

- Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

- Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

Módulo 12

TÓPICOS

Funções complexas definidas por séries

Série de Taylor.

Série de Laurent.



5. Funções complexas definidas por séries.

5.1. Conceitos básicos.

A série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

com $z \in \mathbb{C}$, é absolutamente convergente para $|z| < 1$, sendo, nessa região,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Define-se a **série de potências** de coeficientes a_n e centro z_0 por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

, sendo a_n uma sucessão de números complexos e $z_0 \in \mathbb{C}$.

Dada uma série de potências de coeficientes a_n , o seu **raio de convergência**, R , pode se calculado com base no critério da raiz

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

, ou com base no critério da razão

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

, sendo a série uniformemente convergente no círculo $|z - z_0| < R$.

Sendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

uma série de raio de convergência R e soma $S(z)$, então a derivada de ordem k de $S(z)$ é dada por

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z - z_0)^{n-k}$$

para o mesmo raio de convergência.

5.2. Série de Taylor.

Uma função complexa de variável complexa, $f(z)$, analítica numa região $D \subset \mathbb{C}$, pode ser desenvolvida em série de Taylor em torno de um ponto $z_0 \in D$, sendo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

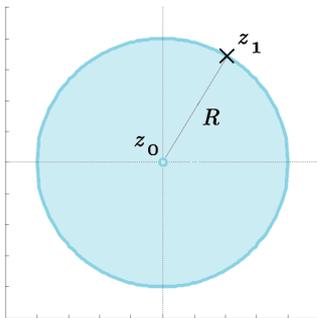


Figura M12.1

com

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

A série de Taylor converge uniformemente no interior de qualquer contorno circular $C \subset D$ centrado em z_0 e raio menor ou igual à distância entre z_0 e a singularidade mais próxima, z_1 , $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, ou seja, tem um raio de convergência $R = |z_1 - z_0|$. Quando $z_0 = 0$ a série é designada por série de MacLaurin.

5.3. Série de Laurent.

Se a função $f(z)$ não for analítica na vizinhança de z_0 não é desenvolvível em série de Taylor em torno de z_0 , no entanto, se $f(z)$ for analítica numa coroa circular $D \subset \mathbb{C}$ centrada em z_0 possui um desenvolvimento em série de potências de $(z - z_0)$ designada por série de Laurent, que é convergente em D :

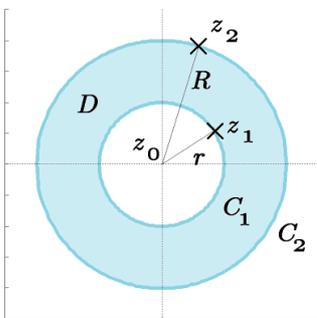


Figura M12.2

Uma função complexa de variável complexa, $f(z)$, analítica numa coroa circular $D \subset \mathbb{C}$ em torno de um ponto z_0 , pode ser desenvolvida em série de Laurent $\forall z \in D$, sendo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

com

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

, em que C é qualquer contorno contido no interior de D . A coroa circular D no interior da qual a série de Laurent da função $f(z)$ converge uniformemente, ou seja, o domínio de convergência da série, tem como fronteiras interior e exterior as circunferência que passam pelas duas singularidades

mais próximas de z_0 , z_1 e z_2 , respectivamente, C_1 de raio $r = |z_1 - z_0|$ e C_2 de raio $R = |z_2 - z_0|$, isto é: $D : r < |z - z_0| < R$.

Se o ponto z_0 for uma singularidade isolada de $f(z)$, a região de convergência D é um círculo aberto C_2 limitado pela circunferência que passa pela singularidade mais próxima, excluindo somente o seu centro.

A série de Laurent pode ser interpretada como a soma de duas séries:

$$f(z) = g_s(z) + g_r(z)$$

em que

$$g_s(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z - z_0} \right)^n$$

é chamada a **parte singular** (ou **principal**) da série, sendo convergente em $|z - z_0| > r$, e

$$g_r(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

é chamada a **parte regular** (ou **analítica**) da série, sendo convergente em $|z - z_0| < R$.

Quando a parte principal da série de Laurent é nula esta reduz-se à série de Taylor

$$f(z) = g_r(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

(recorde-se que resulta das fórmulas integrais de Cauchy

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

, pelo que os coeficientes das duas séries, nas condições de aplicação, são idênticos).

Exemplos

1. A série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - j)^n}{2^n}$$

Tem um raio de convergência

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}}{2^n} \right|$$

$$= 2$$

, ou seja, converge para $|z - j| < 2$.

2. A série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n+1} \right)^n (z-4)^n$$

Tem um raio de convergência

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n}} \\
 &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n+1}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n}}} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

, ou seja, converge para $|z - j| < 3$.

3. A função

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

tem um desenvolvimento em série de MacLaurin que pode ser obtido de dois modos diferentes. Sendo conhecida a soma da série geométrica, temos, derivando ambos os membros,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\
 -\frac{(-1)}{(1-z)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \\
 \frac{1}{(1-z)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n
 \end{aligned}$$

O mesmo resultado pode ser obtido a partir da definição. Sendo

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{(1-z)^2} \\
 f'(z) &= -\frac{2(1-z)(-1)}{(1-z)^4} = \frac{2}{(1-z)^3} \\
 f''(z) &= -\frac{2 \cdot 3(1-z)^2(-1)}{(1-z)^6} = \frac{6}{(1-z)^4} \\
 f'''(z) &= -\frac{6 \cdot 4(1-z)^3(-1)}{(1-z)^8} = \frac{24}{(1-z)^5} \\
 &\vdots \\
 f^{(n)}(z) &= \frac{(n+1)!}{(1-z)^{n+2}}
 \end{aligned}$$

, e

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{(1-0)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)n!}{n!} \\
 &= n+1
 \end{aligned}$$

temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$$

4. Conhecendo o desenvolvimento em série de MacLaurin de $f(z) = e^z$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

, podemos deduzir que o desenvolvimento em série de Taylor em torno de $z_0 = 1$ da função $f(z) = (z + 2)e^{2z+1}$ é

$$f(z) = (z + 2)e^{2z+1}$$

$$= (z + 2)e^{2z} e e^{-2} = (z + 2)e^3 e^{2z-2}$$

$$= (z + 2)e^3 e^{2(z-1)}$$

$$= (z + 2)e^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2(z-1))^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3 2^n}{n!} (z + 2)(z - 1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3 2^n}{n!} (z - 1 + 3)(z - 1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3 2^n}{n!} (z - 1)(z - 1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3 2^n}{n!} 3(z - 1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3 2^n}{n!} (z - 1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3e^3 2^n}{n!} (z - 1)^n$$

, $\forall z \in \mathbb{C}$.

5. A função

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

pode ser desenvolvida em séries de Laurent para três diferentes regiões determinadas pelas singularidades.

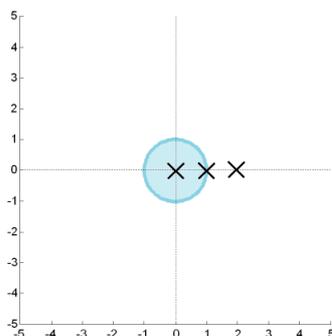


Figura M12.3

1. A primeira região, situada entre as singularidades $z = 0$ e $z = 1$, é um círculo aberto $0 < |z| < 1$. Nesta região podemos fazer

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z} \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \right)$$

$$= \frac{1}{z} \left(-\frac{1}{2-z} + \frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \right)$$

, sendo a primeira série absolutamente convergente para $|z| < 1$, e a segunda para $\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 2$, resulta que o desenvolvimento em série encontrado é convergente em $C : 0 < |z| < 1$. Podemos ainda escrever

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \right) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

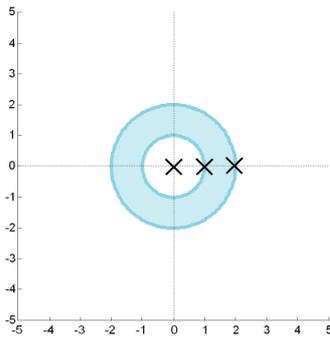


Figura M12.4

2. A segunda região, situada entre as singularidades $z = 1$ e $z = 2$, é uma coroa circular $1 < |z| < 2$. Nesta região podemos fazer

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z} \frac{1}{(z-1)(z-2)} \\ &= \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \right) = \frac{1}{z} \left(-\frac{1}{2-z} - \frac{1}{z-1} \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \right) \end{aligned}$$

, sendo a primeira série absolutamente convergente para $\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 2$, e a segunda para $\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow 1 < |z|$, resulta que o desenvolvimento em série encontrado é convergente em $C : 1 < |z| < 2$. Podemos ainda escrever

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \left(-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2^{n+1}} \right) z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+2}} \end{aligned}$$

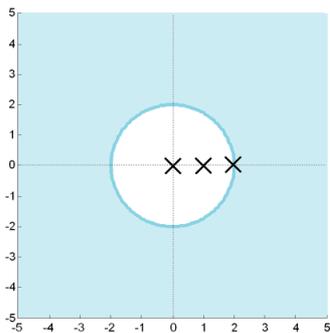


Figura M12.5

3. A terceira região corresponde ao exterior do círculo com fronteira na circunferência que passa em $z = 2$, $|z| > 2$. Nesta região podemos fazer

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z} \frac{1}{(z-1)(z-2)} \\ &= \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \right) = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z} \right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n \right) \end{aligned}$$

, sendo a primeira série absolutamente convergente para $\left| \frac{2}{z} \right| < 1 \Rightarrow 2 < |z|$, e a segunda para $\left| \frac{1}{z} \right| < 1 \Rightarrow 1 < |z|$, resulta que o desenvolvimento em série encontrado é convergente em $C : 2 < |z|$. Podemos ainda escrever

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z} \right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n \right) \\ &= \frac{1}{z^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+2}} \end{aligned}$$