

Módulo 3

• Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

• Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Generalidades sobre equações diferenciais:

ordem; grau;

solução geral, particular, e singular;

curvas integrais;

condições iniciais e fronteira.



1. Equações Diferenciais. Conceitos Gerais.

1.1. Equação diferencial.

Chama-se equação diferencial a toda a equação em que a incógnita é uma função desconhecida (variável dependente) de uma ou mais variáveis (independentes), envolvendo derivadas da variável dependente em relação a uma ou mais variáveis independentes.

Exemplos

1. $xy'' + 2y' + 3xy = e^x$, função incógnita $y = f(x)$
2. $4 \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - 5x^2 = 0$, função incógnita $x = f(t)$
3. $(y'')^3 + 3y' + 6y = \tan(x)$, função incógnita $y = f(x)$
4. $\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial s} = x^2$, função incógnita $x = f(t, s)$
5. $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 6 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$, função incógnita $v = f(x, y, t)$

1.2. Equação diferencial ordinária (EDO)

Uma equação diferencial diz-se ordinária se a função incógnita depende de uma só variável. Genericamente

$$F(x, y, y', y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

Exemplos

6. $xy'' + 2y' + 3xy = e^x$, é uma equação diferencial ordinária.

$$7. 4 \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - 5x^2 = 0 \quad , \text{ é uma equação diferencial ordinária.}$$

1.3. Equação diferencial às derivadas parciais (EDP)

Uma equação diferencial diz-se com derivadas parciais (ou às derivadas parciais), se a função incógnita depende de mais que uma variável. Genericamente

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x_m^n}) = 0$$

Exemplos

$$8. \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial s} = x^2 \quad , \text{ é uma equação diferencial às derivadas parciais.}$$

$$9. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 6 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad , \text{ é uma equação diferencial às derivadas parciais.}$$

1.4. Ordem

Uma equação diferencial diz-se de ordem n se n for a derivada de maior ordem das derivadas nela envolvidas, ou seja, chama-se ordem de uma ED à ordem mais alta das derivadas que nela intervêm.

Exemplos

$$10. \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial s} = x^2 \quad , \text{ é uma equação diferencial de 1ª ordem.}$$

$$11. y' - 2y^2 - 3x = 0 \quad , \text{ é uma equação diferencial de 1ª ordem.}$$

$$12. xy'' + 2y' + 3xy = e^x \quad , \text{ é uma equação diferencial de 2ª ordem.}$$

$$13. (y'')^3 + 3y' + 6y = \tan(x) \quad , \text{ é uma equação diferencial de 2ª ordem}$$

$$14. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 6 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad , \text{ é uma equação diferencial de 2ª ordem}$$

$$15. 4 \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - 5x^2 = 0 \quad , \text{ é uma equação diferencial de 3ª ordem.}$$

$$16. y''' + (y'')^2 + y' = 0 \quad , \text{ é uma equação diferencial de 3ª ordem.}$$

$$17. y^{(n)} = \cos(x) \quad , \text{ é uma EDO de nª ordem.}$$

1.5. Grau

Uma equação diferencial diz-se de grau n se, podendo exprimir-se na forma de um polinómio, n for o expoente da derivada de maior ordem das derivadas nela envolvidas.

Exemplos

$$18. xy'' + 2y' + 3xy = e^x \quad , \text{ é uma equação diferencial do 1º grau.}$$

19. $4 \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - 5x^2 = 0$, é uma equação diferencial do 1º grau.
20. $\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial s} = x^2$, é uma equação diferencial do 1º grau.
21. $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 6 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$, é uma equação diferencial do 1º grau.
22. $y''' + (y'')^2 + y' = 0$, é uma equação diferencial do 1º grau.
23. $y' - 2y^2 - 3x = 0$, é uma equação diferencial do 1º grau.
24. $y^{(n)} = \cos(x)$, é uma equação diferencial do 1º grau.
25. $(y'')^3 + 3y' + 6y = \tan(x)$, é uma equação diferencial do 3º grau.
26. $(y')^{3/2} + y' = x$, não pode ser escrita na forma de um polinómio em y' , pelo que não pode ser classificada quanto ao grau.

1.6. Solução Geral

Designa-se por solução geral (ou **integral geral**) de uma ED toda a função que verifica identicamente a equação diferencial (ou seja, quando substituída na equação a transforma numa identidade), e vem expressa em termos de n constantes arbitrárias.

Se a ED é de 1ª ordem a solução geral tem uma constante, se é de 2ª ordem tem duas constantes, etc..

Geometricamente, a solução geral representa uma **família de curvas**, denominadas **curvas integrais**.

Exemplos

27. A solução geral da EDO

$$y'' + y' = 0$$

é

$$y = C_1 + C_2 e^{-x}$$

Trata-se de uma EDO de 2ª ordem pelo que a solução geral tem duas constantes. Podemos verificar que a função indicada é solução da equação diferencial. Sendo $y = C_1 + C_2 e^{-x}$ temos

$$y' = -C_2 e^{-x}$$

e

$$y'' = C_2 e^{-x}$$

Substituindo na EDO temos

$$C_2 e^{-x} - C_2 e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

1.7. Solução Particular

Designa-se por solução particular (ou **integral particular**) de uma ED toda a solução da ED que se obtém da solução geral por particularização da(s) constante(s).

Geometricamente, a solução particular representa **uma das curvas da família de curvas integrais**.

Exemplos

28. A solução geral da EDO $y'' + y' = 0$ é $y = C_1 + C_2 e^{-x}$. Se fizermos $C_1 = C_2 = 1$, obtemos a solução particular

$$y = 1 + e^{-x}$$

Fazendo $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$ obtemos a solução particular

$$y = e^{-x}$$

Qualquer destas funções verifica, obviamente, a ODE $y'' + y' = 0$.

1.8. Solução Singular

Designa-se por solução singular de uma ED toda a solução da ED (ou seja, toda a função que verifica identicamente a equação diferencial) que não pode ser obtida da solução geral por particularização dos valores das constantes.

Geometricamente, a solução singular, se existir, representa a **envolvente** da família de curvas integrais correspondentes à solução geral.

Exemplos

29. A equação diferencial

$$y(y')^2 - 2xy' + y = 0$$

é uma EDO de 1ª ordem e 2º grau que tem como solução geral (em \mathbb{R})

$$y = \pm 2C \sqrt{\frac{x}{C}} - 1$$

Na figura M2.1 estão representadas algumas das parábolas que constituem as curvas integrais desta equação. A cheio, está representada uma solução particular: a que se obtém fazendo $C = 4$, correspondendo à parábola que passa no ponto $(4, 0)$.

As funções $y = \pm x$ também verificam a equação identicamente, constituindo portanto uma solução da ED. No entanto, não pode ser obtida a partir da solução geral por particularização do valor da constante. Trata-se pois de uma solução singular. Como se observa na figura, as rectas $y = \pm x$ correspondem à envolvente da família de parábolas correspondentes à solução geral.

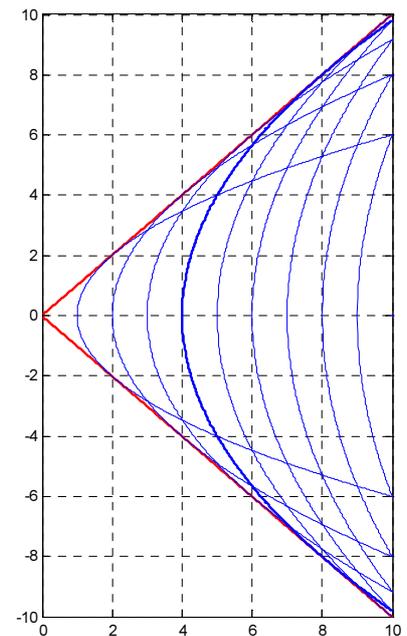


Figura M2.1

1.9. Condições iniciais

Quando, para a particularização das constantes da solução geral com o objectivo de obter uma solução particular, são dadas, para uma EDO de ordem n , condições para os valores da função e das $n - 1$ primeiras derivadas **para o mesmo valor** da variável independente, designam-se estas condições por condições iniciais, e o problema da determinação da solução particular por **problema de valores iniciais**.

Exemplos

30. A equação $y'' + y = 0$ tem como solução geral $y = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \operatorname{cos}(x)$. Se estabelecermos as condições

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

com o objectivo de determinar uma solução particular, estamos perante um problema de valores iniciais, uma vez que as condições estão estabelecidas para o mesmo valor da variável independente ($x = 0$).

Sendo $y = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \operatorname{cos}(x)$, resulta $y' = C_1 \operatorname{cos}(x) - C_2 \operatorname{sen}(x)$, logo, de

$$\begin{cases} y(0) = C_1 \operatorname{sen}(0) + C_2 \operatorname{cos}(0) = C_2 = 1 \\ y'(0) = C_1 \operatorname{cos}(0) - C_2 \operatorname{sen}(0) = C_1 = 0 \end{cases}$$

resulta a solução particular $y = \operatorname{cos}(x)$.

1.10. Condições fronteira

Quando, para a particularização das constantes da solução geral com o objectivo de obter uma solução particular, são dadas, para uma EDO de ordem n , condições **para valores diferentes** da variável independente, designam-se estas condições por condições fronteira e o problema da determinação da solução particular por **problema de valores fronteira**.

Exemplos

31. A equação $y'' + y = 0$ tem como solução geral $y = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \operatorname{cos}(x)$. Se estabelecermos as condições

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$$

com o objectivo de determinar uma solução particular, estamos perante um problema de valores fronteira, uma vez que as condições estão estabelecidas para diferentes valores da variável independente ($x = 0$ e $x = \pi$).

Sendo $y = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \operatorname{cos}(x)$, resulta $y' = C_1 \operatorname{cos}(x) - C_2 \operatorname{sen}(x)$, logo, de

$$\begin{cases} y(0) = C_1 \operatorname{sen}(0) + C_2 \operatorname{cos}(0) = C_2 = 0 \\ y'(\pi) = C_1 \operatorname{cos}(\pi) - C_2 \operatorname{sen}(\pi) = -C_1 = 1 \end{cases}$$

resulta a solução particular $y = -\operatorname{sen}(x)$.



Exercícios.

Classificação de equações diferenciais.

1. Classifique as seguintes equações diferenciais.

a. $(y''')^3 - 3xy(y')^4 + 5e^x y = 0$

- Equação diferencial ordinária de 3ª ordem e 3º grau.

b. $x(y'')^4 + \cos(xy') = 2x + 5$

- Equação diferencial ordinária de 2ª ordem e 4º grau.

c. $\cos(2x) \frac{d^3 y}{dx^3} + (x+2) \frac{dy}{dx} - 7xy = x^7$

- Equação diferencial ordinária de 3ª ordem e 1º grau.

d. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 7xe^y \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

- Equação diferencial às derivadas parciais de 2ª ordem e 1º grau.

Solução geral, particular e singular.

2. Mostre que $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$ é solução geral da equação diferencial $y'' + 4y = 0$.

- Sendo $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$, temos

$$y' = -2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x)$$

e

$$y'' = -4C_1 \cos(2x) - 4C_2 \sin(2x)$$

Substituindo na equação diferencial, resulta

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= 0 \\ -4C_1 \cos(2x) - 4C_2 \sin(2x) + 4(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

A função verifica identicamente a equação diferencial, logo é uma solução geral.

3. Mostre que $y = Cx + 2C^2$, $y = x + 2$, e $y = -\frac{1}{8}x^2$ são soluções da equação diferencial $2(y')^2 + xy' - y = 0$. Diga para cada uma das soluções se é geral, particular ou singular. Represente as curvas integrais.

- Sendo $y = Cx + 2C^2$, temos

$$y' = C$$

Substituindo na equação diferencial, resulta

$$\begin{aligned}2(y')^2 + xy' - y &= 0 \\2C^2 + Cx - (Cx + 2C^2) &= 0 \\0 &= 0\end{aligned}$$

$y = Cx + 2C^2$ é uma solução geral da equação diferencial.

Sendo $y = x + 2$, temos

$$y' = 1$$

Substituindo na equação diferencial, resulta

$$\begin{aligned}2(y')^2 + xy' - y &= 0 \\2 + x - (x + 2) &= 0 \\0 &= 0\end{aligned}$$

$y = x + 2$ é uma solução particular da equação diferencial ($C = 1$).

Sendo $y = -\frac{1}{8}x^2$ temos

$$y' = -\frac{1}{4}x$$

Substituindo na equação diferencial, resulta

$$\begin{aligned}2(y')^2 + xy' - y &= 0 \\2\left(-\frac{1}{4}x\right)^2 + x\left(-\frac{1}{4}x\right) + \frac{1}{8}x^2 &= 0 \\+\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^2 &= 0 \\0 &= 0\end{aligned}$$

$y = -1/8x^2$ é uma solução singular dado que verifica identicamente a equação diferencial mas não pode ser obtida da solução geral por particularização do valor da constante. Na figura M2.2 estão representadas algumas das rectas que constituem as curvas integrais desta equação. Como se observa, a parábola $y = -1/8x^2$ corresponde à envolvente da família de rectas correspondentes à solução geral.

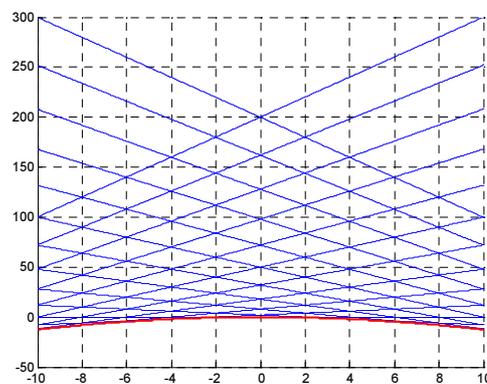


Figura M2.2

Curvas integrais.

4. Determine a equação diferencial associada à família de curvas $y^2 - 2y = Cx$.

- Dada uma família de curvas é sempre possível determinar a equação diferencial que lhe está associada. Para isso deve-se:
 - derivar a função que representa a família de curvas até à ordem da equação diferencial procurada, que é igual ao número de constantes arbitrárias que aparecem na equação da família de curvas;

- eliminar as constantes arbitrárias entre a equação da família de curvas dada e as equações obtidas por derivação.

Assim, dada a família de curvas $y^2 - 2y = Cx$, sabemos que a equação diferencial procurada é de 1ª ordem, uma vez que só existe uma constante. Portanto é apenas necessário derivar uma vez

$$2yy' - 2y' = C$$

Eliminando agora a constante da duas equações

$$\begin{cases} y^2 - 2y = Cx \\ 2yy' - 2y' = C \end{cases}$$

temos de imediato a equação diferencial procurada

$$\begin{aligned} y^2 - 2y &= Cx \\ y^2 - 2y &= (2yy' - 2y')x \\ 2y'(y - 1)x - y^2 + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Condições iniciais e fronteira.

5. Sabendo que a equação diferencial $y'' - 4y' + 4y = 0$ admite a solução geral $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$, determine a solução particular que verifica as condições $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

- Estamos perante um problema de valores iniciais, uma vez que as condições estão estabelecidas para o mesmo valor da variável independente ($x = 0$). Sendo

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$$

resulta

$$\begin{aligned} y' &= C_2 e^{2x} + 2(C_1 + C_2 x)e^{2x} \\ &= (2C_1 + C_2 + 2C_2 x)e^{2x} \end{aligned}$$

, logo, de

$$\begin{cases} y(0) = (C_1 + C_2 \times 0)e^{2 \times 0} = C_1 = 0 \\ y'(0) = (2C_1 + C_2 + 2C_2 \times 0)e^{2 \times 0} = 2C_1 + C_2 = C_2 = 1 \end{cases}$$

resulta a solução particular

$$\begin{aligned} y &= (C_1 + C_2 x)e^{2x} \\ &= (0 + 1 \times x)e^{2x} \\ &= x e^{2x} \end{aligned}$$

6. Sabendo que a equação diferencial $y'' + 4y' = 0$ admite a solução geral $y = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)$, determine a solução particular que verifica as condições $y(\pi/8) = 0$ e $y(\pi/6) = 1$.

- Estamos perante um problema de valores fronteira, uma vez que as condições estão estabelecidas para diferentes valores da variável independente ($x = \pi/8$ e $x = \pi/6$). Sendo

$$y = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)$$

resulta

$$\begin{aligned}y(\pi/8) &= C_1 \operatorname{sen}(\pi/4) + C_2 \operatorname{cos}(\pi/4) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} C_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} C_2 = 0 \quad \Rightarrow C_1 = -C_2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}y(\pi/6) &= C_1 \operatorname{sen}(\pi/3) + C_2 \operatorname{cos}(\pi/3) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} C_1 + \frac{1}{2} C_2 = 1\end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} C_1 + \frac{1}{2} C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = -C_2$$

de onde resulta a solução particular

$$\begin{aligned}y &= C_1 \operatorname{sen}(2x) + C_2 \operatorname{cos}(2x) \\ &= C_1 \operatorname{sen}(2x) - C_1 \operatorname{cos}(2x) \\ &= C_1 (\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{cos}(2x)) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}-1} (\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{cos}(2x))\end{aligned}$$