

- Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

- Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

Módulo 11

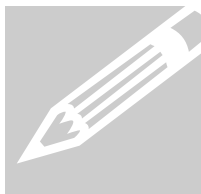
TÓPICOS

Funções de variável complexa.

Limites e continuidade.

Diferenciação.

Integração.



Exercícios.

Funções, Limites e Continuidade.

1. Determine o domínio da função

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^8 - 1}$$

- Calculando as raízes do numerador e denominador, relembrando que,

$$z^{1/n} = \rho^{1/n} e^{j(\theta+2k\pi)/n}$$

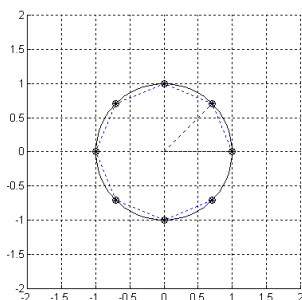
temos

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z^2 = -1$$

$$z = \pm j$$

$$z^2 + 1 = (z + j)(z - j)$$



e

$$z^8 - 1 = 0$$

$$z^8 = 1$$

$$z = (1)^{\frac{1}{8}} = (e^{j0})^{\frac{1}{8}} = e^{j\frac{0+2k\pi}{8}} = e^{jk\frac{\pi}{4}}$$

com $k = 0, 1, \dots, 7$, resulta

$$z^8 - 1 = (z+1)(z-1)(z+j)(z-j) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) \right) \\ \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) \right) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j) \right) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j) \right)$$

Logo

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^8 - 1} \\ = \frac{1}{(z+1)(z-1) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) \right) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) \right) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j) \right) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j) \right)}$$

, pelo que o domínio da função é

$$z \in \mathbb{C} \wedge z \neq \pm 1, \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm j), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm j)$$

2. Calcule

$$\lim_{z \rightarrow j} \left(7 \frac{z^2 + 1}{z^7 + j} + 2j \right)$$

• Temos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow j} \left(7 \frac{z^2 + 1}{z^7 + j} + 2j \right) &= 2j + 7 \lim_{z \rightarrow j} \left(\frac{z^2 + 1}{z^7 + j} \right) \\ &= 2j + 7 \lim_{z \rightarrow j} \left(\frac{z^2 + 1}{z(z^2)^3 + j} \right) \\ &= 2j + 7 \left(\frac{-1 + 1}{j(-1)^3 + j} \right) \\ &= 2j + 7 \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Recorrendo à regra de L'Hospital, temos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow j} \left(7 \frac{z^2 + 1}{z^7 + j} + 2j \right) &= 2j + 7 \lim_{z \rightarrow j} \left(\frac{z^2 + 1}{z^7 + j} \right) \\ &= 2j + 7 \lim_{z \rightarrow j} \left(\frac{2z}{7z^6} \right) \\ &= 2j + 2 \lim_{z \rightarrow j} \left(\frac{1}{z^5} \right) \\ &= 2j + 2 \lim_{z \rightarrow j} \left(\frac{1}{z(z^2)^2} \right) \\ &= 2j + 2 \frac{1}{j(-1)^2} \\ &= 2j - 2j \\ &= 0 \end{aligned}$$

Diferenciação complexa.

3. Calcule $f'(z)$, sendo

$$f(z) = (-x^2 + 6x^2y - 2y^3 + y^2) + j(-2x^3 + 6xy^2 - 2xy - 3)$$

- Vamos verificar as equações de Cauchy-Riemann. Temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2x + 12xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2 - 6y^2 + 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -6x^2 + 6y^2 - 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 12xy - 2x$$

pelo que se verificam as equações de Cauchy-Riemann. $f(z)$ é diferenciável em $\mathbb{C}$, sendo

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= -2x + 12xy + j(-6x^2 + 6y^2 - 2y) \end{aligned}$$

Integração complexa.

4. Sendo $C : z(\theta) = 2e^{j\theta}$ com $0 \leq \theta \leq \pi$ calcule

$$\int_C z e^z dz$$

- Sendo $f(z) = z e^z$ uma função analítica em $\mathbb{C}$, o integral não depende do percurso, podendo ser aplicado o teorema fundamental do cálculo integral. Sendo

$$z_1 = z(0) = 2e^{j0} = 2$$

$$z_2 = z(\pi) = 2e^{j\pi} = -2$$

temos

$$\begin{aligned} \int_C z e^z dz &= \int_{z_1}^{z_2} z e^z dz \\ &= \int_{-2}^2 z e^z dz \\ &= \left[z e^z - e^z \right]_{-2}^2 \\ &= 2e^2 - e^2 + 2e^{-2} + e^{-2} \\ &= e^2 + 3e^{-2} \end{aligned}$$

5. Calcule

$$\oint_{|z|=2} z^5 \cos(z) dz$$

- A função

$$f(z) = z^5 \cos(z)$$

é analítica em $\mathbb{C}$ (portanto também o é no interior do círculo de raio 2). Assim sendo, atendendo ao teorema de Cauchy, temos

$$\oint_{|z|=2} z^5 \cos(z) dz = 0$$

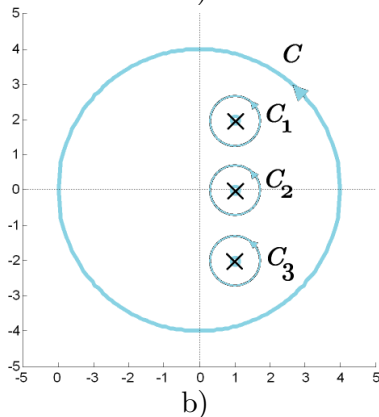
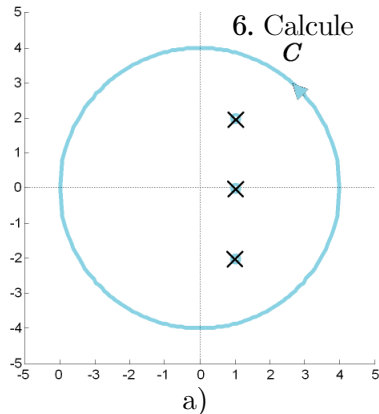


Figura M11.1

$$\oint_{|z|=4} \frac{z^2}{(z-1)(z^2-2z+5)} dz$$

- O denominador tem zeros em

$$z-1=0 \Rightarrow z_1=1$$

$$(z^2-2z+5) \Rightarrow z_{2,3}=1 \pm 2i$$

, todos eles no interior do círculo de raio 4. Para além do cálculo explícito do integral de linha (opção mais trabalhosa), podemos fazer o cálculo de dois modos:

a)

Consideremos três curvas simples fechadas, C_1, C_2 e C_3 , todas elas no interior de C , mas de modo a que cada uma delas contenha no seu interior apenas uma das singularidades da função, respectivamente z_1, z_2 e z_3 como se mostra na figura M11.1 b). Sendo $f(z)$ analítica na região entre C e as três curvas interiores, temos

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \oint_{C_3} f(z) dz$$

Por outro lado, podemos fazer

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \frac{z^2}{(z-1)(z-(1+2j))(z-(1-2j))} dz &= \oint_{C_1} \frac{z^2}{(z-1)(z-(1-2j))} \frac{1}{z-(1+2j)} dz \\ &= \oint_{C_1} \frac{f_1(z)}{z-(1+2j)} dz \\ \oint_{C_2} \frac{z^2}{(z-1)(z-(1+2j))(z-(1-2j))} dz &= \oint_{C_2} \frac{z^2}{(z-1)(z-(1-2j))} \frac{1}{z-(1+2j)} dz \\ &= \oint_{C_2} \frac{f_2(z)}{z-(1+2j)} dz \\ \oint_{C_3} \frac{z^2}{(z-1)(z-(1+2j))(z-(1-2j))} dz &= \oint_{C_3} \frac{z^2}{(z-1)(z-(1+2j))} \frac{1}{z-(1-2j)} dz \\ &= \oint_{C_3} \frac{f_3(z)}{z-(1+2j)} dz \end{aligned}$$

Sendo $f_1(z), f_2(z)$ e $f_3(z)$ analíticas no interior de C_1, C_2 e C_3 , respectivamente, podemos, recorrendo às formulas integrais de Cauchy, escrever

$$\begin{aligned}
\oint_{C_1} \frac{f_1(z)}{z - (1 + 2j)} dz &= \oint_{C_1} \frac{\overline{z^2}}{(z - 1)(z - (1 - 2j))} dz = 2\pi j f_1(z_1) \\
&= 2\pi j \frac{(1 + 2j)^2}{(1 + 2j - 1)(1 + 2j - 1 + 2j))} \\
&= 2\pi j \frac{-3 + 4j}{-8} \\
\oint_{C_2} \frac{f_2(z)}{z - (1 + 2j)} dz &= \oint_{C_2} \frac{\overline{z^2}}{(z - 1)} dz = 2\pi j f_2(z_2) \\
&= 2\pi j \frac{1^2}{(1 - (1 + 2j))(1 - (1 - 2j))} \\
&= 2\pi j \frac{1}{4} \\
\oint_{C_3} \frac{f_3(z)}{z - (1 + 2j)} dz &= \oint_{C_3} \frac{\overline{z^2}}{(z - 1)(z - (1 - 2j))} dz = 2\pi j f_3(z_3) \\
&= 2\pi j \frac{(1 - 2j)^2}{((1 - 2j) - 1)((1 - 2j) - (1 + 2j))} \\
&= 2\pi j \frac{-3 - 4j}{-8}
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\oint_C f(z) dz &= \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \oint_{C_3} f(z) dz \\
&= 2\pi j \frac{-3 + 4j}{-8} + 2\pi j \frac{1}{4} + 2\pi j \frac{-3 - 4j}{-8} \\
&= 2\pi j \frac{-3 + 4j - 2 - 3 - 4j}{-8} \\
&= 2\pi j
\end{aligned}$$

b)

Decompondo $f(z)$ em frações simples temos

$$f(z) = \frac{z^2}{(z - 1)(z - (1 + 2j))(z - (1 - 2j))} = \frac{\frac{1}{4} z^2}{(z - 1)} + \frac{-\frac{1}{8} z^2}{z - (1 + 2j)} + \frac{-\frac{1}{8} z^2}{z - (1 - 2j)}$$

Temos então,

$$\begin{aligned}
\oint_C f(z) dz &= \oint_C \frac{\frac{1}{4} z^2}{(z - 1)} dz + \oint_C \frac{-\frac{1}{8} z^2}{z - (1 + 2j)} dz + \oint_C \frac{-\frac{1}{8} z^2}{z - (1 - 2j)} dz \\
&= 2\pi j \left(\frac{1}{4} (1)^2 - \frac{1}{8} (1 + 2j)^2 - \frac{1}{8} (1 - 2j)^2 \right) \\
&= 2\pi j \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} (1 - 4 + 4j) - \frac{1}{8} (1 - 4 - 4j) \right) \\
&= 2\pi j
\end{aligned}$$



Auto-Avaliação.

Fórmulas integrais de Cauchy	Eq. de Cauchy-Riemann	Derivada complexa
$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi j f(a)$	$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$	$f' = u'_x + jv'_x$ $= v'_y - ju'_y$
$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(a)$	Integral de Linha	
	$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$	

1.

1. Calcule

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^4 - 1}{z^2 + 1}$$

2. Sendo $C : z(\theta) = 2e^{j\theta}$ com $0 \leq \theta \leq \pi$ calcule

$$\int_C (2z^3 - 1) dz$$

3. Sendo

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - 1)(z + j)^2}$$

Calcule

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_{|z-j|=1} f(z) dz & \text{b) } \int_{|z-1|=1} f(z) dz & \text{c) } \int_{|z+j|=1} f(z) dz \\ \text{d) } \int_{|z+1|=1} f(z) dz & \text{e) } \int_{|z|=2} f(z) dz & \end{array}$$

Soluções

1. -2 ; 2. 4 ; 3.a) 0 ; 3.b) $\frac{\pi}{2}$; 3.c) 0 ; 3.d) $-\frac{\pi}{2}$; 3.e) 0 ;