

- Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

- Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

Módulo 9

TÓPICOS

Diferenciação complexa.

Derivadas complexas.

Funções analíticas.

Equações de Cauchy-Riemann.

Funções harmónicas.

Regra de L'Hospital.



3. Diferenciação complexa.

3.1. Derivadas complexas. Funções analíticas.

Sendo $f(z)$ uma função complexa de variável complexa definida numa região $D \subset \mathbb{C}$, define-se a **derivada** de $f(z)$ num ponto interior z dessa região como

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Caso o limite exista, e seja finito, a função diz-se *diferenciável* no ponto z . Se $f(z)$ é diferenciável num ponto z então é contínua nesse ponto.

Sendo $f(z)$ uma função complexa de variável complexa, se $f'(z)$ existe em todos os pontos z de uma região $D \subset \mathbb{C}$ então $f(z)$ diz-se uma **função analítica** (ou **holomorfa**, ou **regular**) em D . Diz-se que $f(z)$ é **analítica num ponto** z_0 se existir um $\delta > 0$ tal que $f'(z)$ exista $\forall z : |z - z_0| < \delta$, ou seja, para além de diferenciável em z_0 , $f(z)$ é também diferenciável em algum disco aberto, no plano complexo, centrado em z_0 .

Se $f(z)$ for analítica em \mathbb{C} então diz-se uma **função inteira**.

Exemplos

1. Sendo $f(z) = z^2$, com $z \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^2 + \Delta z^2 + 2z\Delta z - z^2}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\Delta z + 2z) \\
 &= 2z
 \end{aligned}$$

A derivada existe $\forall z \in \mathbb{C}$ pelo que $f(z) = z^2$ é uma função analítica em \mathbb{C} , ou seja, é uma função inteira.

2. Sendo $f(z) = z^*$, com $z \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^* - z^*}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{(x + jy + \Delta x + j\Delta y)^* - (x + jy)^*}{\Delta x + j\Delta y} \\
 &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{x - jy + \Delta x - j\Delta y - x + jy}{\Delta x + j\Delta y} \\
 &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x - j\Delta y}{\Delta x + j\Delta y}
 \end{aligned}$$

Fazendo, por exemplo, $\Delta x = m\Delta y$, temos

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{\substack{\Delta x = m\Delta y \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{m\Delta y - j\Delta y}{m\Delta y + j\Delta y} \\
 &= \frac{m - j}{m + j}
 \end{aligned}$$

O limite depende da direcção segundo a qual é calculado, e portanto não existe. A função $f(z) = z^*$ não é diferenciável em nenhum ponto do plano z , ou seja, $f(z) = z^*$ é uma função não analítica em \mathbb{C} .

3. Sendo $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$, com $z \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{z + \Delta z + 1}{z + \Delta z - 1} - \frac{z + 1}{z - 1}}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^2 + z\Delta z + z - z - \Delta z - 1 - z^2 - z\Delta z + z - z - \Delta z + 1}{(z + \Delta z - 1)(z - 1)\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-2}{(z + \Delta z - 1)(z - 1)} \\
 &= \frac{-2}{(z - 1)^2}
 \end{aligned}$$

A função $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

3.2. Equações de Cauchy-Riemann. Regras de derivação.

Seja $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ uma função complexa de variável complexa. É **condição necessária** para que f seja analítica numa região $D \subset \mathbb{C}$ que, em D , se verifiquem as **equações de Cauchy Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

, ou seja,

$$j \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

, ou ainda, na forma polar,

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

ou seja,

$$j \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

Se as derivadas parciais de f forem contínuas em D , então as condições de Cauchy-Riemann são também **condições suficientes** para que f seja analítica em D .

Resulta das equações de Cauchy-Riemann que, *caso exista*, a derivada de uma função complexa de variável complexa, $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$, pode ser calculada a partir das suas partes real e imaginária de diversas formas

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - j \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial x}$$

Para as funções analíticas, são válidas as regras de derivação tal como vistas em Análise Matemática 1 e 2 (soma, produto, composição etc.), sendo as derivadas das funções elementares totalmente idênticas às conhecidas para as funções em \mathbb{R} .

Exemplos

4. As derivadas das funções elementares conhecidas em \mathbb{R} são válidas em \mathbb{C} . Assim, por exemplo, sendo $f(z) = \text{sen}(z^2)$, temos

$$\begin{aligned} f'(z) &= (\text{sen}(z^2))' = (z^2)' \cos(z^2) \\ &= 2z \cos(z^2) \end{aligned}$$

A função $f(z) = \text{sen}(z^2)$ é analítica em \mathbb{C} (é inteira). Ou, sendo $f(z) = \frac{\ln(i)}{z}$, temos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left(\frac{\ln(i)}{z} \right)' \\ &= -\frac{\ln(i)}{z^2} = -\frac{\ln(1) + j \frac{\pi}{2}}{z^2} = -j \frac{\pi}{2z^2} \end{aligned}$$

A função $f(z) = \frac{\ln(i)}{z}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5. Para que a função $f(z) = e^{-x}(x \operatorname{sen}(y) - y \operatorname{cos}(y)) + jv$ seja analítica, dado que, sendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} e^{-x}(x \operatorname{sen}(y) - y \operatorname{cos}(y)) \\ &= e^{-x} \operatorname{sen}(y) - x e^{-x} \operatorname{sen}(y) + y e^{-x} \operatorname{cos}(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} e^{-x}(x \operatorname{sen}(y) - y \operatorname{cos}(y)) \\ &= -e^{-x} \operatorname{cos}(y) - x e^{-x} \operatorname{cos}(y) - y e^{-x} \operatorname{sen}(y)\end{aligned}$$

e, implicando as equações de Cauchy-Riemann que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

resulta

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x} \operatorname{sen}(y) - x e^{-x} \operatorname{sen}(y) + y e^{-x} \operatorname{cos}(y) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x} \operatorname{cos}(y) - x e^{-x} \operatorname{cos}(y) - y e^{-x} \operatorname{sen}(y)\end{aligned}$$

Integrando $\partial v/\partial y$, temos

$$\begin{aligned}v &= \int (e^{-x} \operatorname{sen}(y) - x e^{-x} \operatorname{sen}(y) + y e^{-x} \operatorname{cos}(y)) dy \\ &= -e^{-x} \operatorname{cos}(y) + x e^{-x} \operatorname{cos}(y) + e^{-x}(\operatorname{cos}(y) + y \operatorname{sen}(y)) + F(x) \\ &= x e^{-x} \operatorname{cos}(y) + y e^{-x} \operatorname{sen}(y) + F(x)\end{aligned}$$

Derivando e substituindo em $\partial v/\partial x$, temos

$$\begin{aligned}e^{-x} \operatorname{cos}(y) - x e^{-x} \operatorname{cos}(y) - y e^{-x} \operatorname{sen}(y) + F'(x) \\ = e^{-x} \operatorname{cos}(y) - x e^{-x} \operatorname{cos}(y) - y e^{-x} \operatorname{sen}(y)\end{aligned}$$

, pelo que $F'(x) = 0$, e portanto $F(x) = c$. Resulta então

$$v = x e^{-x} \operatorname{cos}(y) + y e^{-x} \operatorname{sen}(y) + c$$

6. Sendo $f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - j \operatorname{atan}\left(\frac{x}{y}\right)$, podemos usar as equações de Cauchy-Riemann para mostrar que f é diferenciável. Sendo

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \\ v(x, y) &= -\operatorname{atan}\left(\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial(x^2 + y^2)/\partial x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial(x^2 + y^2)/\partial y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(x/y)/\partial x}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = -\frac{\frac{1}{y}}{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(x/y)/\partial y}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = -\frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Verificando portanto as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

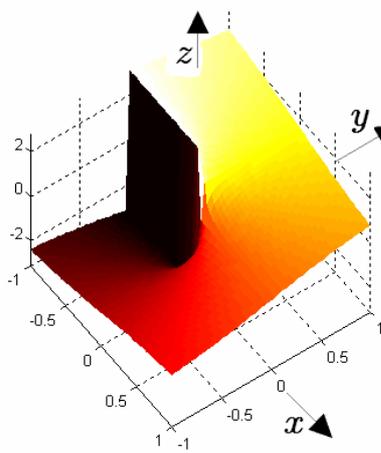
a função é diferenciável.

Podemos calcular $f'(z)$ por qualquer das expressões

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - j \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial x}$$

, sendo

$$f'(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2}$$



É de notar que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - j \operatorname{atan}\left(\frac{x}{y}\right) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + j \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \ln(\rho) + j \theta \\ &= \ln(z) \end{aligned}$$

, pelo que

$$f'(z) = (\ln(z))' = \frac{1}{z}$$

Figura M10.1

, de onde concluímos de imediato que $f(z)$ é diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (na verdade, tendo em atenção a descontinuidade da função $\operatorname{Arg}\{z\}$, e tomando-se usualmente para o ramo principal $\theta \in [-\pi, \pi]$, a função é descontínua sobre todo o eixo $x \leq 0$. A figura M9.1 mostra o $\operatorname{Arg}\{z(x, y)\}$ com $x, y \in [-1, 1]$).

Note que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + jy} = \frac{x - jy}{(x + jy)(x - jy)} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2}$$

3.3. Funções harmónicas.

Uma função $u(x,y)$, real de variável real, definida numa região $D \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma **função harmónica** em D se, nessa região, satisfizer a *equação de Laplace*

$$\nabla^2 U = 0$$

, sendo operador diferencial ∇^2 , dito *Lapaciano*, dado em coordenadas cartesianas por

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Resulta das equações de Cauchy-Riemman que, *sendo* $f(z) = f(u,v) = u(x,y) + jv(x,y)$ *uma função analítica numa região* $D \subset \mathbb{C}$, *então* $u(x,y)$ *e* $v(x,y)$ *são função harmónicas na correspondente região* $D \subset \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Podemos ainda demonstrar que, *dada qualquer função harmónica* $u(x,y)$ *numa região* $D \subset \mathbb{R}^2$, *existe uma função* $v(x,y)$, *única a menos de uma constante, dita função harmónica conjugada de* $u(x,y)$, *tal que a função complexa de variável complexa* $f(u,v) = u(x,y) + jv(x,y)$ *é analítica na correspondente região* $D \subset \mathbb{C}$.

Exemplos

7. Podemos verificar que a função $u(x,y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$u(x,y) = -2x^3 + x^2 + 6xy^2 - y^2$$

é uma função harmónica (em \mathbb{R}^2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(-2x^3 + x^2 + 6xy^2 - y^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(-2x^3 + x^2 + 6xy^2 - y^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(-6x^2 + 2x + 6y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(12xy - 2y) \\ &= (-12x + 2) + (12x - 2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Com base nas equações de Cauchy-Riemman

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

podemos determinar a sua função harmónica conjugada. Sendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -6x^2 + 2x + 6y^2 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = -12xy + 2y \end{aligned}$$

, resulta

$$\begin{aligned}v &= \int \frac{\partial v}{\partial y} dy \\&= \int (-6x^2 + 2x + 6y^2) dy \\&= -6x^2y + 2xy + 2y^3 + g(x)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}v &= \int \frac{\partial v}{\partial x} dx \\&= \int (-12xy + 2y) dx \\&= -6x^2y + 2xy + h(y)\end{aligned}$$

, pelo que

$$v(x, y) = -6x^2y + 2xy + 2y^3 + c$$

As funções, complexas de variável complexa,

$$\begin{aligned}f(x, y) &= u(x, y) + jv(x, y) \\&= (-2x^3 + x^2 + 6xy^2 - y^2) + j(-6x^2y + 2xy + 2y^3 + c)\end{aligned}$$

são analíticas em \mathbb{C} , ou seja, são inteiras.

3.4. Regra de L'Hospital.

Seja $f(z)$ e $g(z)$ funções analíticas numa região contendo um ponto z_0 , e admitindo que $f(z_0) = g(z_0) = 0$, mas $g'(z_0) \neq 0$ então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Tal como no caso das funções reais de variável real, modificações apropriadas das expressões das funções permitem tratar as situações ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, etc.

Exemplos

8. Atendendo à regra de L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i} \frac{1 + z^{10}}{1 + z^6} &= \frac{1 + (z^2)^5}{1 + (z^2)^3} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{10z^9}{6z^5} \\ &= \frac{5}{3} \lim_{z \rightarrow i} z^4 \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

9. Podemos recorrer à regra de L'Hospital e a limites de referência, tal como foi feito em \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(z)}{\operatorname{sen}(z^2)} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(z)}{\frac{z^2}{\operatorname{sen}(z^2)}} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(z)}{z^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(z^2)}{z^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(z)}{z^2} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{2z} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$