

- Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

- Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

Módulo 10

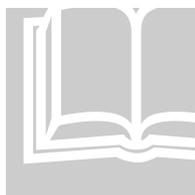
TÓPICOS

Integração complexa.

Integral de linha.

Teorema de Cauchy.

Fórmulas integrais de Cauchy.



4. Integração complexa.

4.1. Integral definido.

Sendo $w = f(t)$ uma função complexa de variável real, $f(t) = x(t) + jy(t)$ com $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b (x(t) + jy(t))dt = \int_a^b x(t)dt + j \int_a^b y(t)dt$$

O cálculo do integrais de funções complexas de variável real pode ser feito utilizando as técnicas adquiridas na cadeira de Análise Matemática 1.

Exemplos

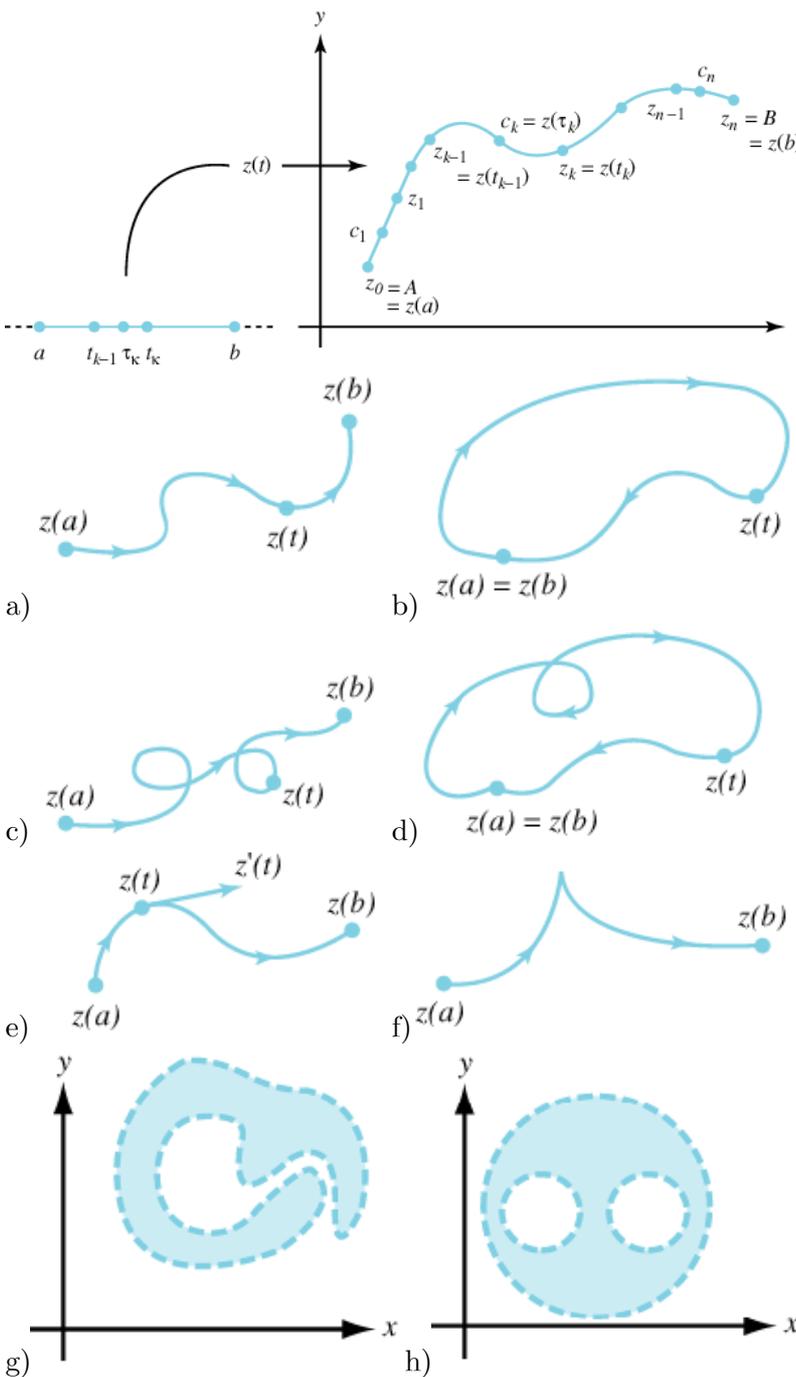
1. Sendo $f(z) = e^{jt}$, então

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{jt} dt &= \int_a^b (\cos(t) + j \sin(t))dt = \int_a^b \cos(t)dt + j \int_a^b \sin(t)dt \\ &= [\sin(t) - j \cos(t)]_a^b = [-j(\cos(t) + j \sin(t))]_a^b \\ &= [-je^{jt}]_a^b = \left[\frac{1}{j} e^{jt} \right]_a^b \end{aligned}$$

, ou seja, sendo conhecida a primitiva de $f(z) = e^{jt}$ podemos fazer de imediato

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{jt} dt &= \left[\frac{1}{j} e^{jt} \right]_a^b \\ &= \frac{e^{jb} - e^{ja}}{j} \end{aligned}$$

4.2. Curvas e regiões em \mathbb{C} .



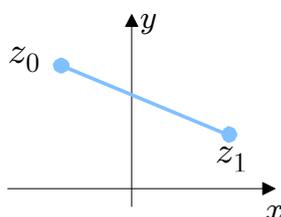
Considere a figura M10.1. Uma curva, C , em \mathbb{C} pode ser interpretada como o conjunto de imagens de uma aplicação de um intervalo de \mathbb{R} , $[a, b]$, em \mathbb{C} e ser representada parametricamente

$$C : z(t) = x(t) + jy(t) \quad , \text{com } a \leq t \leq b$$

- a) Uma curva diz-se *simples* se a função $z(t)$ é injectiva.
- b) Uma curva *simples fechada* ($z(t)$ é injectiva no intervalo semi-aberto que se obtém excluindo um dos extremos). Uma curva simples fechada é designada por *curva de Jordan*.
- c) Uma curva que não é simples nem fechada.
- d) Uma curva fechada que não é simples.
- e) Uma curva diz-se *regular* se $x'(t)$ e $y'(t)$ são funções contínuas em todos os pontos do intervalo.
- f) Uma curva não regular, mas *seccionalmente regular*: existe uma partição do intervalo num número finito de subintervalos em que a curva é regular.
- g) Uma *região simplesmente conexa*: qualquer curva simples fechada contida na região pode ser reduzida a um ponto permanecendo na região.
- h) Uma *região multiplamente conexa*.

Figura M10.1

Exemplos



2. Um segmento de recta no plano complexo pode ser descrito parametricamente por

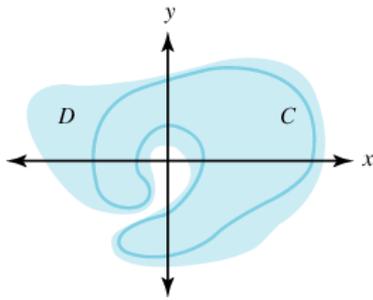
$$C : z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t \quad \text{com } 0 \leq t \leq 1$$

4.3. Integrais de linha.

Seja $f(z)$ uma função complexa de variável complexa definida numa região $D \subset \mathbb{C}$, $C \subset D$ uma curva seccionalmente regular e simples, e seja $z(t)$ uma parametrização de C com $a \leq t \leq b$, então o integral de $f(z)$ ao longo da curva C (e sentido de a para b) é definido por

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

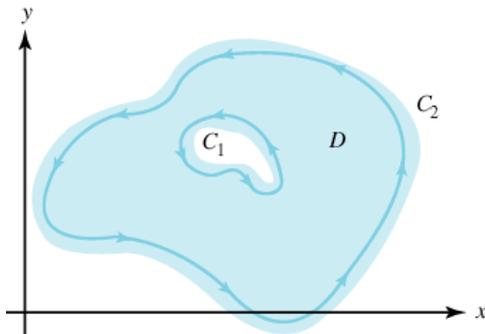
Teorema de Cauchy e teoremas associados.



Teorema de Cauchy: Sendo $D \subset \mathbb{C}$ uma região simplesmente conexa, $f(z)$ uma função analítica em D , e $C \subset D$ uma curva seccionalmente regular fechada, então

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

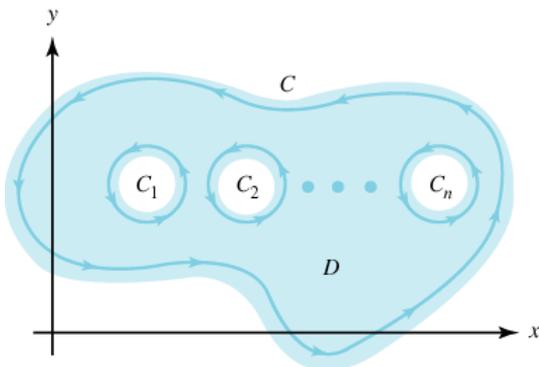
Teorema de Morera. Se $f(z)$ é contínua numa região simplesmente conexa D , e se para qualquer curva simples fechada $C \subset D$ for $\oint_C f(z) dz = 0$, então $f(z)$ é analítica em D .



Teorema 1: Sendo $f(z)$ uma função analítica numa região limitada por duas curvas simples fechadas, C_1 e C_2 , e sobre elas, então

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

, sendo C_1 e C_2 percorridos no mesmo sentido.



Teorema 2. Sendo $f(z)$ uma função analítica numa região limitada pelas curvas simples fechadas, C, C_1, C_2, \dots, C_n (onde C_1, C_2, \dots, C_n estão contidas na região limitada por C), e sobre elas, então

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n} f(z) dz$$

, sendo as curvas percorridas no mesmo sentido.

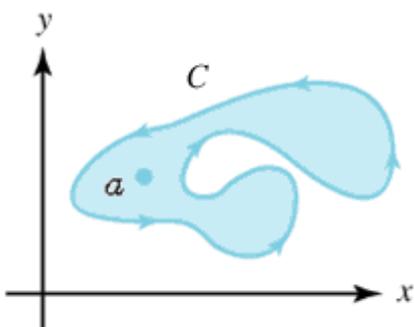
Teorema fundamental do cálculo integral.

Seja $f(z)$ uma função analítica numa região $D \subset \mathbb{C}$ e $C \subset D$ uma curva seccionalmente regular com origem em z_1 e extremidade em z_2 (sendo z_1 e z_2 quaisquer dois pontos de D), se existir uma função $F(z)$ tal que, em D , $F'(z) = f(z)$, então

$$\int_C f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

, ou seja, sendo $f(z)$ uma função analítica numa região D então $\int_C f(z) dz$ é independente do caminho de D que liga as extremidades de C .

Fórmulas integrais de Cauchy.



Seja $f(z)$ uma função complexa de variável complexa analítica numa região $D \subset \mathbb{C}$ limitada por uma curva simples fechada $C \subset D$, e sobre ela, e seja a um qualquer ponto interior dessa região, então

$$f(a) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

, sendo C percorrida no sentido positivo.

A n -ésima derivada de $f(z)$ em $z = a$ é dada por

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

, com $n \in \mathbb{N}$

Assim, se uma função $f(z)$ for conhecida sobre uma curva simples fechada C , então os valores da função e das suas derivadas até à ordem n podem ser determinados em pontos interiores à região limitada por C .

Se $f(z)$ é analítica numa região simplesmente conexa C , todas as suas derivadas existem e são analíticas em C .

Resulta de imediato das fórmulas integrais de Cauchy que, nas condições de aplicação

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi j f(a)$$

e

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(a)$$

, sendo C percorrido no sentido positivo e $n \in \mathbb{N}$. Resulta ainda, em particular,

$$\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi j$$

e

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = 0$$

, sendo C percorrido no sentido positivo e n qualquer inteiro diferente de 1.

Exemplos

3. Seja o integral da função

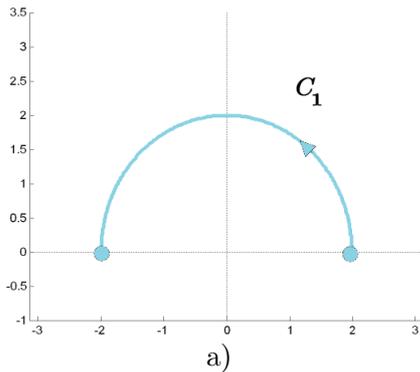
$$f(z) = e^z$$

ao longo da curva

$$C_1 : z(\theta) = 2e^{j\theta} \text{ com } 0 \leq \theta \leq \pi$$

, correspondente ao arco de círculo que se mostra na figura M10.2 a).

Sendo $z'(\theta) = 2je^{j\theta}$, temos

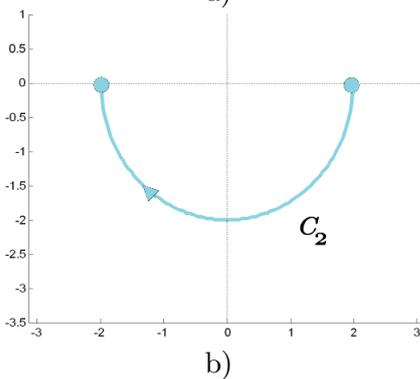


$$\begin{aligned} \int_{C_1} e^z dz &= \int_a^b f(z(\theta)) z'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi e^{2e^{j\theta}} 2je^{j\theta} d\theta \\ &= \left[e^{2e^{j\theta}} \right]_0^\pi \\ &= e^{-2} - e^2 \end{aligned}$$

Considere-se agora o contorno

$$C_2 : z(\theta) = 2e^{j\theta} \text{ com } 0 \leq \theta \leq -\pi$$

correspondente ao arco de círculo que se mostra na figura M10.2 b). Utilizando parte dos cálculos anteriores podemos escrever



$$\begin{aligned} \int_{C_2} e^z dz &= \int_0^{-\pi} e^{2e^{j\theta}} 2je^{j\theta} d\theta \\ &= \left[e^{2e^{j\theta}} \right]_0^{-\pi} \\ &= e^{-2} - e^2 \end{aligned}$$

Figura M10.2

Obtemos o mesmo valor. Sendo a função $f(z) = e^z$ uma função analítica em \mathbb{C} (é uma função inteira) obteríamos o mesmo valor independentemente do caminho escolhido entre os pontos inicial e final, $z_1 = 2$ e $z_2 = -2$. Aliás, **sendo a função analítica** em \mathbb{C} , o cálculo explícito do integral de linha é desnecessário dado que podemos recorrer ao teorema fundamental do cálculo integral. Assim, independentemente de C temos,

$$\begin{aligned} \int_C e^z dz &= \left[e^z \right]_{z_1}^{z_2} \\ &= \left[e^z \right]_2^{-2} \\ &= e^{-2} - e^2 \end{aligned}$$

4. a) Seja o integral da função

$$f(z) = \frac{z+2}{z}$$

ao longo da curva

$$C_1 : z(\theta) = 2e^{j\theta} \text{ com } 0 \leq \theta \leq \pi$$

, correspondente ao arco de círculo que se mostra na figura M10.3 a).

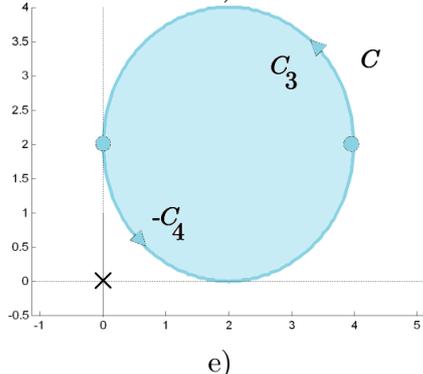
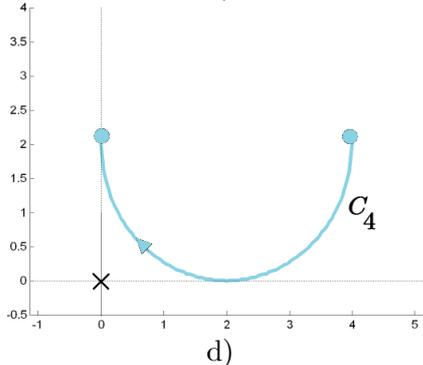
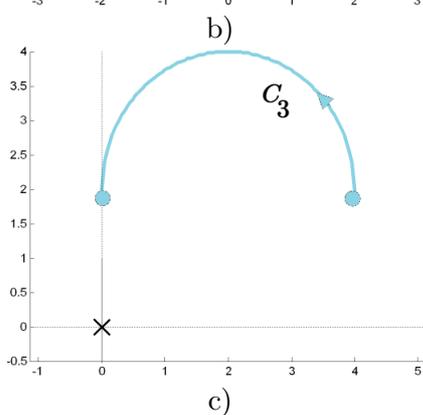
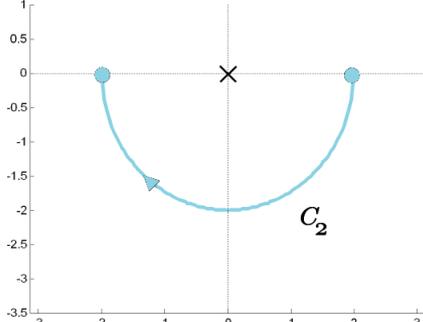
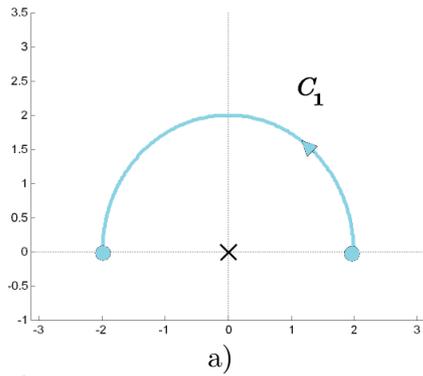


Figura M10.3

Seendo $z'(\theta) = 2je^{j\theta}$, temos

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{z+2}{z} dz &= \int_a^b f(z(\theta)) z'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{2e^{j\theta} + 2}{2e^{j\theta}} 2je^{j\theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi j(2e^{j\theta} + 2) d\theta \\ &= 2[e^{j\theta}]_0^\pi + 2j[\theta]_0^\pi \\ &= 2(1) + 2(0) + j2(\pi) + 0 \\ &= -4 + j2\pi \end{aligned}$$

b) Considere-se agora o contorno

$$C_2 : z(\theta) = 2e^{j\theta} \text{ com } 0 \leq \theta \leq -\pi$$

correspondente ao arco de círculo que se mostra na figura M10.3 b). Atendendo aos cálculos em 4 a) podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{z+2}{z} dz &= \int_0^{-\pi} (2e^{j\theta} + 2)jd\theta \\ &= 2[e^{j\theta}]_0^{-\pi} + 2j[\theta]_0^{-\pi} \\ &= 2(1) + 2(0) + j2(-\pi) + 0 \\ &= -4 - j2\pi \end{aligned}$$

Embora tenhamos começado e terminado nos mesmos pontos, $z_1 = 2$ e $z_2 = -2$, não obtemos o mesmo valor. Na verdade a função $f(z) = (z+2)/z$ **não é analítica em $z = 0$ e não é possível definir uma região simplesmente conexa que contenha as curvas C_1 e C_2 .**

c) Consideremos agora o integral ao longo da curva

$$C_3 : z(\theta) = (2+2j) + 2e^{j\theta} \text{ com } 0 \leq \theta \leq \pi$$

, correspondente ao arco de círculo que se mostra na figura M10.3 c). É igualmente $z'(\theta) = 2je^{j\theta}$, logo

$$\begin{aligned} \int_{C_3} \frac{z+2}{z} dz &= \int_a^b f(z(\theta)) z'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{(2+2j) + 2e^{j\theta} + 2}{(2+2j) + 2e^{j\theta}} 2je^{j\theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi 2je^{j\theta} d\theta + 2 \int_0^\pi \frac{2je^{j\theta}}{2+2j+2e^{j\theta}} d\theta \\ &= [2e^{j\theta}]_0^\pi + 2[\ln(2+2j+2e^{j\theta})]_0^\pi \\ &= (-2) - (2) + 2\ln(2j) - 2\ln(4+2j) \\ &= -4 + 2\ln(2j) - 2\ln(4+2j) \end{aligned}$$

d) Consideremos agora o integral ao longo da curva

$$C_4 : z(\theta) = (2+2j) + 2e^{j\theta} \text{ com } 0 \leq \theta \leq -\pi$$

, correspondente ao arco de círculo que se mostra na figura M10.3 d). Atendendo ao cálculos anteriores podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{C_4} \frac{z+2}{z} dz &= \int_0^{-\pi} \frac{(2+2j) + 2e^{j\theta} + 2}{(2+2j) + 2e^{j\theta}} 2je^{j\theta} d\theta \\ &= [2e^{j\theta}]_0^{-\pi} + 2[\ln(2+2j + 2e^{j\theta})]_0^{-\pi} \\ &= -4 + 2\ln(2j) - 2\ln(4+2j)\end{aligned}$$

Obtemos o mesmo valor independentemente do percurso. Na verdade, se considerarmos a curva fechada $C = C_3 - C_4$ estamos nas condições do teorema de Cauchy, dado que a função $f(z) = (z+2)/z$ é analítica na região interior a esta curva e portanto

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

, ou seja

$$\int_{C_3} f(z) dz = \int_{-C_4} f(z) dz$$

Podemos ainda salientar que, sendo possível definir uma região simplesmente conexa em que $f(z) = (z+2)/z$ é analítica e contenha C_3 e C_4 o integral de linha só depende dos pontos inicial e final, $z_1 = 4+2j$ e $z_2 = 2j$, ou seja, podemos aplicar o teorema fundamental do cálculo integral

$$\begin{aligned}\int_C \frac{z+2}{z} dz &= \int_C 1 dz + \int_C \frac{2}{z} dz \\ &= [z + 2\ln(z)]_{z_1}^{z_2} \\ &= z_2 + 2\ln(z_2) - z_1 - 2\ln(z_1) \\ &= 2j + 2\ln(2j) - 4 - 2j - 2\ln(4+2j) \\ &= -4 + 2\ln(2j) - 2\ln(4+2j)\end{aligned}$$

e) Tenha-se em consideração as fórmulas integrais de Cauchy

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi j f(a)$$

Temos então para $a = 0$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi j f(0)$$

Fazendo $f(z) = z+2$, que é uma função analítica em \mathbb{C} , podemos escrever, dado ser $f(0) = 2$,

$$\oint_C \frac{z+2}{z} dz = 4\pi j$$

Considerem-se os integrais calculados em a) e b)

$$\int_{C_1} \frac{z+2}{z} dz = -4 + j2\pi$$

$$\int_{C_2} \frac{z+2}{z} dz = -4 - j2\pi$$

Se considerarmos a curva $C = C_1 - C_3$, temos

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{z+2}{z} dz &= \int_{C_1} \frac{z+2}{z} dz - \int_{C_2} \frac{z+2}{z} dz \\ &= (-4 + j2\pi) - (-4 - j2\pi) \\ &= 4\pi j \end{aligned}$$

, que verifica, naturalmente, o resultado obtido a partir das fórmulas integrais de Cauchy. Podíamos assim ter calculado qualquer dos integrais a partir do conhecimento de um deles e do resultado obtido através das fórmulas integrais.

f) Considere-se por último a curva da figura M10.4

$$C_5 : z_1(t) + z_2(t)$$

com

$$z_1(t) = 2 + (2j - 2)t \text{ com } 0 \leq t \leq 1$$

$$z_2(t) = 2j - (2 + 2j)t \text{ com } 0 \leq t \leq 1$$

Temos $z_1'(t) = 2j - 2$ e $z_2'(t) = 2 + 2j$, e portanto

$$\begin{aligned} \int_{C_5} \frac{z+2}{z} dz &= \int_a^b f(z(\theta)) z'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^1 \frac{2 + (2j - 2)t + 2}{2 + (2j - 2)t} (2j - 2) dt + \int_0^1 \frac{2j - (2 + 2j)t}{2j - (2 + 2j)t} (2 + 2j) dt \\ &= (j\pi - 2 + 2j) + (j\pi - 2 - 2j) \\ &= -4 + j2\pi \end{aligned}$$

, ou seja, obtemos o mesmo resultado da integração através da curva C_1 . Na verdade, se considerarmos a curva fechada $C = C_1 - C_5$ estamos nas condições do teorema de Cauchy, dado que a função $f(z) = (z + 2)/z$ é analítica na região interior a esta curva e portanto

$$\oint_C \frac{z+2}{z} dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1} \frac{z+2}{z} dz = \int_{C_5} \frac{z+2}{z} dz$$

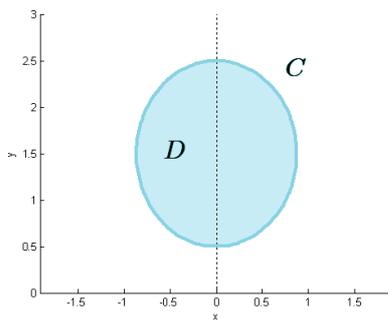


Figura M10.5

5. $C \subset \mathbb{C} : |z - i| + |z - 2i| = 2$ corresponde a uma elipse no plano complexo com os focos nos pontos i e $2i$, como se mostra na figura M10.5. É portanto uma curva seccionalmente regular fechada, sendo o seu interior uma região, D , simplesmente conexa. A função $f(z) = z^5 e^{z^2 \cos^2(z)}$ é analítica em \mathbb{C} (por resultar do produto e composição de funções analíticas em \mathbb{C}), pelo que também o é em D . Assim, atendendo ao teorema de Cauchy,

$$\oint_C z^5 e^{z^2 \cos^2(z)} dz = 0$$

6. Seja a função $f(z) = z^*$ (z conjugado). O integral de linha entra os pontos $z_1 = 0$ e $z_2 = 1 + i$ ao longo da curva

$$C : z(t) = (1 + j)t \text{ com } 0 \leq t \leq 1$$

, que se mostra na figura M10.6 a), sendo $z'(t) = (1 + j)$ é dado por

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_0^1 ((1+j)t)^*(1+j) dt \\ &= (1+j) \int_0^1 (1-j)t dt = (1+j)(1-j) \int_0^1 t dt \\ &= 2 \int_0^1 t dt = 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Consideremos agora que, entre os mesmos pontos $z_1 = 0$ e $z_2 = 1 + i$ seguíamos a curva que se mostra na figura M10.6 b), ou seja os segmento de recta

$$C_1 : y = 0; 0 \leq x \leq 1$$

$$C_2 : x = 1; 0 \leq y \leq 1$$

Para o primeiro troço da curva temos

$$z = x ; dz = dx ; f(z) = z^* = (x + j0) = x$$

, pelo que

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z) dz &= \int_0^1 x dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para o segundo troço da curva temos

$$z = 1 + jy ; dz = jdy ; f(z) = z^* = 1 - jy$$

, pelo que

$$\begin{aligned} \int_{C_2} f(z) dz &= \int_0^1 (1 - jy) jdy \\ &= \left[jy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 \\ &= j + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Combinando os dois troços temos então

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz \\ &= +\frac{1}{2} + j + \frac{1}{2} \\ &= 1 + j \end{aligned}$$

Consideremos agora que, entre os mesmos pontos $z_1 = 0$ e $z_2 = 1 + i$ seguíamos o troço da parábola $y = x^2$, que se mostra na figura M10.6 c)

$$C : z(t) = t + jt^2 \text{ com } 0 \leq t \leq 1$$

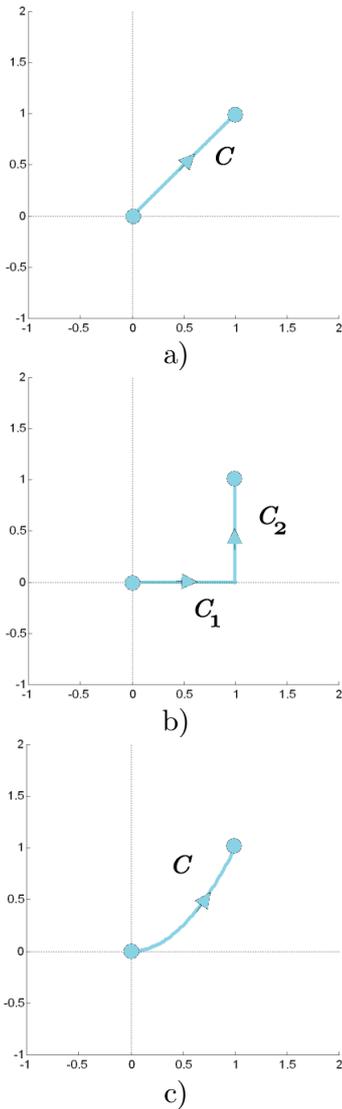


Figura M10.6

Temos agora, sendo $z'(t) = 1 + 2jt$,

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_0^1 (t + jt^2)^*(1 + 2jt) dt \\ &= \int_0^1 (t - jt^2)(1 + 2jt) dt \\ &= \int_0^1 (t + jt^2 + 2t^3) dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} + j \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{2} \right]_0^1 \\ &= 1 + j \frac{1}{3} \end{aligned}$$

A função $f(z) = z^*$ **não é analítica em nenhum ponto de \mathbb{C}** (ver módulo 8). O integral de linha entre quaisquer dois pontos depende sempre do percurso considerado. *Nunca é possível recorrer ao teorema fundamental do cálculo integral.*

7. O cálculo de

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^5} dz$$

, atendendo a que $f(z) = e^{2z}$ é analítica no interior do círculo unitário ($|z| < 1$) e $a = 0$ é um ponto pertencente a essa região, resulta facilmente das fórmulas integrais de Cauchy

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \frac{n!}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \\ \left. \frac{d^4}{dz^4} (e^{2z}) \right|_{z=0} &= \frac{4!}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{(z-0)^5} dz \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^5} dz &= \frac{2\pi j}{4!} \left. \frac{d^4}{dz^4} (e^{2z}) \right|_{z=0} \\ &= \frac{2\pi j}{24} \left[2^4 e^{2z} \right]_{z=0} \\ &= j \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

8. Seja o cálculo de

$$\oint_C \frac{z^5 e^{z^2 \cos^2(z)}}{2z - i\pi} dz$$

, em que $C \subset \mathbb{C} : |z - j| + |z - 2j| = 2$ (ver exemplo 4). Atendendo a que $a = j\pi/2$ é um ponto interior à elipse, e estando $f(z) = z^5 e^{z^2 \cos^2(z)}$ nas condições das fórmulas integrais de Cauchy, é

$$f(a) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

, logo

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{z^5 e^{z^2 \cos^2(z)}}{2z - j\pi} dz &= \frac{1}{2} \oint_C \frac{z^5 e^{z^2 \cos^2(z)}}{z - j\frac{\pi}{2}} dz \\ &= \pi j \left[z^5 e^{z^2 \cos^2(z)} \right]_{z=j\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi j \left(\frac{j\pi}{2} \right)^5 e^{\left(\frac{j\pi}{2} \right)^2 \cos^2\left(\frac{j\pi}{2} \right)} \\ &= -\frac{\pi^6}{2^5} e^{\frac{\pi^2}{4}(e^\pi + e^{-\pi} + 2)} \end{aligned}$$

9. Seja o cálculo de

$$\oint_C \frac{1}{z^2(z-j)^3} dz$$

, em que $C \subset \mathbb{C} : |z-j| + |z-2j| = 2$ (ver exemplo 5). Atendendo a que $a = j$ é um ponto interior à elipse, e estando $f(z) = 1/z^2$ nas condições das fórmulas integrais de Cauchy ($z = 0$ não está no interior da elipse), é

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz &= \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(a) \\ \oint_C \frac{1}{z^2(z-j)^3} dz &= \oint_C \frac{z^{-2}}{(z-j)^3} dz \\ &= \frac{2\pi j}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{z^2} \right) \Big|_{z=j} \end{aligned}$$

Sendo

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{z^2} \right) = \frac{d}{dz} (-2z^{-3}) = 6z^{-4}$$

temos

$$\oint_C \frac{1}{z^2(z-j)^3} dz = \pi j 6z^{-4} \Big|_{z=j} = j6\pi$$