

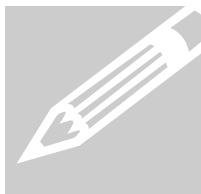
• Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

• Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

Módulo 7

TÓPICOS

Exercícios sobre EDO's de ordem n.



Exercícios.

EDO's do tipo $y^{(n)}=f(x)$

1. Determine a solução geral da EDO

$$y''' - x = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

- Trata-se de uma EDO da forma $y^{(n)} = f(x)$

$$y''' - x = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$y''' = x + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$y'' = \int x dx + \int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx + C_1$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + C_1$$

$$y' = \int \frac{x^2}{2} dx + \int 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int C_1 dx + C_2$$

$$= \frac{x^3}{6} - 4 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C_1 x + C_2$$

$$y = \int \frac{x^3}{6} dx - \int 4 \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int C_1 x dx + \int C_2 dx + C_3$$

$$= \frac{x^4}{24} - 8 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

EDO's redutíveis à 1ª ordem.

2. Determine a solução geral da EDO

$$xy'' - y'(\ln(y') - \ln(x)) = 0$$

- Trata-se de uma EDO da forma $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$

$$y'' = \frac{y'(\ln(y') - \ln(x))}{x}$$

Assim, procedendo à mudança de variável $y^{(n-1)} = p(x)$; $y^{(n)} = \frac{dp}{dx}$:

$$y' = p$$

$$y'' = p'$$

, temos

$$p' = \frac{p(\ln(p) - \ln(x))}{x}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} \ln\left(\frac{p}{x}\right)$$

Trata-se de uma EDO homogénea, pelo que, procedendo à mudança de variável $p = xu$, e, portanto, $dp = xdu + udx$, temos

$$p' = \frac{p(\ln(p) - \ln(x))}{x}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} \ln\left(\frac{p}{x}\right)$$

$$\frac{xdu + udx}{dx} = \frac{xu}{x} \ln\left(\frac{xu}{x}\right)$$

$$x \frac{du}{dx} + u = u \ln(u)$$

$$x \frac{du}{dx} = u \ln(u) - u$$

$$\frac{1}{u(\ln(u) - 1)} du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{\frac{1}{u}}{(\ln(u) - 1)} du = \int \frac{1}{x} dx + C_1$$

$$\ln|\ln(u) - 1| - \ln|x| = C_1$$

$$\ln\left|\frac{\ln(u) - 1}{x}\right| = \ln|C_2|$$

$$\frac{\ln(u) - 1}{x} = C_2$$

$$\ln(u) = xC_2 + 1$$

$$u = e^{xC_2 + 1}$$

$$\frac{p}{x} = e^{xC_2 + 1}$$

$$y' = xe^{xC_2 + 1}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \int x e^{x C_2 + 1} dx \\
 &= \frac{x C_2 - 1}{C_2^2} e^{x C_2 + 1} + C_3
 \end{aligned}$$

3. Determine a solução geral da EDO

$$y y'' = 2(y')^2 - 2y'$$

- Trata-se de uma EDO da forma $y'' = f(y, y')$

$$y'' = \frac{2(y')^2 - 2y'}{y}$$

Assim, procedendo à mudança de variável $y' = p(y)$; $y'' = p \frac{dp}{dy}$:

$$\begin{aligned}
 y' &= p \\
 y'' &= p p'
 \end{aligned}$$

, temos

$$\begin{aligned}
 p p' &= \frac{2p^2 - 2p}{y} \\
 p \frac{dp}{dy} &= \frac{2p^2 - 2p}{y} \\
 \frac{dp}{dy} &= (p - 1) \frac{2}{y} \\
 \frac{1}{p - 1} dp &= \frac{2}{y} dy \\
 \int \frac{1}{p - 1} dp &= \int \frac{2}{y} dy + C_1 \\
 \ln|p - 1| &= 2 \ln|y| + C_1 \\
 \ln \left| \frac{p - 1}{y^2} \right| &= \ln(C_2) \\
 p - 1 &= C_2 y^2 \\
 y' &= C_2 y^2 + 1 \\
 \frac{dy}{dx} &= C_2 y^2 + 1 \\
 \frac{1}{1 + C_2 y^2} dy &= dx \\
 \int \frac{1}{1 + C_2 y^2} dy &= \int dx + C_3 \\
 \frac{1}{\sqrt{C_2}} \arctan(y \sqrt{C_2}) &= x + C_3 \\
 y &= \frac{1}{\sqrt{C_2}} \tan(x \sqrt{C_2} + \sqrt{C_2} C_3) \\
 &= \frac{1}{C_1} \tan(C_1 C_2 + x C_1)
 \end{aligned}$$

EDO's lineares homogêneas de 2ª ordem com coeficientes constantes.

4. Determine a solução geral da EDO

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

- A EDO tem como soluções da equação característica,

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

, duas raízes reais distintas $s_1 = -2$ e $s_2 = -1$, pelo que a solução geral da ED é

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x} \\ &= C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} \end{aligned}$$

5. Determine a solução geral da EDO

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

- A EDO tem como soluções da equação característica,

$$s^2 - 4s + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

, uma raiz real dupla $s_1 = s_2 = 2$, pelo que a solução geral da ED é

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{s_1 x} + C_2 x e^{s_2 x} \\ &= C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} \end{aligned}$$

6. Determine a solução geral da EDO

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

- A EDO tem como soluções da equação característica,

$$s^2 + 2s + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \\ &= -1 \pm j\sqrt{2} \end{aligned}$$

, duas raízes complexas conjugadas com $\alpha = -1$ e $\beta = \sqrt{2}$, pelo que a solução geral da ED é

$$\begin{aligned} y_h &= (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x} \\ &= (C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)) e^{-x} \end{aligned}$$

EDO's lineares homogéneas de ordem n com coeficientes constantes.

7. Determine a solução geral da EDO

$$y^{(5)} - 4y''' = 0$$

- A EDO tem como soluções da equação característica,

$$s^5 - 4s^3 = 0$$

$$s^3(s^2 - 4) = 0 \Rightarrow s = 0 \vee s = \pm 2$$

uma raiz real tripla, $k = 3$, $s_{1,2,3} = 0$ a que correspondem as soluções particulares

$$y_1 = e^{0x} = 1 ; y_2 = x e^{0x} = x ; y_3 = x^2 e^{0x} = x^2$$

, e duas raízes reais simples, $s_4 = 2$ e $s_5 = -2$, a que correspondem as soluções particulares:

$$y_4 = e^{2x} ; y_5 = e^{-2x}$$

Assim sendo, a solução geral da EDO linear homogénea de 5ª ordem com coeficientes constantes é

$$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{2x} + C_5 e^{-2x}$$

8. Determine a solução geral da EDO

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

- A EDO tem como soluções da equação característica,

$$s^4 + 2s^2 + 1 = 0$$

$$(s^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow s = \pm j$$

um par de raízes complexas conjugadas duplas, $k = 2$, $s_1, s_2, s_3, s_4 = \pm j$, a que correspondem as $2k = 4$ soluções particulares. Com $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ temos

$$y_1 = \cos(1x) e^{0x} = \cos(x) ; y_2 = x \cos(1x) e^{0x} = x \cos(x)$$

$$y_3 = \sin(1x) e^{0x} = \sin(x) ; y_4 = x \sin(1x) e^{0x} = x \sin(x)$$

Assim sendo, a solução geral da EDO linear homogénea de 4ª ordem com coeficientes constantes é

$$y_h = C_1 \cos(x) + C_2 x \cos(x) + C_3 \sin(x) + C_4 x \sin(x)$$

EDO's lineares completas com coeficientes constantes.

9. Determine a solução geral da EDO

$$y'' + y' = x^2 e^x$$

- A EDO linear completa de 2ª ordem e coeficientes constantes tem como equação homogénea

$$y'' + y' = 0$$

cujas soluções da equação característica,

$$s^2 + s = 0$$

$$s(s + 1) = 0 \Rightarrow s = 0 \vee s = -1$$

, são duas raízes reais distintas $s_1 = 0$ e $s_2 = -1$, pelo que a solução geral da equação homogénea é

$$\begin{aligned} y_h &= C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ &= C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x} \\ &= C_1 + C_2 e^{-x} \end{aligned}$$

Dado que

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

é da forma

$$f(x) = P(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

, com $P(x) = x^2$, $\alpha = 1$, e $\beta = 0$, podemos recorrer ao *método dos coeficientes indeterminados* para determinar uma solução particular da equação completa.

Assim, sabemos que a solução é do tipo

$$\begin{aligned} y_p &= R(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + S(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ &= R(x) e^x \end{aligned}$$

em que $R(x)$ é um polinómio de coeficientes indeterminados de grau igual a $P(x)$, ou seja

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C) e^x$$

Podemos agora determinar os coeficientes A , B e C a partir da substituição de y_p na equação diferencial. Sendo

$$\begin{aligned} y_p' &= (2Ax + B) e^x + (Ax^2 + Bx + C) e^x \\ &= (Ax^2 + (2A + B)x + (B + C)) e^x \\ y_p'' &= (2Ax + B + 2A) e^x + (Ax^2 + (2A + B)x + (B + C)) e^x \\ &= (Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B + C)) e^x \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} y'' + y' &= x^2 e^x \\ 2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) &= x^2 \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 6A + 2B = 0 \\ 2A + 3B + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -3/2 \\ C = 7/4 \end{cases}$$

, assim a solução particular procurada é

$$\begin{aligned} y_p &= (Ax^2 + Bx + C)e^x \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)e^x \end{aligned}$$

, e a solução geral da equação completa é

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1 + C_2e^{-x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)e^x \end{aligned}$$

Se optássemos pelo *método das constantes arbitrária* teríamos

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \Rightarrow y_1' = 0 \\ y_2 &= e^{-x} \Rightarrow y_2' = -e^{-x} \\ f(x) &= x^2e^{-x} \\ \begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' + C_2'e^{-x} = 0 \\ 0 + C_2'(-e^{-x}) = x^2e^{-x} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -C_2'e^{-x} \\ -C_2'e^{-x} = x^2e^{-x} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = x^2e^{2x}e^{-x} \\ C_2' = -x^2e^{2x} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = x^2e^x \\ C_2' = -x^2e^{2x} \end{cases} \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{cases} C_1 = \int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x \\ C_2 = \int -x^2 e^{2x} dx = -\frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1)e^{2x} \end{cases}$$

Fica assim determinada uma solução particular da equação completa

$$\begin{aligned} y_p &= C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x - \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1)e^{2x}e^{-x} \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)e^x \end{aligned}$$

e a solução geral da equação completa é

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1 + C_2e^{-x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)e^x \end{aligned}$$

igual à encontrada anteriormente.

Note-se que a equação $y'' + y' = x^2 e^x$ é da forma $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$

$$y'' = x^2 e^x - y'$$

pelo que, para determinar a solução geral bastava fazer a mudança de variável

$$y^{(n-1)} = y' = p ; y^{(n)} = y'' = p'$$

de onde resulta

$$p' + p = x^2 e^x$$

Que é uma equação linear em p , com

$$P(x) = 1$$

$$Q(x) = x^2 e^x$$

Logo, fazendo $p = uv$, com

$$\begin{aligned} v &= e^{-\int P(x)dx} \\ &= e^{-\int dx} \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{Q(x)}{v} dx + C \\ &= \int \frac{x^2 e^x}{e^{-x}} dx + C \\ &= \int x^2 e^{2x} dx + C \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 \end{aligned}$$

, de onde

$$p = uv = \frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{1}{2} x e^x + \frac{1}{4} e^x + C_1 e^{-x}$$

, e, sendo, $y' = p$, ainda

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{1}{2} x e^x + \frac{1}{4} e^x + C_1 e^{-x} \\ y &= \int \left(\frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{1}{2} x e^x + \frac{1}{4} e^x + C_1 e^{-x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{3}{2} x e^x + \frac{7}{4} e^x - C_1 e^{-x} + C_2 \\ &= C_1 + C_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{7}{4} \right) e^x \end{aligned}$$

igual à encontrada anteriormente.

EDO's lineares completas com coeficientes variáveis.

10. Dada a EDO

$$y'' + \frac{1}{x} y' = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Mostre que a equação homogénea associada admite soluções da forma $y = (\ln(x))^n$, e determine a solução geral da equação completa.

- A EDO linear completa de 2ª ordem e coeficientes variáveis tem como equação homogénea

$$y'' + \frac{1}{x} y' = 0$$

Admitindo $y = (\ln(x))^n$, temos

$$y' = n(\ln(x))^{n-1} \frac{1}{x}$$

$$y'' = n(n-1)(\ln(x))^{n-2} \frac{1}{x} - n(\ln(x))^{n-1} \frac{1}{x^2}$$

, pelo que teríamos

$$y'' + \frac{1}{x} y' = 0$$

$$n(n-1)(\ln(x))^{n-2} \frac{1}{x} - n(\ln(x))^{n-1} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \left(n(\ln(x))^{n-1} \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$n(n-1)(\ln(x))^{n-2} \frac{1}{x} = 0$$

Para que se verifique uma identidade $\forall x \in R$ deverá ser

$$n(n-1) = 0 \Rightarrow n = 0 \vee n = 1$$

Concluimos então que

$$y_1 = (\ln(x))^0 = 1$$

e

$$y_2 = (\ln(x))^1 = \ln(x)$$

São duas soluções particulares da equação homogénea. Para determinar a solução geral é necessário verificar que se trata de soluções linearmente independentes. Temos

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \ln(x) \\ 0 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$$

Dado que $f(x) = \frac{1}{x} \neq 0 \forall x \in R$, as soluções são linearmente independentes, pelo que

$$\begin{aligned} y_h &= C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ &= C_1 + C_2 \ln(x) \end{aligned}$$

é a solução geral da equação homogénea.

Para determinar a solução geral da equação completa vamos recorrer ao *método das constantes arbitrária*. Temos

$$y_1 = 1 \Rightarrow y_1' = 0$$

$$y_2 = \ln(x) \Rightarrow y_2' = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' + C_2' \ln(x) = 0 \\ 0 + C_2' \frac{1}{x} = \frac{\ln(x)}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -C_2' \ln(x) \\ C_2' = \frac{\ln(x)}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -\frac{(\ln(x))^2}{x} \\ C_2' = \frac{\ln(x)}{x} \end{cases}$$

pelo que

$$\begin{cases} C_1 = \int -\frac{1}{x} (\ln(x))^2 dx = -\frac{(\ln(x))^3}{3} \\ C_2 = \int \frac{1}{x} \ln(x) dx = \frac{(\ln(x))^2}{2} \end{cases}$$

Fica assim determinada uma solução particular da equação completa

$$\begin{aligned} y_p &= C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \\ &= -\frac{(\ln(x))^3}{3} + \frac{(\ln(x))^2}{2} \ln(x) \\ &= \frac{1}{6} (\ln(x))^3 \end{aligned}$$

Logo, a solução geral da equação completa é

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1 + C_2 \ln(x) + \frac{1}{6} \ln^3(x) \end{aligned}$$



Auto-Avaliação.

$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$	$y'' = f(y, y')$
Substituição: $y^{(n-1)} = p$; $y^{(n)} = p'$	Substituição: $y' = p$; $y'' = pp'$
Wronskiano	$a_1^2 - 4a_2 > 0$
$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$	$y_h = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x}$
	$a_1^2 - 4a_2 = 0$
	$y_h = C_1 e^{s_1 x} + C_2 x e^{s_2 x}$
	$a_1^2 - 4a_2 < 0$
	$y_h = (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x}$
Constantes arbitrárias	Coefficientes indeterminados
$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \cdots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \cdots + C_n' y_n' = 0 \\ C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + \cdots + C_n' y_n'' = 0 \\ \vdots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$	Se $\alpha + j\beta$ não é raiz da equação característica
	$y_p = R(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + S(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
	Se $\alpha + j\beta$ é raiz da equação característica
	$y_p = x^k (R(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + S(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x))$

1.

Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.

1. $(y'' - 2y' + y)x^5 = e^x$

2. $y'' + 2y' + 10y = \sin(3x) + e^x$

3. $\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

4. $y^{(5)} - y''' = x$

5. $y''' + y' = x e^{-x} + e^x$

6. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \tan(x)$

2.

1. Determine a solução geral da equação $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3$, atendendo a que $y = x$ e $y = x e^x$ são soluções particulares da equação homogénea correspondente.

2. Determine a solução geral da equação $x^2 y'' - x y' + y = x$, atendendo a que a equação homogénea correspondente admite soluções da forma $y = x \ln^n(x)$.

Soluções

$$\mathbf{1.1} \quad (C_1 + C_2x + \frac{1}{12x^3})e^x ; \mathbf{1.2} \quad C_1e^{-x} \cos(3x) + C_2e^{-x} \sin(3x) + \frac{1}{13}e^x + \frac{1}{37}\sin(3x) - \frac{6}{37}\cos(3x) ;$$

$$\mathbf{1.3} \quad \pm \sqrt{-2x - 2C_1} + C_2 ; \mathbf{1.4} \quad C_1 + xC_2 + x^2C_3 + C_4e^{-x} + C_5e^x - \frac{1}{24}x^4 ;$$

$$\mathbf{1.5} \quad C_1 + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x) - \frac{1}{2}xe^{-x} - e^{-x} + \frac{1}{2}e^x ;$$

$$\mathbf{1.6} \quad C_1e^{-x} \cos(x) + C_2e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x) \ln\left(\frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)}\right);$$

$$\mathbf{2.1} \quad C_1x + C_2xe^x - x^2 ; \mathbf{2.2} \quad C_1x + C_2x \ln(x) + \frac{1}{2}x \ln^2(x)$$