

Módulo 1

TÓPICOS

Motivação, Enquadramento e Objectivos.

Exemplos de Aplicação.



1. Motivação, Enquadramento e Objectivos.

Na cadeira de Matemática Aplicada às Telecomunicações é apresentado um conjunto de conceitos da área científica da matemática de utilização explícita imediata nas cadeiras da especialidade. É muito importante que o aluno se **familiarize com a linguagem** e **domine as técnicas** associadas aos conceitos aqui apresentados, para que possa assistir com aproveitamento às cadeiras da especialidade dos 3^o e 4^o semestres, nomeadamente: Electromagnetismo; Sinais e Sistemas; Propagação e Radiação; Sistemas Electrónicos A/D 1; e Fundamentos de Telecomunicações. Acrescem a estas diversas outras nos semestres posteriores, quer da licenciatura quer do mestrado, de que as supra citadas cadeiras são a raiz.

Na sequência dos conceitos apresentados na cadeira de Análise Matemática 1, que se espera que o aluno tenha bem presente, nomeadamente os que estão associados às Séries e ao Cálculo Diferencial e Integral em \mathbb{R} , vai aqui ser feito o estudo de **Equações Diferenciais** e de **Funções de Variável Complexa**. Em paralelo, o aluno deverá assistir à cadeira de Análise Matemática 2, dado serem aí apresentados, coordenadamente com esta cadeira, e no âmbito do estudo do Cálculo Diferencial e Integral em \mathbb{R}^n , diversos conceitos utilizados a quando do estudo de equações diferenciais e de funções de variável complexa.

Após ter frequentado com aproveitamento esta cadeira, o aluno deverá estar apto a reconhecer e resolver analiticamente as equações diferenciais ordinárias mais comuns, nomeadamente de 1^a ordem e lineares de ordem n de coeficientes constantes, reconhecer os tipos de equações às derivadas parciais e conhecer as soluções das mais comuns, e dominar os conhecimentos básicos de funções de variável complexa, que lhe permitam evoluir no estudo de sinais e sistemas em geral, e, nomeadamente, e a curto prazo, prosseguir os estudos no domínio das Transformadas de Fourier, Laplace e Z.



2. Exemplos de Aplicação.

Mostram-se aqui alguns exemplos de aplicação das equações diferenciais e das funções de variável complexa na área da Engenharia das Telecomunicações e Electrónica. Todos eles serão objecto de estudo nas cadeiras a especialidade. A linguagem utilizada é necessariamente abreviada e simplificada.

2.1. Análise de Sinais.

Qualquer sinal contínuo, $x(t)$, periódico de frequência angular $\omega_0 = 2\pi/T_0$, pode ser representado completamente através de uma Série de Fourier, que tem a forma:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

, sendo os coeficientes da série, C_k , quantidades complexas dadas por:

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Por exemplo, se para representar o sinal que se mostra na figura M1.1 utilizássemos apenas 21 coeficientes, e não um número infinito como a série exige para que a representação seja exacta, obteríamos o sinal que se mostra na figura M1.2:

$$x(t) \approx \sum_{k=-10}^{10} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

Faremos nesta cadeira uma revisão dos números complexos e alargaremos a análise ao estudo de **funções de variável complexa**, cálculo diferencial e integral no domínio complexo etc.. Um bom domínio destes conceitos é essencial, explicitamente, nas cadeiras de Análise de Sinais e Fundamentos de Telecomunicações.

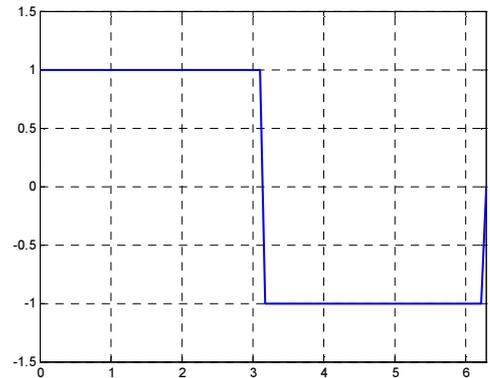


Figura M1.1

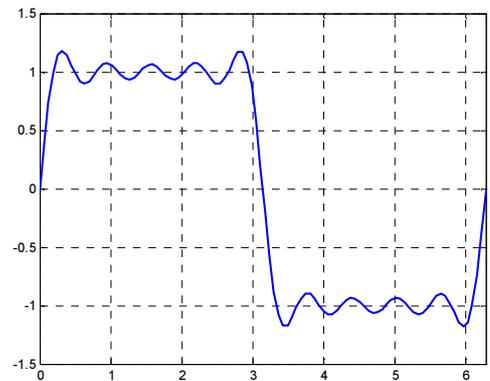


Figura M1.2

2.2. Análise de Sistemas Discretos

Um sistema discreto, como o que se mostra esquematicamente na figura M1.3, é descrito pela equação às diferenças:

$$y[n] = y[n - 1] - 0.25y[n - 2] + x[n]$$

, e é facilmente estudado se recorrermos ao conceito de Transformada Z.

Define-se a Transformada Z de um sinal causal $x[n]$ como

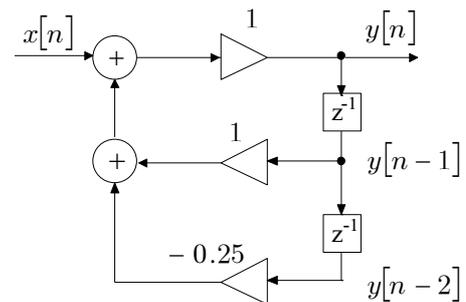


Figura M1.3

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

, em que $z = re^{j\Omega}$ é uma quantidade complexa.

Com base na equação às diferenças que caracteriza o sistema e no conceito de Transformada Z, podemos determinar uma característica dos sistema designada por função de transferência. Neste caso:

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

Com base na função de transferência podemos determinar o modo como o sistema responde no tempo a sinais colocados na sua entrada. Por exemplo, se colocássemos na entrada do sistema um só impulso, o sistema responderia com

$$h[n] = (n + 1)0.5^n, \quad n > 0$$

, chamada a resposta impulsiva dos sistema, e que se mostra na figura M1.4

Ainda com base na função de transferência, podemos determinar o modo como o sistema responde na frequência a sinais colocados na sua entrada, calculando a chamada resposta em frequência do sistema:

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega} + 0.25e^{-2j\Omega}}$$

A figura M1.5 mostra o módulo da resposta em frequência. A partir dela podemos concluir que o sistema pode ser classificado como um filtro passa-baixo.

Mais uma vez, como se pode ver pelas expressões acima, a capacidade de manipulação de quantidades complexas é essencial para um bom domínio dos conceitos apresentados neste exemplo, e que são explorados detalhadamente nas cadeiras de Análise de Sinais e Processamento Digital de Sinal.

2.3. Análise de Sistemas Contínuos

O estudo de um sistema contínuo é similar ao de um sistema discreto. Em vez de uma equação às diferenças o sistema contínuo é descrito por uma **equação diferencial** e em vez de utilizarmos à Transformada Z, recorreremos, quando possível, isto é, quando a equação diferencial é do tipo adequado, à sua similar no domínio contínuo, a Transformada de Laplace:

$$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

, em que $s = \sigma + j\omega$ é uma quantidade complexa.

Temos assim, mais uma vez, a necessidade de dominar a manipulação analítica de quantidades complexas. Para além disso aparece aqui, e, como veremos, nos exemplos seguintes, a necessidade de dominar os conceitos

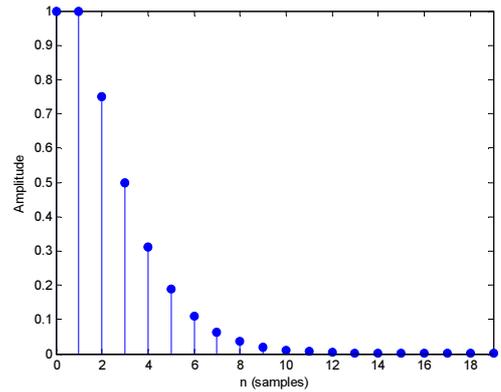


Figura M1.4

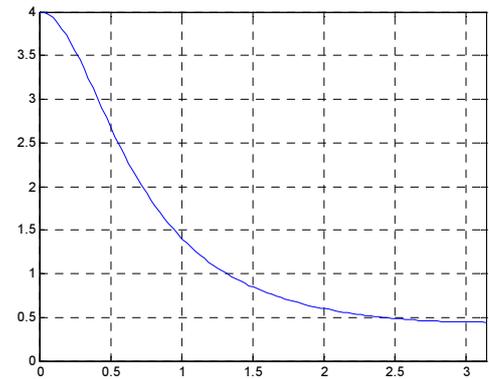


Figura M1.5

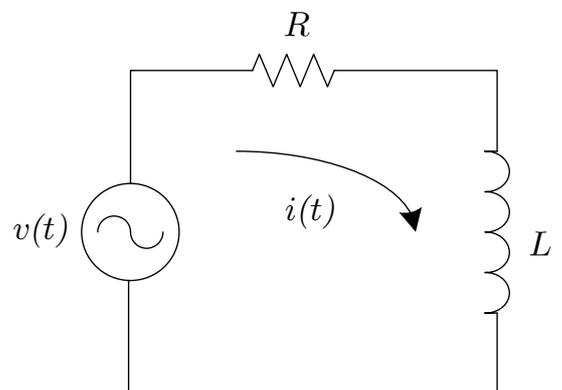


Figura M1.6

associados à teoria das equações diferenciais. A primeira parte desta cadeira será dedicado aos estudo desse tema.

A figura M1.6 mostra o esquema de um exemplo concreto de um sistema contínuo: um circuito RL . A equação diferencial que descreve o sistema é

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = v(t)$$

O circuito foi analisado de forma “*ad-hoc*” na cadeira de Análise de Circuitos. Em Matemática Aplicada vamos ver como encontrar as soluções de vários tipos de equações diferenciais de modo a ganhar autonomia relativamente à análise de sistemas contínuos de maior complexidade, como os que surgirão, por exemplo, nas cadeiras de Sistemas Electrónicos A/D 1 e Controlo.

2.4. Propagação de Ondas Electromagnéticas

No final do século 19, Maxwell estabeleceu as leis gerais que regem o comportamento do campo electromagnético em qualquer meio e sistema.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

O símbolo ∇ corresponde a um operador diferencial, designado por “*nabla*”, que tem uma forma concreta dependente do sistema de coordenadas em que se está a trabalhar. Por exemplo, em coordenada cartesianas temos

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Os símbolos $\nabla \times$ e $\nabla \cdot$ lêem-se, respectivamente, “*rotacional de*” e “*divergência de*”. As equações de Maxwell são então **equações diferenciais às derivadas parciais**. Veremos nesta cadeira como classificar e manipular este tipo de equações (os conceitos de cálculo diferencial em \mathbb{R}^n serão apresentados em Análise Matemática 2).

Dependendo do tipo de meio e sistema em análise, as equações de Maxwell poderão conduzir a problemas de resolução de equações diferenciais com maior ou menor grau de complexidade. Vejamos alguns exemplos

Linhas de Transmissão

Este é um dos exemplos de menor grau de complexidade. Após alguns considerando sobre as características dos meios (materiais) e a topologia do sistema (a forma da linha) poderíamos, a partir das equações de Maxwell, chegar às *equações diferenciais parciais* que, numa aproximação de 1ª ordem, determinam o comportamento da tensão e da corrente ao longo da linha:

$$- \frac{\partial V}{\partial z} = RI + L \frac{\partial I}{\partial t}$$

$$- \frac{\partial I}{\partial z} = GV + C \frac{\partial V}{\partial t}$$

E ainda, tecendo mais alguns considerandos, chegar à *equação diferencial ordinária* que determina o comportamento da tensão ao longo da linha (segundo z):

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \gamma^2 V$$

, em que γ é uma característica da linha chamada “constante de propagação do modo principal”:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

, que depende dos chamados parâmetros distribuídos da linha (R, L, G e C), associados ao modo como a linha de transmissão dissipa e armazena energia. A equação diferencial a que chegámos tem como **solução geral**

$$V_z = K_1 e^{-\gamma z} + K_2 e^{+\gamma z}$$

Podemos interpretar esta solução como correspondendo à soma de duas ondas: uma onda “incidente”, $K_1 e^{-\gamma z}$, que percorre a linha no sentido do gerador para a carga; e uma onda “reflectida”, $K_2 e^{+\gamma z}$, que percorre a linha no sentido da carga para o gerador. As constantes K_1 e K_2 podem ser calculadas se forem conhecidas as **condições fronteira**, que nos permitem, eliminando as constantes, chegar a uma **solução particular**.

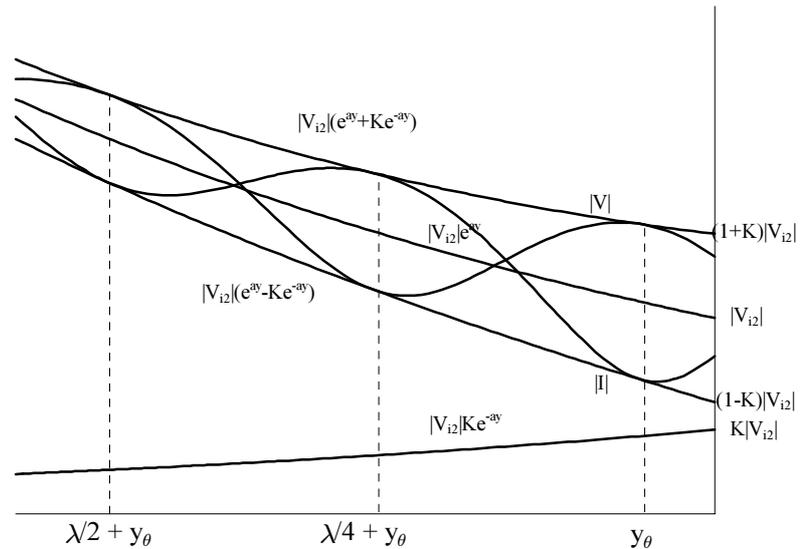


Figura M1.7

A figura M1.7 mostra a evolução da tensão ao longo da linha.

Fibras Ópticas

Este é um dos exemplos de maior grau de complexidade. A partir das equações de Maxwell podemos deduzir as equações diferenciais que regem o comportamento dos campos longitudinais na fibra (neste sistema não se pode recorrer ao conceito de tensão e corrente), as chamadas equações de Helmholtz:

$$\begin{aligned} \nabla_t^2 H_z + (k_d^2 - k_z^2) H_z &= 0 \\ \nabla_t^2 E_z + (k_d^2 - k_z^2) E_z &= 0 \end{aligned}$$

Estas equações diferenciais têm como solução geral

$$\begin{aligned} E_z &= A R(r) \Phi(\varphi) e^{-jk_z z} \\ H_z &= B R(r) \Phi(\varphi) e^{-jk_z z} \end{aligned}$$

que, por substituição nas equações de Helmholtz, e sendo R e Φ independentes, implicam as equações diferenciais

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} &= -m^2 \\ \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + (k_d^2 - k_z^2) r^2 &= m^2 \end{aligned}$$

em que m é um inteiro positivo.

A 1ª equação diferencial admite uma solução da forma

$$\Phi(\varphi) = e^{jm\varphi}$$

Este é um tipo de equações cujo modo de resolução abordaremos nesta cadeira.

A 2ª equação é uma *equação de Bessel*, tendo uma solução geral, no núcleo, uma função de Bessel de 1ª espécie

$$R(r) = J_m(k_u r)$$

, e, na bainha, uma solução geral na forma de funções de Bessel modificadas de 1ª e 2ª espécie

$$R(r) = K_m(k_b r)$$

Este é um tipo de equações diferenciais, com apenas soluções numéricas conhecidas, cuja resolução já transcende completamente o âmbito desta cadeira.

Destes considerando poderíamos chegar às soluções gerais para os campos. Por exemplo, para a componente longitudinal do campo eléctrico teríamos, no núcleo

$$E_z = A \frac{J_m(k_u r)}{J_m(k_u a)} e^{jm\varphi} e^{-jk_z z}$$

, e na bainha

$$E_z = A \frac{K_m(k_b r)}{K_m(k_b a)} e^{jm\varphi} e^{-jk_z z}$$

Agora seria ainda necessário impor as condições fronteira para se alcançar a solução particular de propagação numa fibra óptica.

Muitas outras situações do âmbito da propagação guiada ou em espaço livre serão apresentadas nas cadeiras de Electromagnetismo e Propagação e Radiação. Um bom domínio dos conceitos matemáticos que lhes estão associados é essencial para um bom aproveitamento nessas cadeiras.

Espera-se que através dos exemplos acima os alunos tenham ficado sensibilizados para a importância fundamental do domínio dos conceitos associados à teoria das equações diferenciais e funções de variável complexa, sem o qual a progressão no curso através das cadeiras que deles fazem uso explícito será extremamente penoso, se não de todo impossível.