

- Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

- Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

Módulo 6

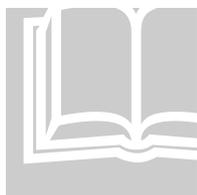
TÓPICOS

EDO's de ordem superior à 1ª.

EDO's do tipo $y^{(n)}=f(x)$.

EDO's redutíveis à 1ª ordem.

EDO's lineares de ordem n .



3. Equações Diferenciais de Ordem n .

3.1. EDO's do tipo $y^{(n)}=f(x)$

A solução geral de uma equação diferencial ordinária de ordem n da forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

obtém-se fazendo n integrações sucessivas, baixando-se em cada uma delas a ordem da ED numa unidade e introduzindo uma constante arbitrária.

Exemplos

1. A EDO de ordem n $y^{(4)} = 24x$ tem como solução geral

$$\begin{aligned} y^{(4)} &= 24x \\ y''' &= \int 24x dx + C_1 \\ &= 12x^2 + C_1 \\ y'' &= \int (12x^2 + C_1) dx + C_2 \\ &= 4x^3 + C_1x + C_2 \\ y' &= \int (4x^3 + C_1x + C_2) dx + C_3 \\ &= x^4 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 \\ y &= \int (x^4 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3) dx + C_4 \\ &= \frac{x^5}{5} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3x + C_4 \end{aligned}$$

3.2. EDO's redutíveis à 1ª ordem.

A. A solução geral de uma equação diferencial da forma

$$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$$

obtém-se fazendo a mudança de variável

$$y^{(n-1)} = p(x) ; y^{(n)} = \frac{dp}{dx}$$

B. A solução geral de uma equação diferencial da forma

$$y'' = f(y, y')$$

obtém-se fazendo a mudança de variável

$$y' = p(y) ; y'' = p \frac{dp}{dy}$$

Exemplos

2. A EDO de 2ª ordem $xy'' + y' = 0$ é da forma $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$

$$y'' = -\frac{y'}{x}$$

fazendo a mudança de variável

$$y^{(n-1)} = y' = p(x) ; y^{(n)} = y'' = \frac{dp}{dx}$$

resulta a solução geral

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{p}{x}$$

$$\frac{1}{p} dp = -\frac{1}{x} dx$$

$$\ln|p| + \ln|x| = \ln(C)$$

$$\ln|px| = \ln(C)$$

$$|px| = C \Leftrightarrow px = C_1$$

$$\frac{dy}{dx} x = C_1$$

$$dy = C_1 \frac{1}{x} dx$$

$$y = C_1 \ln|x| + C_2$$

3. A EDO de 3ª ordem $y''' = xy''$ é da forma $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$

$$y''' = \frac{y''}{x}$$

fazendo a mudança de variável

$$y^{(n-1)} = y'' = p(x) ; y^{(n)} = y''' = \frac{dp}{dx}$$

resulta a solução geral

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dx} &= \frac{p}{x} \\ \frac{1}{p} dp &= \frac{1}{x} dx \\ \ln|p| - \ln|x| &= \ln(C) \\ \ln\left|\frac{p}{x}\right| &= \ln(C) \\ \left|\frac{p}{x}\right| &= C \Leftrightarrow \frac{p}{x} = C_1 \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= C_1x \\ \frac{dy}{dx} &= C_2x^2 + C_3 \\ y &= C_4x^3 + C_5x + C_6\end{aligned}$$

4. A EDO de 2ª ordem $y'' = y' \frac{y' - 1}{y}$ é da forma $y'' = f(y, y')$. Fazendo a mudança de variável

$$y' = p(y) ; y'' = p \frac{dp}{dy}$$

resulta

$$\begin{aligned}p \frac{dp}{dy} &= p \frac{p-1}{y} \\ \frac{1}{p-1} dp &= \frac{1}{y} dy \\ \ln|p-1| &= \ln|y| + \ln(C) \\ \ln\left|\frac{p-1}{y}\right| &= \ln(C) \\ \frac{p-1}{y} &= C_1 \\ p &= 1 + C_1y\end{aligned}$$

Dado que $y' = p$, temos a solução geral

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 1 + C_1y \\ \frac{1}{1 + C_1y} dy &= dx \\ \frac{1}{C_1} \ln|1 + C_1y| &= x + C_2\end{aligned}$$

3.3. EDO's lineares de ordem n .

Uma equação diferencial ordinária de ordem n diz-se linear se é da forma

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

onde $a_0(x) \neq 0$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ e $f(x)$ são funções reais de variável real.

Uma EDO linear diz-se de **coeficientes constantes**, se os coeficientes $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ são funções constantes; caso contrário diz-se de **coeficientes variáveis**. Se $f(x) = 0$ a EDO diz-se **homogénea**; caso contrário diz-se **completa**.

Um conjunto, $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_{n-1}(x), y_n(x)\}$, de n soluções de uma EDO linear homogénea de ordem n é linearmente independente num intervalo I se o **determinante Wronski**,

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

, é não nulo $\forall x \in I$.

Solução da equação homogénea.

Uma EDO linear homogénea de ordem n tem sempre n soluções, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_{n-1}(x), y_n(x)$, linearmente independentes, sendo a solução geral, y_h , da forma

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_{n-1} y_{n-1} + C_n y_n$$

, onde $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n$ são constantes arbitrárias.

Solução da equação completa.

Uma EDO linear completa de ordem n tem uma solução geral da forma

$$y = y_h + y_p$$

, onde y_h é a solução geral da equação homogénea correspondente, e y_p é uma solução particular da equação completa.

Exemplos

5. A EDO linear de 2ª ordem

$$y'' + 9y = \cos(3x)$$

é uma equação completa a que corresponde a equação homogénea

$$y'' + 9y = 0$$

Podemos verificar que $y_1 = \cos(3x)$ e $y_2 = \sin(3x)$ são soluções particulares da equação homogénea

$$\begin{aligned} (\cos(3x))'' + 9 \cos(3x) &= 0 \\ -(3 \sin(3x))' + 9 \cos(3x) &= 0 \\ -9 \cos(3x) + 9 \cos(3x) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{sen}(3x))'' + 9 \operatorname{sen}(3x) &= 0 \\
 -(3 \cos(3x))' + 9 \operatorname{sen}(3x) &= 0 \\
 -9 \operatorname{sen}(3x) + 9 \operatorname{sen}(3x) &= 0 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

, sendo linearmente independentes em \mathbb{R} , dado que o Wronskiano

$$\begin{aligned}
 w &= \begin{vmatrix} \cos(3x) & \operatorname{sen}(3x) \\ -3 \operatorname{sen}(3x) & 3 \cos(3x) \end{vmatrix} \\
 &= +3 \cos(3x) \cos(3x) - (-3 \operatorname{sen}(3x) \operatorname{sen}(3x)) \\
 &= 3 \cos^2(3x) + 3 \operatorname{sen}^2(3x) \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

é não nulo $\forall x \in \mathbb{R}$. Assim sendo, a solução geral da equação homogénea é

$$y_h = C_1 \cos(3x) + C_2 \operatorname{sen}(3x)$$

Podemos verificar que

$$y_p = \frac{x}{6} \operatorname{sen}(3x)$$

é uma solução particular da equação completa

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x}{6} \operatorname{sen}(3x) \right)'' + 9 \frac{x}{6} \operatorname{sen}(3x) &= \cos(3x) \\
 \left(\frac{1}{6} \operatorname{sen}(3x) + 3 \frac{x}{6} \cos(3x) \right)' + 9 \frac{x}{6} \operatorname{sen}(3x) &= \cos(3x) \\
 \frac{1}{6} 3 \cos(3x) + \frac{1}{6} 3 \cos(3x) - 9 \frac{x}{6} \operatorname{sen}(3x) + 9 \frac{x}{6} \operatorname{sen}(3x) &= \cos(3x) \\
 \cos(3x) &= \cos(3x) \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

Pelo que a solução geral da EDO linear de 2ª ordem

$$y'' + 9y = \cos(3x)$$

é

$$\begin{aligned}
 y &= y_h + y_p \\
 &= C_1 \cos(3x) + C_2 \operatorname{sen}(3x) + \frac{x}{6} \operatorname{sen}(3x)
 \end{aligned}$$

3.3.1. EDO's lineares homogêneas de 2ª ordem com coeficientes constantes.

Uma EDO linear homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes é da forma

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0$$

onde a_1 e a_2 são reais. A sua solução geral é da forma

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2$$

, em que C_1 e C_2 são constantes arbitrárias e y_1 e y_2 são soluções particulares linearmente independentes.

Raízes da equação característica.

Sendo s_1 e s_2 raízes da equação característica $s^2 + a_1s + a_2 = 0$,

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

, temos 3 possíveis situações:

A. Se $a_1^2 - 4a_2 > 0$, s_1 e s_2 são raízes reais e distintas. A solução geral da ED é da forma

$$y_h = C_1 e^{s_1x} + C_2 e^{s_2x}$$

B. Se $a_1^2 - 4a_2 = 0$, $s_1 = s_2$ é uma raiz real dupla. A solução geral da ED é da forma

$$y_h = C_1 e^{s_1x} + C_2 x e^{s_2x}$$

C. Se $a_1^2 - 4a_2 < 0$, s_1 e s_2 são raízes complexas conjugadas $s_1, s_2 = \alpha \pm j\beta$. A solução geral da ED é da forma

$$y_h = (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x)) e^{\alpha x}$$

Exemplos

6. Admitindo que uma EDO linear homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0$$

tem soluções particulares da forma

$$y = e^{sx}$$

, resulta $y' = se^{sx}$ e $y'' = s^2e^{sx}$, pelo que

$$\begin{aligned} y'' + a_1y' + a_2y &= 0 \\ s^2e^{sx} + a_1se^{sx} + a_2e^{sx} &= 0 \\ (s^2 + a_1s + a_2)e^{sx} &= 0 \\ s^2 + a_1s + a_2 &= 0 \end{aligned}$$

Para que se verifique uma identidade, e portanto $y = e^{sx}$ seja uma solução particular da ED, s tem de assumir os valores das raízes, s_1 e s_2 da equação $s^2 + a_1s + a_2 = 0$.

7. A EDO linear homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

tem como soluções da equação característica,

$$\begin{aligned} s^2 - 4s + 3 &= 0 \\ s &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\ &= 2 \pm 1 \end{aligned}$$

, duas raízes reais distintas $s_1 = 3$ e $s_2 = 1$, pelo que a solução geral da ED é

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x} \\ &= C_1 e^{3x} + C_2 e^x \end{aligned}$$

8. A EDO linear homogénea de 2ª ordem com coeficientes constantes

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

tem como soluções da equação característica,

$$\begin{aligned} s^2 - 6s + 9 &= 0 \\ s &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

, uma raiz real dupla $s_1 = s_2 = 3$, pelo que a solução geral da ED é

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{s_1 x} + C_2 x e^{s_2 x} \\ &= C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} \end{aligned}$$

9. A EDO linear homogénea de 2ª ordem com coeficientes constantes

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

tem como soluções da equação característica,

$$\begin{aligned} s^2 - 4s + 13 &= 0 \\ s &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} \\ &= 2 \pm j3 \end{aligned}$$

, duas raízes complexas conjugadas com $\alpha = 2$ e $\beta = 3$, pelo que a solução geral da ED é

$$\begin{aligned} y_h &= (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x} \\ &= (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)) e^{2x} \end{aligned}$$

3.3.2. EDO's lineares homogêneas de ordem n com coeficientes constantes.

Uma EDO linear homogênea de ordem n com coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

tem n soluções, $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$, linearmente independentes, sendo a solução geral, y_h , da forma

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_{n-1} y_{n-1} + C_n y_n$$

, onde $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n$ são constantes arbitrárias, e sendo as n soluções determinadas a partir das raízes da equação característica

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

, sendo que:

A. Por cada raiz real simples, $s = s_1$, existe uma solução particular do tipo

$$y = e^{s_1 x}$$

B. Por cada raiz real múltipla, $s = s_1$, de grau k , existem k soluções particulares do tipo

$$y_1 = e^{s_1 x}; y_2 = x e^{s_1 x}; y_3 = x^2 e^{s_1 x}; \dots; y_k = x^{k-1} e^{s_1 x}$$

C. Por cada par de raízes complexas conjugadas, $s_1, s_2 = \alpha \pm j\beta$, existem duas soluções particulares do tipo

$$y_1 = \cos(\beta x) e^{\alpha x}; y_2 = \sin(\beta x) e^{\alpha x}$$

D. Por cada par de raízes complexas conjugadas, $s_1, s_2 = \alpha \pm j\beta$, de grau k , existem $2k$ soluções particulares do tipo

$$y_1 = \cos(\beta x) e^{\alpha x}; y_2 = x \cos(\beta x) e^{\alpha x}; y_3 = x^2 \cos(\beta x) e^{\alpha x}; \dots; y_k = x^{k-1} \cos(\beta x) e^{\alpha x}$$

$$y_{k+1} = \sin(\beta x) e^{\alpha x}; y_{k+2} = x \sin(\beta x) e^{\alpha x}; y_{k+3} = x^2 \sin(\beta x) e^{\alpha x}; \dots; y_{2k} = x^{k-1} \sin(\beta x) e^{\alpha x}$$

Exemplos

10. A EDO linear homogênea de 10ª ordem com coeficientes constantes

$$y^{(10)} - 15y^{(9)} + 108y^{(8)} - 494y^{(7)} + 1584y^{(6)} - 3700y^{(5)} + 6342y^{(4)} - 7826y''' + 6575y'' - 3325y' + 750y = 0$$

tem como raízes da equação característica,

$$s^{10} - 15s^9 + 108s^8 - 494s^7 + 1584s^6 - 3700s^5 + 6342s^4 - 7826s^3 + 6575s^2 - 3325s + 750 = 0$$

A. duas raízes reais simples, $s_1 = 2$ e $s_2 = 3$, a que correspondem as soluções particulares:

$$y_1 = e^{2x}; y_2 = e^{3x}$$

B. uma raiz real dupla, $k = 2$, $s_{3,4} = 1$ a que correspondem as soluções particulares

$$y_3 = e^x; y_4 = x e^x$$

C. um par de raízes complexas conjugadas, $s_1, s_2 = 2 \pm j$, a que correspondem as soluções particulares

$$y_5 = \cos(x)e^{2x}; y_6 = \sin(x)e^{2x}$$

D. um par de raízes complexas conjugadas duplas, $k = 2$, $s_1, s_2, s_3, s_4 = (1 \pm 2j)^2$, a que correspondem as $2k = 4$ soluções particulares

$$y_7 = \cos(2x)e^x; y_8 = x \cos(2x)e^x$$

$$y_9 = \sin(2x)e^x; y_{10} = x \sin(2x)e^x$$

Assim sendo, a solução geral da EDO linear homogénea de 10ª ordem com coeficientes constantes é

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^x + C_4 x e^x + C_5 \cos(x) e^{2x} + C_6 \sin(x) e^{2x} + \\ + C_7 \cos(2x) e^x + C_8 x \cos(2x) e^x + C_9 \sin(2x) e^x + C_{10} x \sin(2x) e^x$$

11. A EDO linear homogénea de 8ª ordem com coeficientes constantes

$$y^{(8)} - 2y^{(7)} + 4y^{(6)} - 6y^{(5)} + 6y^{(4)} - 6y''' + 4y'' - 2y' + y = 0$$

tem como raízes da equação característica

$$s^8 - 2s^7 + 4s^6 - 6s^5 + 6s^4 - 6s^3 + 4s^2 - 2s + 1 = 0$$

uma raiz real dupla, $k = 2$, $s_{1,2} = 1$ a que correspondem as soluções particulares

$$y_1 = e^x; y_2 = x e^x$$

e um par de raízes complexas conjugadas triplas, $k = 3$, $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 = (\pm j)^3$, a que correspondem as $2k = 6$ soluções particulares, com $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, temos então

$$y_3 = \cos(\beta x) e^{\alpha x} = \cos(x)$$

$$y_4 = x \cos(\beta x) e^{\alpha x} = x \cos(x)$$

$$y_5 = x^2 \cos(\beta x) e^{\alpha x} = x^2 \cos(x)$$

$$y_6 = \sin(\beta x) e^{\alpha x} = \sin(x)$$

$$y_7 = x \sin(\beta x) e^{\alpha x} = x \sin(x)$$

$$y_8 = x^2 \sin(\beta x) e^{\alpha x} = x^2 \sin(x)$$

Logo, a solução geral da EDO linear homogénea de 8ª ordem com coeficientes constantes é

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 \cos(x) + C_4 x \cos(x) + C_5 x^2 \cos(x) + \\ + C_6 \sin(x) + C_7 x \sin(x) + C_8 x^2 \sin(x)$$

3.3.3. EDO's lineares completas com coeficientes contantes.

Uma EDO linear completa de ordem n

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

tem uma solução geral da forma

$$y = y_h + y_p$$

, onde y_h é a solução geral da equação homogénea correspondente, determinada conforme visto nas secções anteriores, e y_p é uma solução particular da equação completa a determinar segundo o **método das constantes arbitrárias** ou o **método dos coeficientes indeterminados**.

Dada uma EDO linear completa de ordem n da forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) + g(x)$$

, e sendo y_{p1} uma solução particular de $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$ e y_{p2} uma solução particular de $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x)$ então $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ é uma solução particular da equação original (**princípio da sobreposição de soluções**).

Método das constantes arbitrárias.

É um método geral aplicável quer a ED's de coeficientes constantes quer a ED's de coeficientes variáveis. Conhecida a solução geral da equação homogénea

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_{n-1} y_{n-1} + C_n y_n$$

determina-se uma solução particular da equação completa da forma

$$y_p = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \dots + C_{n-1}(x) y_{n-1} + C_n(x) y_n$$

resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' = 0 \\ C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + \dots + C_n' y_n'' = 0 \\ \vdots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \dots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

de modo a determinar $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$, e obtendo $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ por primitivação.

Método dos coeficientes indeterminados.

O método dos coeficientes indeterminados, quando aplicável, é mais rápido que o método geral. É um método aplicável apenas a ED de coeficientes constantes em que o segundo membro seja da forma

$$f(x) = P(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

, em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios. Conhecida a solução geral da equação homogénea

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_{n-1} y_{n-1} + C_n y_n$$

determina-se uma solução particular da equação completa da forma:

1. Se $\alpha + j\beta$ não é raiz da equação característica

$$y_p = R(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + S(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

2. Se $\alpha + j\beta$ é raiz da equação característica, de grau de multiplicidade k

$$y_p = x^k \left(R(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + S(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x) \right)$$

Em qualquer dos casos $R(x)$ e $S(x)$ são polinómios, de coeficientes indeterminados, de grau igual ao maior dos graus de $P(x)$ e $Q(x)$. Encontrada y_p os coeficientes de $R(x)$ e $S(x)$ são determinados a partir da substituição de y_p na ED original.

Exemplos

12. A EDO linear completa de 2ª ordem e coeficientes constantes $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ tem como equação homogénea

$$y'' - 2y' + y = 0$$

cujas soluções da equação característica,

$$s^2 - 2s + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

, são uma raiz real dupla $s_1 = s_2 = 1$, pelo que a solução geral da equação homogénea é

$$\begin{aligned} y_h &= C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ &= C_1 e^{s_1 x} + C_2 x e^{s_2 x} \\ &= C_1 e^x + C_2 x e^x \end{aligned}$$

Assim sendo, podemos determinar uma solução particular da equação completa

$$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

, pelo método das constantes arbitrárias, resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0 \\ C_1' e^x + C_2' (e^x + x e^x) = \frac{e^x}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -C_2' x \\ C_1' + C_2' (1 + x) = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -C_2' x \\ -C_2' x + C_2' (1 + x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -C_2' x \\ C_2' = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -1 \\ C_2' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

pelo que

$$\begin{cases} C_1 = \int -1 dx = -x \\ C_2 = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \end{cases}$$

Fica assim determinada uma solução particular da equação completa

$$\begin{aligned} y_p &= C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \\ &= -x e^x + \ln|x| x e^x \end{aligned}$$

Pelo que a solução geral da equação completa é

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1 e^x + C_2 x e^x - x e^x + x \ln|x| e^x \\ &= (C_1 + C_2 x - x + x \ln|x|) e^x \end{aligned}$$

13. A EDO linear completa de 2ª ordem e coeficientes constantes $y'' - 5y' + 6y = 7xe^{2x}$ tem como equação homogénea

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

cujas soluções da equação característica,

$$\begin{aligned} s^2 - 5s + 6 &= 0 \\ s &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

, são duas raízes reais distintas $s_1 = 3$ e $s_2 = 2$, pelo que a solução geral da equação homogénea é

$$\begin{aligned} y_h &= C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ &= C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x} \\ &= C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} \end{aligned}$$

Dado que

$$f(x) = 7xe^{2x}$$

é da forma

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

, com $P(x) = 7x$, $\alpha = 2$, e $\beta = 0$, podemos recorrer ao *método dos coeficientes indeterminados* para determinar uma solução particular da equação completa.

Assim, sabemos que a solução é do tipo

$$\begin{aligned} y_p &= x^k (R(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + S(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)) \\ &= xR(x)e^{2x} \end{aligned}$$

em que $R(x)$ é um polinómio de coeficientes indeterminados de grau igual a $P(x)$, ou seja

$$\begin{aligned} y_p &= x(Ax + B)e^{2x} \\ &= (Ax^2 + Bx)e^{2x} \end{aligned}$$

Podemos agora determinar os coeficientes A e B a partir da substituição de y_p na equação diferencial. Sendo

$$\begin{aligned} y_p' &= (2Ax + B)e^{2x} + 2(Ax^2 + Bx)e^{2x} \\ &= (2Ax^2 + (2A + 2B)x + B)e^{2x} \\ y_p'' &= (4Ax + (2A + 2B))e^{2x} + 2(2Ax^2 + (2A + 2B)x + B)e^{2x} \\ &= (4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B)e^{2x} \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} y'' - 5y' + 6y &= 7xe^{2x} \\ 4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B - 5(2Ax^2 + (2A + 2B)x + B) + 6(Ax^2 + Bx) &= 7x \\ 2A - 2Ax - B &= 7x \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{cases} A = -7/2 \\ 2A - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -7/2 \\ B = -7 \end{cases}$$

logo $A = -3.5$ e $B = -7$, pelo que a solução particular procurada é

$$\begin{aligned} y_p &= (Ax^2 + Bx)e^{2x} \\ &= -3.5e^{2x}(x^2 + 2x) \end{aligned}$$

e a solução geral da equação completa é

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1e^{3x} + C_2e^{2x} - 3.5e^{2x}(x^2 + 2x) \\ &= C_1e^{3x} + (C_2 - 3.5x^2 - 7x)e^{2x} \end{aligned}$$

Se optássemos pelo método das constantes arbitrária teríamos

$$\begin{aligned} \begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'e^{3x} + C_2'e^{2x} = 0 \\ C_1'3e^{3x} + C_2'2e^{2x} = 7xe^{2x} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'e^{3x} = -C_2'e^{2x} \\ -3C_2'e^{2x} + C_2'2e^{2x} = 7xe^{2x} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -C_2'e^{-x} \\ -C_2' = 7x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = 7xe^{-x} \\ C_2' = -7x \end{cases} \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{cases} C_1 = 7 \int xe^{-x} dx = -7xe^{-x} - 7e^{-x} \\ C_2 = -7 \int x dx = -3.5x^2 \end{cases}$$

Fica assim determinada uma solução particular da equação completa

$$\begin{aligned}y_p &= C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \\&= (-7xe^{-x} - 7e^{-x})e^{3x} - 3.5x^2e^{2x} \\&= -7xe^{2x} - 7e^{2x} - 3.5x^2e^{2x} \\&= -3.5e^{2x}(x^2 + 2x + 2)\end{aligned}$$

e a solução geral da equação completa é

$$\begin{aligned}y &= y_h + y_p \\&= C_1e^{3x} + C_2e^{2x} - 3.5e^{2x}(x^2 + 2x + 2) \\&= C_1e^{3x} + (C_2 - 3.5x^2 - 7x - 7)e^{2x} \\&= C_1e^{3x} + (C_3 - 3.5x^2 - 7x)e^{2x}\end{aligned}$$

igual à encontrada anteriormente.