

Módulo 2

• Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

• Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Números complexos (Revisão).



1. Números Complexos.

1.1. Corpo dos números complexos, \mathbb{C} .

Define-se um **número complexo** como

$$z = a + jb$$

, onde a e b são números reais e j (ou i), designa a **unidade imaginária**

$$j = \sqrt{-1}$$

Designamos a por **parte real** de z , $a = \text{Re}\{z\}$, e b por **parte imaginária** de z , $b = \text{Im}\{z\}$, dizendo-se no caso em que $a = 0$ que z é um número **imaginário puro**.

Dado o número complexo $z = a + jb$ define-se o seu **conjugado** como $z^* = a - jb$

Dados dois número complexos, $z = a + jb$ e $w = c + jd$, temos que:

a **igualdade** entre eles se verifica sse $a = c$ e $b = d$;

a **adição** se define como $z + w = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$;

e a **multiplicação** se define como $zw = (a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$.

Com a igualdade, adição e multiplicação assim definidas, podem demonstrar-se as leis (comutativa, associativa, fecho, etc.) que nos permitem concluir que o conjunto dos números complexos, \mathbb{C} , tal como o conjunto dos números reais, constitui um **corpo**.

Exemplos

1. Podemos simplificar o complexo

$$z = \frac{3j^{30} - j^{19}}{2j - 1}$$

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{3(j^2)^{15} - (j^2)^9 j}{2j-1} = \frac{3(-1)^{15} - (-1)^9 j}{2j-1} \\
 &= \frac{-3+j}{-1+2j} \\
 &= \frac{-3+j}{-1+2j} \frac{-1-2j}{-1-2j} \\
 &= \frac{3+6j-j-2j^2}{1+4} = \frac{5+5j}{5} \\
 &= 1+j
 \end{aligned}$$

1.2. Plano complexo.

Com a adição e multiplicação entre números complexos como definidas acima, podemos interpretar um número complexo $z = a + jb$ como um **par ordenado** de números reais (a, b) representáveis num plano cartesiano xy . A cada número complexo corresponde um, e só um, ponto do plano e a cada ponto do plano corresponde um, e só um, número complexo. Designamos o plano de representação por **plano complexo**, **plano de Argand**, ou **plano z** , o eixo dos xx é designado por **eixo real** e o eixo dos yy é designado por **eixo imaginário**.

Exemplos

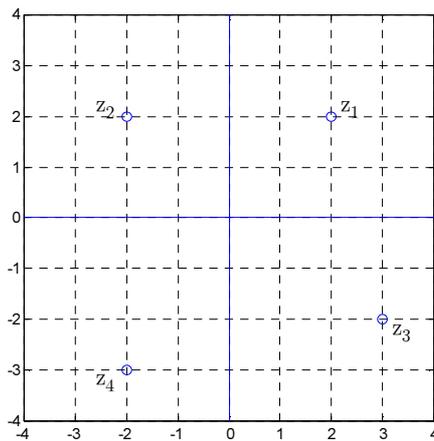


Figura M7.1

2. A figura M7.1 mostra a representação dos números complexos

$$\begin{aligned}
 z_1 &= 2 + 2j \\
 z_2 &= -2 + 2j \\
 z_3 &= 3 - 2j \\
 z_4 &= -2 - 3j
 \end{aligned}$$

no plano complexo.

1.3. Métrica e topologia do plano complexo.

As noções métricas em \mathbb{C} e em \mathbb{R}^2 são coincidentes. Nomeadamente, definimos a **norma** de um complexo, $z = a + jb$, como

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

, e a **distância** entre dois números complexos, z e w , como

$$d(z, w) = |z - w|$$

Como as noções métricas de \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 são coincidentes, também coincidem as suas noções topológicas. Nomeadamente, as noções de conjunto aberto, fechado, conexo, simplesmente conexo, e compacto, as noções de ponto interior, exterior, fronteiro, de acumulação, e isolado, e ainda as noções de conjunto interior, exterior, fronteira e fecho de um conjunto (recorde os conceitos apresentados em Análise Matemática 2).

Chamamos **região** em \mathbb{C} a um subconjunto de \mathbb{C} não vazio, aberto e conexo.

Exemplos

3. O conjunto de valores de $z = x + jy$ para os quais se verifica

$$\left| \frac{z - 3}{z + 3} \right| = 2$$

pode ser encontrado fazendo

$$\begin{aligned} \left| \frac{z - 3}{z + 3} \right| &= 2 \\ |z - 3| &= 2|z + 3| \\ |x + jy - 3| &= 2|x + jy + 3| \\ |(x - 3) + jy| &= 2|(x + 3) + jy| \\ \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} &= 2\sqrt{(x + 3)^2 + y^2} \\ x^2 + 9 - 6x + y^2 &= 4x^2 + 36 + 24x + 4y^2 \end{aligned}$$

$$3x^2 + 30x + 27 + 3y^2 = 0$$

$$x^2 + 10x + 9 + y^2 = 0$$

$$(x + 5)^2 + y^2 = 16$$

, ou seja

$$\sqrt{(x + 5)^2 + y^2} = 4$$

$$|z + 5| = 4$$

, correspondendo geometricamente a um círculo de raio 4 com centro em $(-5, 0)$, conforme se mostra na figura M7.2.

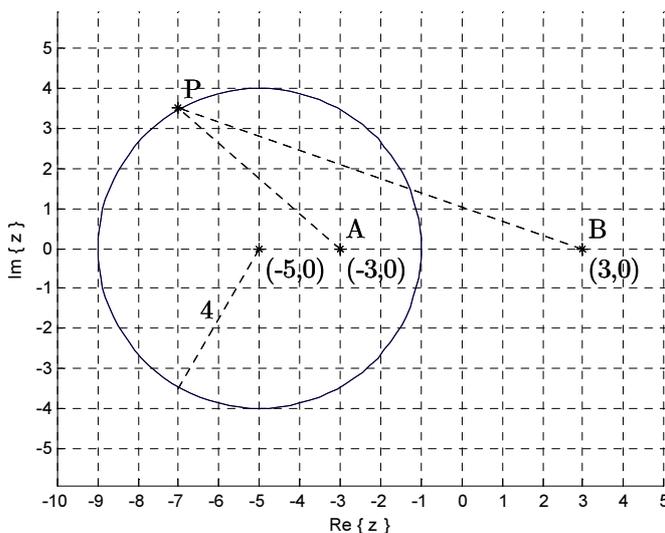


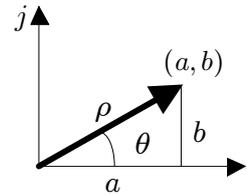
Figura M7.2

1.4. Forma cartesiana e polar.

Um número complexo pode ainda ser interpretado como um vector OP , cuja origem, O , é a origem do plano complexo e cujo extremo, P , é o ponto correspondente ao par ordenado (a, b) .

Quando escrito na forma $z = a + jb$, o complexo z diz-se escrito na **forma rectangular** (ou **cartesiana**). Podemos escrever um número complexo z noutra forma, dita **forma polar** (ou **exponencial**)

$$z = \rho e^{j\theta}$$



, em que ρ representa o **módulo** (ou **valor absoluto**) do complexo, coincidente com a norma, e θ o seu **argumento**. O módulo é facilmente obtido, recorrendo à representação gráfica do complexo, interpretado como um vector,

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

,ou, multiplicando o complexo pelo seu conjugado

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{(a + jb)(a - jb)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Quando o complexo está expresso na forma polar, o reconhecimento do módulo é imediato

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{\rho e^{j\theta} \rho e^{-j\theta}} = \rho$$

Quanto ao argumento, recorrendo à representação gráfica

$$\theta = \arg\{z\} = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

idêntico à relação a partir da forma rectangular

$$\arg\{z\} = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{z\}}{\text{Re}\{z\}}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Exemplos

4. O complexo $z = (1 - j)(-1 + j\sqrt{3})$, tendo em atenção que

$$\rho_1 = |1 - j| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\rho_2 = |-1 + j\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$$

, e ainda que, e notando que $1 - j$ está no 4º quadrante e $-1 + j\sqrt{3}$ está no 2º quadrante,

$$\theta_1 = \arg\{1 - j\} = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\theta_2 = \arg\{-1 + j\sqrt{3}\} = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{4\pi}{6}$$

pode ser escrito na forma polar

$$z = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} 2e^{-j\frac{4\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{-j\frac{5\pi}{12}}$$

1.5. Fórmula de Euler e teorema de De Moivre.

De notar que, a partir da representação gráfica, e dado que $\cos(\theta) = \frac{a}{\rho}$ e $\sin(\theta) = \frac{b}{\rho}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} z &= a + jb = \rho(\cos(\theta) + j \sin(\theta)) \\ &= \rho \operatorname{cis}(\theta) \end{aligned}$$

dita, também, forma polar de representação do complexo z . Na verdade, a forma anteriormente apresentada

$$z = \rho e^{j\theta}$$

resulta da **fórmula de Euler**

$$e^{\pm jx} = \cos(x) \pm j \sin(x)$$

, com x real. A partir da fórmula de Euler facilmente se obtêm as definições das funções seno e cosseno com base na função e^{jx} (dita função exponencial complexa e cujo estudo faremos mais tarde)

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

O produto e a divisão entre dois complexos é mais facilmente obtido quando estes estão escritos na forma polar

$$\begin{aligned} zw &= \rho_1 e^{j\theta_1} \rho_2 e^{j\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)) \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

Generalizando o produto, temos ainda que

$$\begin{aligned} z^n &= \rho e^{j\theta} \rho e^{j\theta} \dots \rho e^{j\theta} = \rho^n e^{jn\theta} \\ &= \rho^n (\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)) = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta) \end{aligned}$$

, relação conhecida por **teorema de De Moivre**.

Exemplos

5. Recorrendo à fórmula de Euler, as relações trigonométricas podem ser facilmente demonstradas. Por exemplo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \frac{e^{j\left(\frac{\pi}{2} - z\right)} - e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - z\right)}}{2j} = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-jz} - e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{jz}}{2j} \\ &= \frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) e^{-jz} - \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) e^{jz}}{2j} \\ &= \frac{(0 + j)j e^{-jz} - (0 - j)e^{jz}}{2j} = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \\ &= \cos(z) \end{aligned}$$

1.6. Raízes de números complexos.

Um número w diz-se **uma n-ésima raiz de um número complexo z** se $w^n = z$, ou seja, $w = z^{1/n}$.

Atendendo ao teorema de De Moivre podemos demonstrar que, sendo n um inteiro positivo,

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \rho^{1/n} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + j \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right) \\ &= \rho^{1/n} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) && \text{com } k = 0, 1, \dots, n - 1 \\ &= \rho^{1/n} e^{j(\theta + 2k\pi)/n} \end{aligned}$$

pelo que, existem n valores diferentes para $z^{1/n}$, ou seja, n diferentes raízes n-ésimas de z .

Em particular, as soluções da equação $z^n = 1$, sendo n um inteiro positivo, são chamadas as **n-ésimas raízes da unidade**, sendo

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[n]{1} \\ &= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + j \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= e^{j2k\pi/n} \end{aligned}$$

, com $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Geometricamente elas correspondem a pontos do plano complexo equiespaçados sobre o círculo de equação $|z| = 1$, dito o **círculo unitário**.

Exemplos

6. Dado $z^6 = (2 + j)^3$, sendo para $2 + j$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{4 + 1} = 5^{\frac{1}{2}} \\ \theta &= \arg\left\{ \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

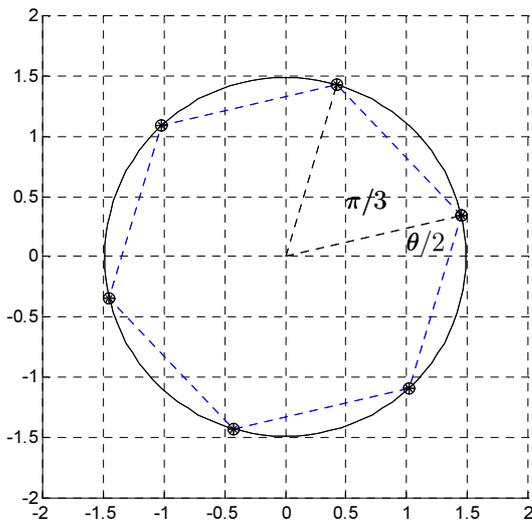


Figura M7.3

temos

$$z^6 = \left(5^{\frac{1}{2}} e^{j\theta}\right)^3 = 5^{\frac{3}{2}} e^{j3\theta}$$

, logo

$$\begin{aligned} z &= \left(5^{\frac{3}{2}} e^{j3\theta}\right)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{3}{12}} e^{j\left(\frac{3\theta + 2k\pi}{6}\right)} \\ &= 5^{\frac{1}{4}} e^{j\left(\frac{\theta + k\frac{2\pi}{6}}{2}\right)} \\ &= 5^{\frac{1}{4}} e^{j\left(\frac{\theta + k\frac{\pi}{3}}{2}\right)} \end{aligned}$$

, com $k = 0, 1, \dots, 5$. Geometricamente temos seis complexos sobre o círculo de módulo $5^{1/4}$ e equiespaçados de $k\pi/3$ como se representa na figura M7.3.