1+T_0} dt \right)^{1/2} \\ &= \left([t]_{t_1}^{t_1+T_0} \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{t_1 + T_0 - t_1} \\ &= \sqrt{T_0} \end{aligned}$$

Temos assim que o sinal

$$e_k(t) = \frac{x_k(t)}{\|x_k(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{T_0}} e^{jk\omega_0 t} = \sqrt{\frac{\omega_0}{2\pi}} e^{jk\omega_0 t}$$

é um vector de norma unitária no espaço $\mathcal{C}[t_1, t_1 + T_0]$.

2. Para verificar se $f(x) = \text{sen}(2x)$ pertence ao espaço gerado por $f_1(x) = \text{sen}(x)$ e $f_2(x) = \text{cos}(x)$, basta verificar que $\text{sen}(2x)$ é ortogonal a $\text{sen}(x)$ e a $\text{cos}(x)$, o que nos permite concluir que $\text{sen}(2x)$ não pertence ao espaço gerado por $\text{sen}(x)$ e $\text{cos}(x)$.

Atendendo a que $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\text{cos}(x)$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \text{sen}(2x)\text{sen}(x)dx &= \int_0^{2\pi} 2\text{sen}(x)\text{cos}(x)\text{sen}(x)dx \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(x)\text{cos}(x)dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} \text{sen}^3(x) \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \text{sen}(2x)\text{cos}(x)dx &= \int_0^{2\pi} 2\text{sen}(x)\text{cos}(x)\text{cos}(x)dx \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \text{sen}(x)\text{cos}^2(x)dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3} \text{cos}^3(x) \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aliás, e em geral, podemos demonstrar que, com $m \neq n$, as funções $\text{sen}(mx)$, $\text{sen}(nx)$, $\text{cos}(mx)$ e $\text{cos}(nx)$ são ortogonais.

3. Calcular a energia do sinal contínuo definido por

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & , 0 \leq t \leq 4 \\ 0 & , t \notin [0, 4] \end{cases}$$

Sendo a energia de um sinal contínuo $x(t)$ definida por

$$E = x \cdot x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

, temos em particular

$$\begin{aligned} E &= \int_0^4 t^4 dt \\ &= \left. \frac{t^5}{5} \right|_0^4 \\ &= \frac{4^5}{5} \end{aligned}$$

4. Calcular a potência do sinal contínuo definido por

$$x(t) = 4 \cos(10\pi t)$$

Sendo a potência de um sinal contínuo periódico $x(t)$ definida por

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

, temos em particular

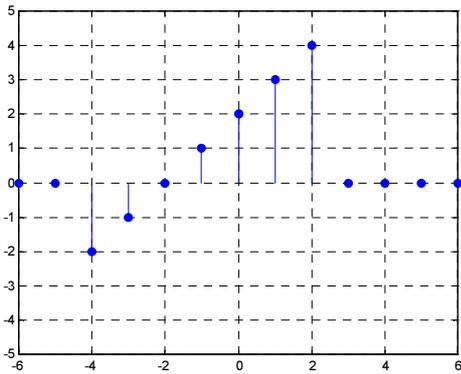
$$\omega_0 t = 10\pi t \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} t = 10\pi t \Rightarrow T_0 = \frac{1}{5}$$

, e

$$\begin{aligned} P &= 5 \int_{-1/10}^{1/10} 4^2 \cos^2(10\pi t) dt \\ &= 4^2 \left(\frac{1}{4\pi} \cos(10\pi t) \sin(10\pi t) + \frac{5t}{2} \right) \Big|_{-1/10}^{1/10} \\ &= \frac{4^2}{2} = 8 \end{aligned}$$

Em geral, a potência do sinal $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$ é igual a $\frac{A^2}{2}$.

5. Calcular a energia do sinal discreto $x[n]$ definido por



$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < -4 \\ n + 2 & -4 \leq n < 3 \\ 0 & n \geq 3 \end{cases}$$

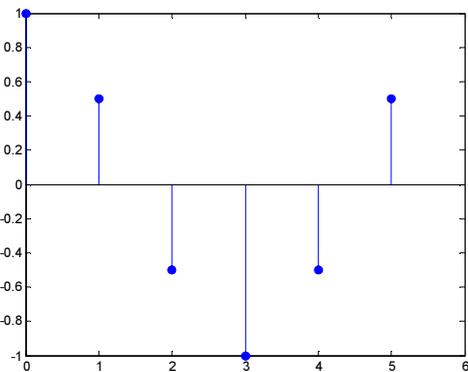
Sendo a energia de um sinal discreto $x[n]$ definida por

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

, temos em particular

$$E = (-2)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 = 35$$

6. Calcular a potência dos sinais discretos $x_1[n]$ e $x_2[n]$ definidos por



$$x_1[n] = \cos\left[n \frac{\pi}{3}\right]$$

$$x_2[n] = \cos\left[n \frac{\pi}{5}\right]$$

Sendo a potência de um sinal discreto periódico $x[n]$ definida por

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

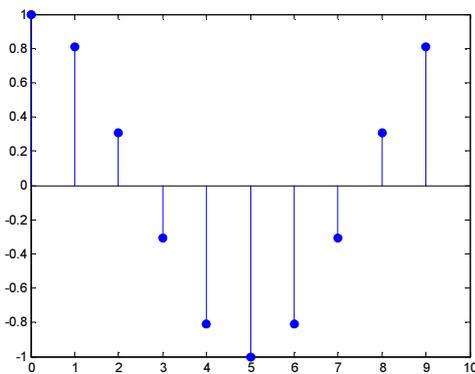
, temos em particular

$$\Omega_0 n = \frac{\pi}{3} n \Rightarrow \frac{2\pi}{N} n = \frac{\pi}{3} n \Rightarrow N = 6$$

$$P_1 = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 \cos^2\left[n \frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{6} \left((1)^2 + (0.5)^2 + (-0.5)^2 + (-1)^2 + (-0.5)^2 + (0.5)^2 \right) = 0.5$$

Para o segundo sinal temos $N = 10$, pelo que

$$P_2 = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^9 \cos^2\left[n \frac{\pi}{5}\right] = 0.5$$



MÍNIMO ERRO QUADRÁTICO.

7. Calcular a projecção ortogonal de $f(x) = e^x$ no subespaço vectorial, $\mathbb{W} = \mathcal{P}_2[-1,1]$, dos polinómios do 2º grau no intervalo $[-1,1]$, com o produto interno

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g^*(x)dx$$

(ou seja, calcular os parâmetros do polinómio do 2º grau que, no intervalo $[-1,1]$, melhor se adapta à função $f(x) = e^x$ no sentido da minimização do erro quadrático)

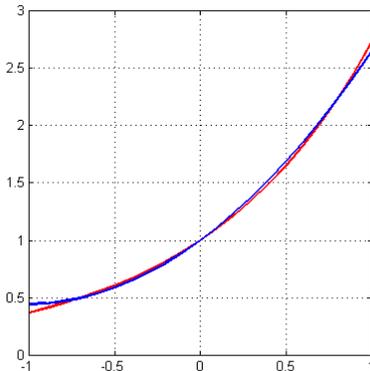


Figura M9.10

Dado que $\mathcal{B} = \left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$ constitui uma base ortogonal de \mathbb{W} , temos

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbb{W}} f &= \frac{f \cdot p_1}{p_1 \cdot p_1} p_1 + \frac{f \cdot p_2}{p_2 \cdot p_2} p_2 + \frac{f \cdot p_3}{p_3 \cdot p_3} p_3 \\ &= \frac{\int_{-1}^1 e^x dx}{\int_{-1}^1 dx} + \frac{\int_{-1}^1 e^x x dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} x + \frac{\int_{-1}^1 e^x (x^2 - \frac{1}{3}) dx}{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} (x^2 - \frac{1}{3}) \\ &= \frac{[e^x]_{-1}^1}{2} + \frac{[(-1+x)e^x]_{-1}^1}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1} x + \frac{\left[\frac{1}{3}e^x(5-6x+3x^2)\right]_{-1}^1}{\left[\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^1} (x^2 - \frac{1}{3}) \\ &= \frac{e - e^{-1}}{2} + \frac{2e^{-1}}{2/3} x + \frac{13/3(2e - 14e^{-1})}{8/45} (x^2 - \frac{1}{3}) \\ &= \frac{3(11e^{-1} - e)}{4} + 3e^{-1}x + \frac{15(e - 7e^{-1})}{4} x^2 \\ &\approx 1.00 + 1.10x + 0.54x^2 \end{aligned}$$

8. Consideremos o sinal

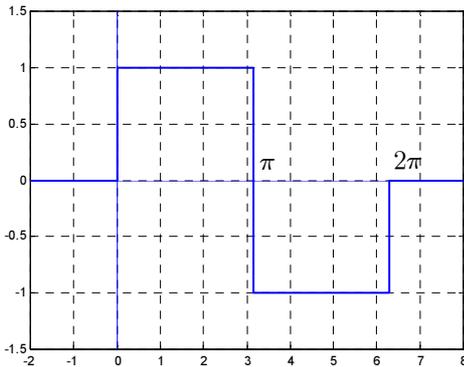


Figura M10.11

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \pi \\ -1 & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

, conforme representado na figura M10.11.

Vamos calcular a projecção ortogonal do sinal $x(t)$ no espaço gerado pelo sinal $y(t) = \text{sen}(t)$ no intervalo $[0, 2\pi]$. Ou seja, vamos determinar a na relação $x(t) = ay(t) + x_e(t)$ de modo a minimizar o erro quadrático no intervalo $[0, 2\pi]$.

Temos então

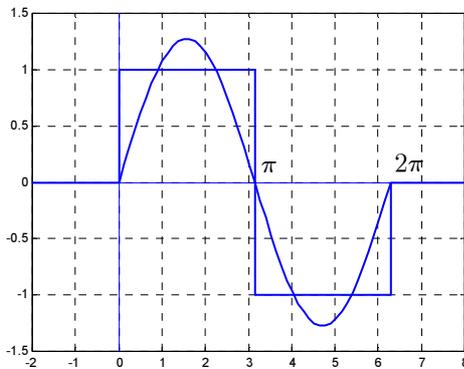


Figura M10.12

$$\begin{aligned} a &= \frac{\int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt}{\int_0^{2\pi} y^2(t)dt} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} x(t)\text{sen}(t)dt}{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(t)dt} \\ &= \frac{\int_0^{\pi} \text{sen}(t)dt - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}(t)dt}{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

pelo que

$$\hat{x}(t) = \frac{4}{\pi} \text{sen}(t)$$

no intervalo $[0, 2\pi]$. A figura M4.12 mostra o gráfico do sinal $x(t)$ e da aproximação $\hat{x}(t)$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Podemos traçar o gráfico da evolução do erro quadrático médio em função do coeficiente de semelhança a . Sendo o erro quadrático médio dado genericamente por

$$C = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x_e^2(t)dt$$

Temos para o exemplo em causa

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - ay(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x(t) - a\text{sen}(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} x^2(t)dt + a^2 \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(t)dt - 2a \int_0^{2\pi} x(t)\text{sen}(t)dt \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} (2\pi + a^2\pi - 8a) \end{aligned}$$

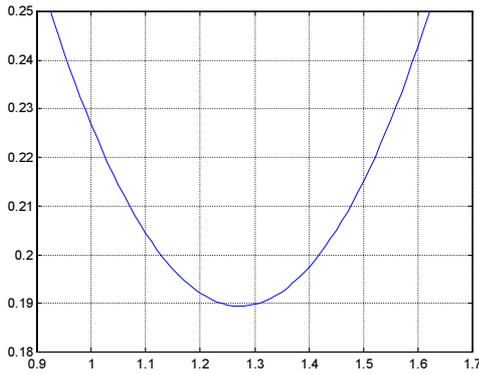


Figura M10.13

A figura M10.13 mostra a evolução do erro quadrático médio em função do coeficiente de semelhança. Observe que a curva tem um andamento quadrático com um mínimo bem definido correspondente ao coeficiente de semelhança. Podemos verificar o valor do mínimo do erro quadrático médio

$$\begin{aligned} \frac{dC}{da} &= \frac{d}{da} \left(\frac{1}{2\pi} (2\pi + a^2\pi - 8a) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} (2a\pi - 8) \end{aligned}$$

$$\frac{dC}{da} = 0 \Rightarrow 2a\pi - 8 = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{\pi}$$

9. Aproximar o sinal $x(t)$ dado no exemplo anterior pelo sinal

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^{k=7} a_k \text{sen}(kt)$$

, de modo a minimizar o erro quadrático médio no intervalo $[0, 2\pi]$.

Vamos calcular os coeficientes correspondentes à projecção ortogonal de $x(t)$ sobre cada um dos vectores que definem o espaço de representação. Temos então

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)y_k^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} y_k y_k^*(t)dt} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} x(t) \text{sen}(kt)dt}{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(kt)dt} \\ &= \frac{\int_0^{\pi} \text{sen}(kt)dt - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}(kt)dt}{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(kt)dt} \\ &= \frac{\frac{1}{k} \left[\cos(kt) \Big|_{\pi}^{2\pi} - \cos(kt) \Big|_0^{\pi} \right]}{\pi} \\ &= \frac{2}{k\pi} (1 - \cos(k\pi)) \end{aligned}$$

ou seja

$$a_n = \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ \frac{4}{k\pi} & k \text{ impar} \end{cases}$$

logo

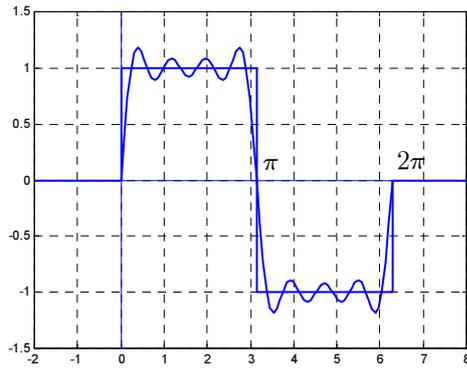


Figura M10.14

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^{k=7} a_k \text{sen}(kt)$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[\text{sen}(t) + \frac{1}{3} \text{sen}(3t) + \frac{1}{5} \text{sen}(5t) + \frac{1}{7} \text{sen}(7t) \right]$$

A figura M10.14 mostra comparativamente o sinal $x(t)$ e a aproximação $\hat{x}(t)$ obtida.

10. Consideremos os sinais representados na figura M10.15. Podemos determinar o valor de a de modo a que os sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sejam ortogonais.

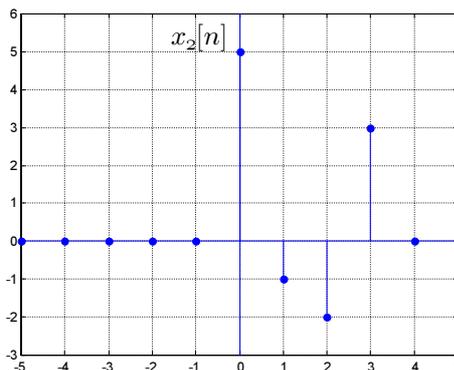
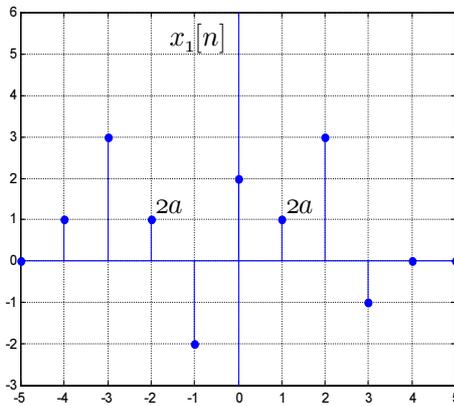


Figura M10.15

Para que os sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sejam ortogonais é necessário que o seu produto interno seja nulo. Por definição de produto interno entre sinais discretos, temos

$$x_1 \cdot x_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n]$$

$$= \sum_{n=0}^3 x_1[n]x_2[n]$$

$$= (2 \times 5) + (2a \times (-1)) + (3 \times (-2)) + (-1 \times 3)$$

$$= 10 - 2a - 6 - 3$$

$$= 1 - 2a$$

, logo, $x_1 \cdot x_2 = 0$ implica que

$$1 - 2a = 0$$

$$a = 0.5$$

Considerando o valor determinado para a , podemos calcular a energia dos sinais $x_1[n]$, e $x_2[n]$.

A energia do sinal $x_1[n]$ é dada por

$$E_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} x_1^2[n]$$

$$= \sum_{-4}^3 x_1^2[n]$$

$$= 1 + 9 + 1 + 4 + 4 + 1 + 9 + 1$$

$$= 30$$

sendo para para $x_2[n]$

$$E_2 = \sum_0^3 x_2^2[n]$$

$$= 25 + 1 + 4 + 9 = 39$$

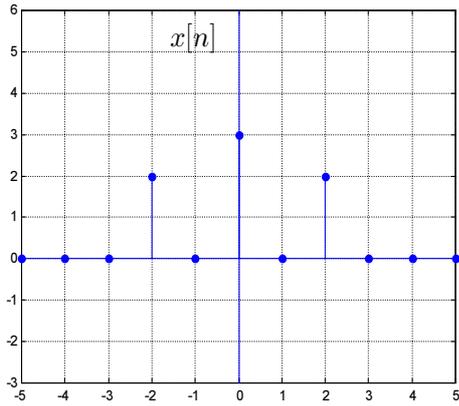


Figura M10.16

Consideremos o sinal $x[n]$ representado na figura M10.16. Podemos calcular a projecção ortogonal do sinal $x[n]$ no espaço dos sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$, ou seja, o sinal $\hat{x}[n]$ pertencente a esse espaço que mais se aproxima de $x[n]$ do ponto de vista da minimização do erro quadrático

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x_e^2[n]$$

, ou seja ainda, tendo em atenção a definição de energia de um sinal, o sinal que minimiza a energia do sinal de erro

$$x_e[n] = x[n] - \hat{x}[n]$$

Vamos então determinar os valores dos coeficientes a_1 e a_2 da expressão $x[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n] + x_e[n]$ de forma a que a energia do sinal $x_e[n]$ seja mínima. Sendo os coeficientes a_i dados por

$$a_k = \frac{x \cdot x_k}{x_k \cdot x_k} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} x[n]x_k[n]}{\sum_{-\infty}^{\infty} x_k^2[n]}$$

Temos

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sum_{-2}^2 x[n]x_1[n]}{E_1} \\ &= \frac{1}{30} [(2 \times 1) + (3 \times 2) + (2 \times 3)] \\ &= \frac{14}{30} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\sum_0^2 x[n]x_2[n]}{E_2} \\ &= \frac{1}{39} [(3 \times 5) + (2 \times (-2))] \\ &= \frac{11}{39} \end{aligned}$$