

- Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

- Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

# Módulo 5

---

## TÓPICOS

---

Exercícios sobre EDO de 1ª ordem.

---



---



---



---



---



---



## Exercícios.

---

### EDO de variáveis separadas e EDO de variáveis separáveis.

---

1. Deduza o método de resolução de uma EDO de variáveis separadas.

- De  $M(x)dx + N(y)dy = 0$

resulta

$$M(x)dx = -N(y)dy$$

$$M(x) \frac{dx}{dy} = -N(y)$$

$$\int M(x) \frac{dx}{dy} dy = -\int N(y) dy + C$$

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C$$

2. Determine a solução geral da EDO

$$x^2 y' = e^x + e^{\frac{1+xy}{x}}$$

- Trata-se de uma EDO de variáveis separáveis. Assim, temos:

$$x^2 \frac{dy}{dx} = e^x + e^{\frac{1}{x} + y} = e^x + e^{\frac{1}{x}} e^y$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} = e^x (1 + e^y)$$

$$\frac{1}{1 + e^y} dy = \frac{1}{x^2} e^x dx$$

$$\int \frac{1}{1+e^y} dy - \int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = C$$

$$\int \frac{e^{-y}}{e^{-y}+1} dy - \int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = C$$

$$-\ln(1+e^{-y}) + e^{\frac{1}{x}} = C$$

### EDO homogénea.

3. Determine a solução geral da EDO

$$y' = \frac{y-x}{y+x}$$

- Trata-se de uma EDO homogénea

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y - \lambda x}{\lambda y + \lambda x} = \frac{\lambda(y-x)}{\lambda(y+x)} = \frac{y-x}{y+x} = f(x, y)$$

Assim, procedendo à mudança de variável  $y = xu$ , e, portanto,  $dy = xdu + udx$ , temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$$

$$\frac{xdu + udx}{dx} = \frac{ux-x}{ux+x}$$

$$ux^2 du + x^2 du + u^2 x dx + u x dx = ux dx - x dx$$

$$(ux^2 + x^2) du + u^2 x dx = -x dx$$

$$(ux^2 + x^2) du = (-x - u^2 x) dx$$

$$x^2(u+1) du = -x(1+u^2) dx$$

$$\frac{1+u}{1+u^2} du = -\frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1+u}{1+u^2} du + \int \frac{1}{x} dx = C$$

$$\int \frac{u}{1+u^2} du + \int \frac{1}{1+u^2} du + \ln|x| = C$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+u^2) + \operatorname{atan}(u) + \ln|x| = C$$

Fazendo a mudança de variável  $u = y/x$ , resulta finalmente

$$\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + \ln|x| = C$$

$$\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + 2 \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + 2 \ln|x| = C$$

$$\ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) + 2 \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + \ln(x^2) = C$$

$$\ln(x^2 + y^2) + 2 \operatorname{atan}(y/x) = C$$

4. Determine a solução geral da EDO

$$x^2 y' - xy = y^2 e^{\frac{x}{y}}$$

- Trata-se de uma EDO homogénea

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda y)^2 e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}} + \lambda x \lambda y}{(\lambda x)^2} = \frac{y^2 e^{\frac{x}{y}} + xy}{x^2} = f(x, y)$$

Assim, procedendo à mudança de variável  $y = xu$ , e, portanto,  $dy = xdu + udx$ , temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 e^{\frac{x}{y}} + xy}{x^2}$$

$$\frac{xdu + udx}{dx} = \frac{x^2 u^2 e^{xu} + x^2 u}{x^2}$$

$$xdu + udx = u^2 e^{\frac{1}{u}} dx + udx$$

$$xdu = u^2 e^{\frac{1}{u}} dx$$

$$\frac{1}{u^2 e^{\frac{1}{u}}} du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{u^2} e^{-\frac{1}{u}} du - \int \frac{1}{x} dx = C$$

$$e^{-\frac{1}{u}} - \ln|x| = C$$

Fazendo a mudança de variável  $u = y/x$ , resulta finalmente

$$e^{-\frac{x}{y}} - \ln|x| = C$$

## EDO exacta.

5. Determine a solução geral da EDO

$$3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy = 0$$

- Trata-se de uma ED exacta, dado que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x^2 y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Logo, a solução geral é determinável resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} f = \int M(x, y) dx + h(y) = \int 3x^2 y^2 dx + h(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = 2x^3 y \end{cases}$$

Assim

$$f = \int 3x^2y^2 dx + h(y) = x^3y^2 + h(y)$$

pelo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + \frac{dh(y)}{dy}$$

Sendo

$$2x^3y + \frac{dh(y)}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = 2x^3y$$

resulta

$$\frac{dh(y)}{dy} = 0 \Rightarrow h(y) = C$$

pelo que

$$f = x^3y^2 + C$$

logo, a solução geral procurada é

$$x^3y^2 + C = 0$$

6. Determine a solução geral da EDO

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$$

- Trata-se de uma ED exacta, dado que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6xy^2}{y^6} = -\frac{6x}{y^4} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Logo, a solução geral é determinável resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} f = \int M(x, y) dx + h(y) = \int \frac{2x}{y^3} dx + h(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \end{cases}$$

Assim

$$f = \int \frac{2x}{y^3} dx + h(y) = \frac{2}{y^3} \int x dx + h(y) = \frac{x^2}{y^3} + h(y)$$

pelo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3x^2y^2}{y^6} + \frac{dh(y)}{dy}$$

Sendo

$$-\frac{3x^2y^2}{y^6} + \frac{dh(y)}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} = \frac{y^4 - 3x^2y^2}{y^6}$$

resulta

$$\frac{dh(y)}{dy} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow h(y) = -\frac{1}{y} + C$$

pelo que

$$f = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C$$

logo, a solução geral procurada é

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C = 0$$

## EDO's redutíveis a exactas.

7. Determine a solução geral da EDO

$$2xye^{\frac{x^2}{y}} = y'(x^2e^{\frac{x^2}{y}} - y)$$

- A equação diferencial não é exacta

$$2xye^{\frac{x^2}{y}} = \frac{dy}{dx}(x^2e^{\frac{x^2}{y}} - y)$$

$$2xye^{\frac{x^2}{y}} dx + (y - x^2e^{\frac{x^2}{y}}) dy = 0$$

logo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xe^{\frac{x^2}{y}} + 2xy\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)e^{\frac{x^2}{y}} \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -2xe^{\frac{x^2}{y}} - x^2\frac{2x}{y}e^{\frac{x^2}{y}}$$

No entanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) &= \frac{1}{M} \left( 2xe^{\frac{x^2}{y}} - 2\frac{x^3}{y}e^{\frac{x^2}{y}} + 2xe^{\frac{x^2}{y}} + 2\frac{x^3}{y}e^{\frac{x^2}{y}} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{x^2}{y^2}} 4xe^{\frac{x^2}{y}} \\ &= \frac{2}{y} \end{aligned}$$

é função apenas de  $y$ ,  $h(y) = 2/y$ , pelo que a função

$$\mu(x, y) = e^{-\int h(y)dy} = e^{-2\int \frac{1}{y}dy} = e^{-2\ln|y|} = \frac{1}{e^{\ln(y^2)}} = \frac{1}{y^2}$$

é um factor integrante. Podemos agora determinar a solução geral a partir do sistema de equações

$$\begin{cases} f = \int \mu(x, y)M(x, y) dx + h(y) = \int \frac{1}{y^2} 2xye^{\frac{x^2}{y}} dx + h(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \mu(x, y)N(x, y) = \frac{1}{y^2} (y - x^2e^{\frac{x^2}{y}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = \int \frac{2x}{y} e^{\frac{x^2}{y}} dx + h(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \mu(x, y)N(x, y) = \frac{1}{y^2} (y - x^2 e^{\frac{x^2}{y}}) \end{cases}$$

Assim

$$f = \int \frac{2x}{y} e^{\frac{x^2}{y}} dx + h(y) = e^{\frac{x^2}{y}} + h(y) + C$$

pelo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} e^{\frac{x^2}{y}} + \frac{dh(y)}{dy}$$

Sendo

$$-\frac{x^2}{y^2} e^{\frac{x^2}{y}} + \frac{dh(y)}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = \frac{1}{y^2} (y - x^2 e^{\frac{x^2}{y}})$$

resulta

$$\frac{dh(y)}{dy} = \frac{1}{y} \Rightarrow h(y) = \ln|y| + C$$

pelo que

$$f = e^{\frac{x^2}{y}} + \ln|y| + C$$

Logo, a solução geral procurada é

$$e^{\frac{x^2}{y}} + \ln|y| + C = 0$$

## EDO linear.

8. Determine a solução geral da EDO

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y - 1 = 0$$

- Trata-se de uma EDO linear,  $y' + P(x)y = Q(x)$ , com

$$P(x) = \frac{1-2x}{x^2}$$

$$Q(x) = 1$$

A solução geral é da forma  $y = u(x)v(x)$ , com

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{1-2x}{x^2} dx} = e^{\frac{1}{x} + 2\ln|x|} = e^{\frac{1}{x} + \ln(x^2)} = e^{\frac{1}{x}} e^{\ln(x^2)} \\ &= x^2 e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

e

$$u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C = \int \frac{1}{x^2 e^{\frac{1}{x}}} dx + C = \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx + C$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} + C$$

, ou seja

$$y = (e^{-\frac{1}{x}} + C) x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

$$= x^2 (1 + C e^{\frac{1}{x}})$$

## EDO's redutíveis a lineares.

---

9. Determine a solução geral da EDO

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{xy^3}$$

- Trata-se de uma equação de Bernoulli,  $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$ ,

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{xy^2}^{\frac{3}{2}}$$

com

$$P(x) = \frac{1}{x}$$

$$Q(x) = \sqrt{x}$$

$$y^\alpha = y^{3/2}$$

Dividindo ambos os membros por  $y^{3/2}$  resulta

$$\frac{1}{y^{3/2}} y' + \frac{1}{y^{3/2}} \frac{y}{x} = \sqrt{x}$$

Fazendo a substituição de variável aconselhada

$$y^{1-\alpha} = y^{1-3/2} = z$$

$$y^{-\alpha} y' = y^{-3/2} y' = \frac{z'}{1-\alpha} = \frac{z'}{1-3/2} = -2z'$$

, resulta a ED:  $-2z' + \frac{1}{x}z = \sqrt{x} \Leftrightarrow z' - \frac{1}{2x}z = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$

que é uma equação linear em  $z$ ,  $z' + P(x)z = Q(x)$ , com  $P(x) = -\frac{1}{2x}$  e

$Q(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ , logo, a solução é do tipo  $z = u(x)v(x)$  com

$$v(x) = e^{-\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{2x}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln(x)} = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C = \int -\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx + C = -\int \frac{1}{2} dx + C \\ &= -\frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

, pelo que

$$z = u(x)v(x) = \left(-\frac{x}{2} + C\right)\sqrt{x}$$

Fazendo agora a substituição de variável  $z = y^{1-\alpha} = y^{-1/2}$ , temos finalmente

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{y}} &= \left(-\frac{x}{2} + C\right)\sqrt{x} \\ y &= \frac{4}{x(C-x)^2} \end{aligned}$$

10. Determine a solução geral da equação

$$y' = \sec^2(x) - \tan(x)y + y^2$$

sabendo que  $y_k = \tan(x)$  é uma solução particular.

- Trata-se de uma equação de Riccati com

$$P(x) = \sec^2(x), \quad Q(x) = -\tan(x) \quad \text{e} \quad R(x) = 1$$

Conhecida a solução particular  $y_k = \tan(x)$ , temos

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int (Q(x) + 2y_k R(x)) dx} \\ &= e^{\int (-\tan(x) + 2 \tan(x)) dx} = e^{\int \tan(x) dx} = e^{\ln(\sec(x))} \\ &= \sec(x) \end{aligned}$$

, pelo que

$$\begin{aligned} y &= y_k - \frac{\mu(x)}{C + \int R(x)\mu(x) dx} \\ &= \tan(x) - \frac{\sec(x)}{C + \int \sec(x) dx} \\ &= \tan(x) - \frac{\sec(x)}{C + \ln(\sec(x) + \tan(x))} \end{aligned}$$

## Trajectórias ortogonais.

11. Determine as trajectórias ortogonais à família de linhas

$$x^2 + y^2 = Cx$$

- Dada a família de linhas

$$x^2 + y^2 = Cx$$

Podemos, por derivação

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= Cx \\ 2x + 2yy' &= C\end{aligned}$$

, e eliminação da constante, determinar a ED que lhe está associada

$$\begin{cases}x^2 + y^2 = Cx \\ 2x + 2yy' = C\end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = (2x + 2yy')x \Rightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Substituindo  $y'$  por  $-1/y'$  determinamos a ED associada à família das trajectórias ortogonais

$$\begin{aligned}-\frac{1}{y'} &= \frac{y^2 - x^2}{2xy} \\ y' &= \frac{2xy}{x^2 - y^2}\end{aligned}$$

, cuja solução geral, dado que se trata de uma ED homogénea

$$\begin{aligned}\frac{xdu + udx}{dx} &= \frac{2xux}{x^2 - u^2x^2} \\ x \frac{du}{dx} + u &= \frac{2u}{1 - u^2} \\ x \frac{du}{dx} &= \frac{2u}{1 - u^2} - u = \frac{2u - u + u^3}{1 - u^2} = \frac{u(1 + u^2)}{1 - u^2} \\ \frac{1 - u^2}{u(1 + u^2)} du &= \frac{1}{x} dx \\ \left( \frac{1}{u} - \frac{2u}{1 + u^2} \right) du &= \frac{1}{x} dx \\ \int \left( \frac{1}{u} - \frac{2u}{1 + u^2} \right) du &= \int \frac{1}{x} dx + C_1 \\ \ln(u) - \ln(1 + u^2) &= \ln(x) + \log(C_2) \\ \ln\left( \frac{u}{1 + u^2} \right) &= \ln(xC_2) \\ \frac{u}{1 + u^2} &= xC_2 \\ \frac{u}{xC_2} &= 1 + u^2 \\ \frac{y}{x^2C_2} &= 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} \\ \frac{y}{C_2} &= x^2 + y^2\end{aligned}$$

e, finalmente

$$x^2 + y^2 = Cy$$

A figura M4.1 ilustra o exemplo mostrando algumas das curvas da família (a azul) e as respectivas trajectórias ortogonais (a vermelho).

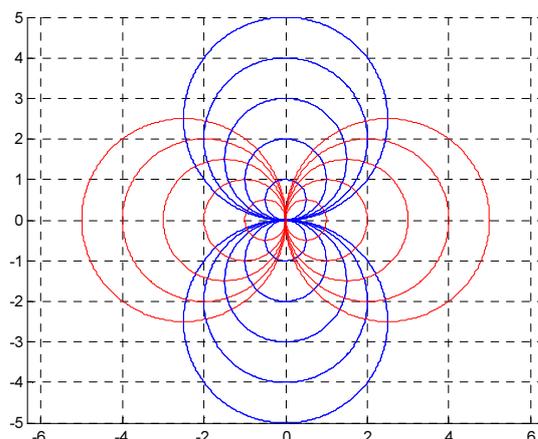


Figura M4.1



## Auto-Avaliação.

Linear: $y' + P(x)y = Q(x)$	V. Separáveis: $M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$
$y = u(x)v(x); v(x) = e^{-\int P(x)dx}; u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C$	$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C$
Redutível a Exacta	Homogénea
1. Se $\frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = g(x)$ f. int.: $\mu(x,y) = e^{\int g(x)dx}$	$y = xu; dy = xdu + udx \Rightarrow$ V. Separadas
2. Se $\frac{1}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = h(y)$ f. int.: $\mu(x,y) = e^{-\int h(y)dy}$	Exacta: $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$
$\Rightarrow \mu(x,y)(M(x,y)dx + N(x,y)dy) = 0$ é Exacta	$f = \int M(x,y)dx + h(y) \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$
Bernoulli: $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$	Riccati: $y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2; y_k$
Substituição: $y^{1-\alpha} = z; y^{-\alpha}y' = \frac{z'}{1-\alpha} \Rightarrow$ Linear em $z$	$\mu(x) = e^{\int (Q(x)+2y_k R(x))dx} \quad y = y_k - \frac{\mu(x)}{C + \int R(x)\mu(x)dx}$

### 1.

Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.

$$1. y' = \frac{x + xy^2}{ye^{x^2} + e^{x^2}}$$

$$2. y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2} e^{\frac{x}{y}}$$

$$3. y' - y \tan(x) = \sin(x)$$

$$4. 2xye^{x^2y^2}dx + (2x^2e^{x^2y^2} + 2)dy = 0$$

$$5. y' = \frac{x^2 - y \cos(x)}{y + \sin(x)}$$

$$6. y' + \frac{y}{x} = xy^2$$

### 2.

Das trajectórias ortogonais à família de linhas  $2y^2 = -x^2 + C^2$  determine a que passa no ponto  $(-1,1)$ .

## Soluções

$$1.1 \operatorname{atan}(y) + \frac{1}{2} \ln(1+y^2) + \frac{1}{2} e^{-x^2} = C; \quad 1.2 e^{-\frac{y}{x}} = \ln(x) + C; \quad 1.3 y = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2(x) + C}{\cos(x)};$$

$$1.4 e^{x^2y^2} + y^2 + C = 0; \quad 1.5 y \sin(x) - \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + C = 0; \quad 1.6 y = \frac{1}{x(C-x)}; \quad 2.1 y = x^2$$