

- Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

- Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

Módulo 4

TÓPICOS

EDO de 1ª ordem: forma geral, normal, e diferencial.

EDO de variáveis separadas.

EDO de variáveis separáveis.

EDO homogénea

EDO exacta. EDO's redutíveis a exactas.

EDO linear. EDO's redutíveis a lineares.



2. Equações Diferenciais de 1ª Ordem.

2.1. Forma Geral, Normal e Diferencial

Uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem é da **forma geral** $F(x, y, y') = 0$. Nos casos em que a equação se puder explicitar em ordem a y' pode ser escrita na **forma normal** $y' = f(x, y)$ ou ainda na **forma diferencial** $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Exemplos

1. A EDO de 1ª ordem $x^2y + xy' = e^x$ pode ser escrita na forma geral:

$$x^2y + xy' - e^x = 0$$

; na forma normal

$$\begin{aligned} x^2y + xy' &= e^x \\ xy' &= e^x - x^2y \\ y' &= \frac{e^x - x^2y}{x} \end{aligned}$$

; e na forma diferencial

$$\begin{aligned} y' &= \frac{e^x - x^2y}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{e^x - x^2y}{x} \\ x dy &= (e^x - x^2y) dx \\ (x^2y - e^x) dx + x dy &= 0 \end{aligned}$$

2.2. EDO de variáveis separadas

Uma EDO diz-se de variáveis separadas se for da forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

A solução geral resulta imediatamente por integração directa

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

Exemplos

1. Dada a EDO de 1ª ordem de variáveis separadas

$$2x dx + \frac{y}{1+y^2} dy = 0$$

a solução é imediata:

$$\int 2x dx + \int \frac{y}{1+y^2} dy = C$$

$$x^2 + \frac{1}{2} \ln|1+y^2| = C$$

$$x^2 + \frac{1}{2} \ln(1+y^2) = C$$

2.3. EDO de variáveis separáveis

Uma EDO diz-se de variáveis separáveis se for da forma

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$$

A solução geral resulta imediatamente por integração directa

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = C$$

Exemplos

2. Dada a EDO de 1ª ordem

$$(xy^2 + x)dx + (yx^2 + y)dy = 0$$

temos

$$x(y^2 + 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$$

$$\frac{x}{(x^2 + 1)} dx + \frac{y}{(y^2 + 1)} dy = 0$$

$$\int \frac{x}{(x^2 + 1)} dx + \int \frac{y}{(y^2 + 1)} dy = C_1$$

$$\frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \frac{1}{2} \ln|y^2 + 1| = C_1$$

$$\ln|x^2 + 1| + \ln|y^2 + 1| = C_2$$

$$\ln(x^2 + 1) + \ln(y^2 + 1) = C_2$$

$$\ln((x^2 + 1)(y^2 + 1)) = \ln(C)$$

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = C$$

3. Dada a EDO de 1ª ordem

$$y' = x^2(1+y)^3$$

temos

$$\frac{dy}{dx} = x^2(1+y)^3$$

$$\frac{1}{(1+y)^3} dy = x^2 dx$$

$$\int \frac{1}{(1+y)^3} dy - \int x^2 dx = C_1$$

$$-\frac{1}{2}(1+y)^{-2} - \frac{x^3}{3} = C_1$$

$$3(1+y)^{-2} + 2x^3 = C$$

2.4. Funções homogêneas (Revisões).

Uma função $f(x, y)$ diz-se homogênea de grau n nas variáveis x e y se, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, for $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

Exemplos

4. Dada $f(x, y) = x^4 - x^3y$, temos:

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^4 - (\lambda x)^3 \lambda y \\ &= \lambda^4 (x^4 - x^3y) \\ &= \lambda^4 f(x, y) \end{aligned}$$

, logo $f(x, y)$ é uma função homogênea do 4º grau.

5. Dada $f(x, y) = e^x + \sec \frac{y}{x}$, temos:

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= e^{\lambda x} + \sec \frac{\lambda y}{\lambda x} \\ &= e^{\lambda x} + \sec \frac{y}{x} \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$

, logo $f(x, y)$ é uma função homogênea de grau 0.

6. Dada $f(x, y) = \frac{4xy + y^2}{x^2 + x}$, temos:

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{4\lambda x \lambda y + (\lambda y)^2}{(\lambda x)^2 + \lambda x} \\ &= \frac{\lambda^2 (4xy + y^2)}{\lambda (\lambda x^2 + x)} \end{aligned}$$

, logo $f(x, y)$ não é uma função homogênea.

2.5. EDO homogénea.

Uma EDO de 1ª ordem $y' = f(x, y)$ diz-se uma equação homogénea se a função $f(x, y)$ for homogénea de grau 0. O mesmo é dizer: uma EDO de 1ª ordem na forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ diz-se homogénea se $M(x, y)$ e $N(x, y)$ forem funções homogéneas do mesmo grau de homogeneidade.

Para determinar a solução geral de uma EDO homogénea procedemos à mudança de variável $y = xu$, e, portanto, $dy = xdu + udx$, que transforma a equação original numa EDO de variáveis separáveis em x e u .

Exemplos

7. Dada a EDO de 1ª ordem $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ temos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2 + y^2}{xy} \\ \frac{xdu + udx}{dx} &= \frac{x^2 + (xu)^2}{x^2u} \\ x^3udu + x^2u^2dx &= x^2dx + x^2u^2dx \\ x^3udu &= x^2dx \\ udu &= \frac{1}{x}dx \\ udu - \frac{1}{x}dx &= 0 \\ \int udu - \int \frac{1}{x}dx &= C \\ \frac{1}{2}u^2 - \ln|x| &= C \\ \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \ln|x| &= C\end{aligned}$$

8. Dada a EDO de 1ª ordem $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{sen} \frac{y}{x}$ temos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} + \operatorname{sen} \frac{y}{x} \\ \frac{xdu + udx}{dx} &= \frac{xu}{x} + \operatorname{sen} \frac{xu}{x} \\ x \frac{du}{dx} + u &= u + \operatorname{sen}(u) \\ \frac{1}{\operatorname{sen}(u)} du &= \frac{1}{x} dx \\ \int \frac{1}{\operatorname{sen}(u)} du - \int \frac{1}{x} dx &= C\end{aligned}$$

Calculando os integrais e procedendo à substituição $u = y/x$ chegamos finalmente à solução geral

$$\tan\left(\frac{y}{2x}\right) = Cx$$

2.6. Derivação parcial de 1ª ordem (Revisões).

Seja uma função de duas variáveis $f(x,y)$ e um ponto (a,b) do seu domínio. Fazendo $y = b$ em $f(x,y)$ definimos uma função de uma variável $f(x,b)$. Se $f(x,b)$ for diferenciável em $x = a$ define-se a derivada parcial de $f(x,y)$ em ordem a x no ponto (a,b) como

$$\frac{\partial f}{\partial x}_{(a,b)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

De modo similar se define a derivada parcial de $f(x,y)$ em ordem a y no ponto (a,b)

$$\frac{\partial f}{\partial y}_{(a,b)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

Ou seja, nos pontos em que $f(x,b)$ for diferenciável, podemos calcular $\partial f/\partial x$ derivando $f(x,y)$ como se x fosse a variável e y constante usando as regras de derivação conhecidas em \mathbb{R} , e de modo análogo para $\partial f/\partial y$ derivando $f(x,y)$ como se y fosse a variável e x constante.

Exemplos

9. Sendo $f(x,y) = x^2y^3$ temos as derivas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$$

Note-se que

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= 2x \frac{dx}{dx} y^3 + x^2 3y^2 \frac{dy}{dx} \\ &= 2xy^3 + 3x^2y^2 \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

e ainda, multiplicando ambos os membros por dx ,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

esta relação, embora deduzida a partir deste exemplo particular, é generalizável a qualquer função $f(x,y)$ e designa-se por **diferencial da função**.

10. O diferencial da função $f(x,y) = x^2 \ln(y^2)$ é

$$df = 2x \ln(y^2) dx + \frac{2x^2}{y} dy$$

, dado que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \ln(y^2)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \frac{2y}{y^2}$.

2.7. EDO exacta.

Uma EDO de 1ª ordem $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ diz-se uma equação diferencial exacta se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Para determinar a solução geral, $f(x, y, C) = 0$, de uma EDO exacta resolvemos, em ordem a f , o sistema de equações

$$\begin{cases} f = \int M(x, y) dx + h(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}$$

Exemplos

11. A EDO de 1ª ordem $(y^3 + 2xy)dx + (x^2 + 3xy^2)dy = 0$ é uma equação diferencial exacta, dado que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 + 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Logo, a solução geral é determinável resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} f = \int M(x, y) dx + h(y) = \int (y^3 + 2xy) dx + h(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = x^2 + 3xy^2 \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} f &= \int (y^3 + 2xy) dx + h(y) \\ &= xy^3 + yx^2 + h(y) \end{aligned}$$

pelo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + x^2 + \frac{dh(y)}{dy}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + 3xy^2 \\ 3xy^2 + x^2 + \frac{dh(y)}{dy} &= x^2 + 3xy^2 \end{aligned}$$

implica que

$$\frac{dh(y)}{dy} = 0 \Rightarrow h(y) = C$$

pelo que

$$f = xy^3 + yx^2 + C$$

logo, a solução geral procurada é

$$xy^3 + yx^2 + C = 0$$

2.8. EDO's redutíveis a exactas.

Uma EDO de 1ª ordem $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diz-se uma equação *redutível a diferencial exacta*, se existir uma função $\mu(x,y)$ tal que

$$\mu(x,y)(M(x,y)dx + N(x,y)dy) = 0$$

seja uma equação diferencial exacta. A função $\mu(x,y)$ diz-se um **factor integrante**.

Não existe uma regra geral para determinar o factor integrante. Para determinados tipos de equações existem factores integrantes conhecidos, que constam de tabelas. Vamos ver dois exemplos:

1. Se $\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = g(x)$ o factor integrante é $\mu(x,y) = e^{\int g(x)dx}$
2. Se $\frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = h(y)$ o factor integrante é $\mu(x,y) = e^{-\int h(y)dy}$

Para determinar a solução geral, dado que a equação foi reduzida a uma EDO diferencial exacta, recorre-se ao método visto no ponto anterior

$$\begin{cases} f = \int \mu(x,y)M(x,y)dx + h(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \mu(x,y)N(x,y) \end{cases}$$

Exemplos

12. A EDO de 1ª ordem $(x^2 + y^2 + x)dx + xy dy = 0$ não é uma equação diferencial exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = y$$

No entanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) &= \frac{1}{xy} (2y - y) \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

é função apenas de x , $g(x) = \frac{1}{x}$, pelo que a função

$$\mu(x,y) = e^{\int g(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln(x)} = x$$

é um factor integrante. Na verdade

$$\begin{aligned} \mu(x,y)(M(x,y)dx + N(x,y)dy) &= 0 \\ x((x^2 + y^2 + x)dx + xy dy) &= 0 \\ (x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2y dy &= 0 \end{aligned}$$

é uma EDO diferencial exacta

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

Podemos agora determinar a solução geral a partir do sistema de equações

$$\begin{cases} f = \int \mu(x,y)M(x,y)dx + h(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \mu(x,y)N(x,y) \end{cases}$$

Assim

$$f = \int (x^3 + xy^2 + x^2)dx + h(y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}y^2 + \frac{x^3}{3} + h(y)$$

pelo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \frac{x^2}{2} + \frac{dh(y)}{dy} = x^2y + \frac{dh(y)}{dy}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \mu(x,y)N(x,y) = x^2y \\ x^2y + \frac{dh(y)}{dy} &= x^2y \end{aligned}$$

implica que

$$\frac{dh(y)}{dy} = 0 \Rightarrow h(y) = C$$

pelo que

$$f = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}y^2 + \frac{x^3}{3} + C$$

logo, a solução geral procurada é

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}y^2 + \frac{x^3}{3} + C = 0$$

13. A EDO de 1ª ordem $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$ não é uma equação diferencial exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$$

No entanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) &= \frac{1}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y} (8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 - (2xy^4e^y - 2xy^2 - 3)) \\ &= \frac{8xy^3e^y + 8xy^2 + 4}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y} = \frac{4}{y} \frac{2xy^3e^y + 2xy^2 + 1}{2xy^3e^y + 2xy^2 + 1} = \frac{4}{y} \end{aligned}$$

é função apenas de y , $h(y) = \frac{4}{y}$, pelo que a função

$$\mu(x,y) = e^{-\int h(y)dy} = e^{-\int \frac{4}{y}dy} = e^{-4\ln(y)} = \frac{1}{y^4}$$

é um factor integrante, pelo que a EDO é redutível a diferencial exacta e facilmente integrável.

2.9. EDO linear.

Uma EDO de 1ª ordem diz-se linear se for do 1º grau na função incógnita e na sua 1ª derivada, podendo representar-se por

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Se $Q(x) = 0$ a equação diz-se *linear homogénea* e se $Q(x) \neq 0$ diz-se *linear completa*. A solução geral é da forma $y = u(x)v(x)$, com

$$v(x) = e^{-\int P(x)dx}$$

$$u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C$$

Exemplos

14. A EDO de 1ª ordem $y' - \frac{2}{x+1}y = (1+x)^3$ é uma equação linear com

$$P(x) = -\frac{2}{x+1}$$

$$Q(x) = (1+x)^3$$

A solução geral é da forma $y = u(x)v(x)$, com

$$v(x) = e^{-\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x+1}dx} = e^{2\ln|x+1|} = e^{\ln(x+1)^2}$$

$$= (x+1)^2$$

e

$$u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C = \int \frac{(1+x)^3}{(x+1)^2} dx + C = \int (1+x) dx + C$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)^2 + C$$

, ou seja

$$y = \left(\frac{1}{2}(x+1)^2 + C \right) (x+1)^2$$

15. A EDO de 1ª ordem $y' + y = e^{-x}$ é uma equação linear com

$$P(x) = 1$$

$$Q(x) = e^{-x}$$

A solução geral é da forma $y = u(x)v(x)$, com

$$v(x) = e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int dx} = e^{-x}$$

$$u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}} dx + C = \int dx + C = x + C$$

, ou seja

$$y = (x + C)e^{-x}$$

2.10. EDO's redutíveis a lineares.

A maioria das equações diferenciais não lineares não tem soluções conhecidas. Vamos ver dois tipos de ED não lineares cuja solução geral é obtida por conversão em ED lineares

2.10.1. Equação de Bernoulli.

Uma EDO de 1ª ordem diz-se uma *equação de Bernoulli* se for da forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$$

, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ (para $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ a equação é linear).

A solução geral é determinada reduzindo a equação de Bernoulli a uma equação linear através dos seguintes passos

1. Dividir ambos os membros da ED por y^α .
2. Fazer a substituição de variável $y^{1-\alpha} = z$ (de onde $y^{-\alpha}y' = \frac{z'}{1-\alpha}$).
3. Resolver a ED linear em z .
4. Fazer a substituição de variável $z = y^{1-\alpha}$

Exemplos

16. A EDO de 1ª ordem $y' + xy = x^3y^3$ é uma equação de Bernoulli com $P(x) = xy$, $Q(x) = x^3$ e $y^\alpha = y^3$. Dividindo ambos os membros por y^3 resulta

$$y^{-3}y' + xy^{-2} = x^3$$

Fazendo a substituição de variável aconselhada

$$y^{1-\alpha} = y^{-2} = z$$

$$y^{-\alpha}y' = y^{-3}y' = \frac{z'}{1-\alpha} = \frac{z'}{1-3} = -\frac{z'}{2}.$$

, resulta a ED: $-\frac{z'}{2} + xz = x^3 \Leftrightarrow z' - 2xz = -2x^3$

que é uma equação linear em z , $z' + P(x)z = Q(x)$, com $P(x) = -2x$ e $Q(x) = -2x^3$, logo, a solução é do tipo $z = u(x)v(x)$ com

$$v(x) = e^{-\int P(x)dx} = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C = \int \frac{-2x^3}{e^{x^2}} dx + C = \int -2x^3 e^{-x^2} dx + C \\ &= \int x^2(-2x)e^{-x^2} dx + C = x^2 e^{-x^2} - \int 2xe^{-x^2} dx + C \\ &= x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C \end{aligned}$$

, pelo que $z = e^{x^2}(x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C) = x^2 + 1 + Ce^{x^2}$

Fazendo agora a substituição de variável $z = y^{1-\alpha} = y^{-2}$, temos finalmente

$$y^{-2} = x^2 + 1 + Ce^{x^2}$$

2.10.2. Equação de Riccati.

Uma EDO de 1ª ordem diz-se uma *equação de Riccati* se for da forma

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

A solução geral pode ser determinada se for conhecida uma solução particular, y_k , sendo dada por

$$y = y_k - \frac{\mu(x)}{C + \int R(x)\mu(x) dx}$$

com

$$\mu(x) = e^{\int (Q(x) + 2y_k R(x)) dx}$$

Exemplos

17. A EDO de 1ª ordem $xy' - y^2 + (2x + 1)y = x^2 + 2x$ é uma equação de Riccati

$$y' = (x + 2) - \left(2 + \frac{1}{x}\right)y + \frac{1}{x}y^2$$

com

$$P(x) = x + 2, \quad Q(x) = -\left(2 + \frac{1}{x}\right) \text{ e } R(x) = \frac{1}{x}$$

Conhecida a solução particular $y_k = x$, temos

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int (Q(x) + 2y_k R(x)) dx} \\ &= e^{\int \left(-\left(2 + \frac{1}{x}\right) + 2x \frac{1}{x}\right) dx} = e^{\int \left(-2 - \frac{1}{x} + 2\right) dx} \\ &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{e^{\int \frac{1}{x} dx}} = \frac{1}{e^{\ln|x|}} \\ &= \frac{1}{|x|} \end{aligned}$$

, pelo que

$$\begin{aligned} y &= y_k - \frac{\mu(x)}{C + \int R(x)\mu(x) dx} \\ &= x - \frac{\frac{1}{|x|}}{C + \int \frac{1}{x} \frac{1}{|x|} dx} \end{aligned}$$

De onde, atendendo às propriedades de $|x|$, e dado que C é uma constante arbitrária resulta finalmente a solução geral

$$y = x + \frac{1}{xC + 1}$$

2.11. Aplicações.

2.11.1. Trajectórias ortogonais.

Dada uma família de curvas, chamam-se *trajectórias ortogonais* às curvas que intersectam a família dada segundo um ângulo de 90° .

Para determinar a equação das trajectórias ortogonais à família $F(x, y, C) = 0$

1. Determina-se a ED associada à família de curvas
2. Substitui-se na ED y' por $-1/y'$, determinando assim a ED associada à família das trajectórias ortogonais, e procura-se a solução geral desta ED.

Exemplos

18. Dada a família de linhas

$$x = e^{Cy^2}$$

Podemos, por derivação

$$\begin{aligned} x &= e^{Cy^2} \\ \ln(x) &= Cy^2 \\ \frac{1}{x} &= 2Cyy' \end{aligned}$$

, e eliminação da constante, determinar a ED que lhe está associada

$$\begin{cases} \ln(x) = Cy^2 \\ \frac{1}{x} = 2Cyy' \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} = 2 \frac{\ln(x)}{y^2} yy' \Rightarrow y = 2x \ln(x) y'$$

Substituindo y' por $-1/y'$ determinamos a ED associada à família das trajectórias ortogonais

$$y = -2x \ln(x) \frac{1}{y'}$$

$$y'y + 2x \ln(x) = 0$$

, cuja solução geral

$$\begin{aligned} y'y + 2x \ln(x) &= 0 \\ \int y dy + 2 \int x \ln(x) dx &= C \\ \frac{y^2}{2} + x^2 \ln(x) - \frac{x^2}{2} &= C \\ \frac{y^2}{2} &= -x^2 \ln(x) + \frac{x^2}{2} + C \\ y &= \pm \sqrt{x^2(1 - 2 \ln(x)) + C} \end{aligned}$$

nos dá a família das trajectórias ortogonais à família de curvas $x = e^{Cy^2}$. A figura M3.1 ilustra o exemplo mostrando algumas das curvas da família (a azul) e as respectivas trajectórias ortogonais (a vermelho).

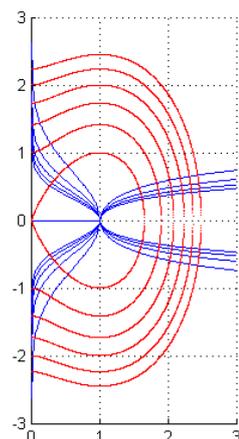


Figura M3.1