

• Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

• Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

# Módulo 13

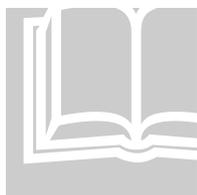
## TÓPICOS

Teoria dos resíduos.

Classificação de singularidades.

Teorema dos resíduos.

Aplicações do teorema dos resíduos



## 6. Teoria dos resíduos.

### 6.1. Classificação de singularidades.

Qualquer ponto em que uma função complexa de variável complexa,  $f(z)$ , não seja analítica é dito uma **singularidade** (ou **ponto singular**) de  $f(z)$ .

Existem vários tipos de singularidades:

1. **Singularidades isoladas.** Um ponto  $z_0 \in \mathbb{C}$  é chamado uma singularidade isolada de  $f(z)$  se for possível definir um círculo em torno de  $z_0$  que não contenha nenhuma outra singularidade para além de  $z_0$ . Caso contrário dizemos que  $z_0$  é uma *singularidade não isolada*.
2. **Pontos de ramificação.** Os ponto de ramificação de funções com mais de um ramo são ponto singulares.

### Exemplos

1. A função

$$f(z) = \sqrt{z-3}$$

tem um ponto de ramificação em  $z = 3$ .

2. A função

$$f(z) = \ln(z^2 + z - 2)$$

tem pontos de ramificação em  $z^2 + z - 2 = 0$ , ou seja, em  $z = -1$  e  $z = -2$ .

3. **Pólos.** Um ponto singular isolado  $z_0$  é dito um **pólo de ordem de ordem  $n$**  de  $f(z)$  sse existe um inteiro positivo  $n$  tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = L, \quad L \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Se  $n = 1$ ,  $z_0$  é dito um **pólo simples**. Se  $z_0$  é um pólo de  $f(z)$  então  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ . Uma função analítica em  $\mathbb{C}$ , excepto num número finito de pólos é dita uma função **meromorfa**.

---

### Exemplos

3. A função

$$f(z) = \frac{3z - 2}{(z - 1)^2(z + 1)(z - 2j)}$$

tem um pólo de ordem 2 em  $z = 1$ , e pólos simples em  $z = -1$  e  $z = 2j$ .  $f(z)$  é uma função meromorfa.

4. **Singularidades removíveis.** Um ponto singular isolado  $z_0$  é dito uma singularidade removível de  $f(z)$  sse

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L, L \in \mathbb{C}.$$

---

### Exemplos

4. A função

$$f(z) = \frac{\text{sen}(z)}{z}$$

tem uma singularidade removível em  $z = 0$ , dado que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(z)}{z} = 1.$$

5. **Singularidades essenciais.** Uma singularidade que não é um pólo, um ponto de ramificação, ou uma singularidade removível, é dita uma singularidade essencial. Se  $z_0$  é uma singularidade essencial de  $f(z)$  não existe  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .

---

### Exemplos

5. A função

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$$

tem uma singularidade essencial em  $z = 2$ .

## 6.2. Classificação de singularidades com base na série de Laurent.

---

Se  $f(z)$  admite desenvolvimento em série de Laurent em torno de um ponto  $z_0$ ,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

, então:

1. **Singularidades removíveis.** Se  $a_n = 0$  para  $n < 0$ ,  $z_0$  é uma singularidade removível de  $f(z)$ , e, reciprocamente, se  $z_0$  é uma singularidade removível de  $f(z)$  então

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

---

### Exemplos

6. A função

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

tem uma singularidade removível em  $z = 0$ .

2. **Pólos.** Se  $a_n = 0$  para  $n < -k$  (e  $a_k \neq 0$ ),  $z_0$  é uma singularidade removível de  $f(z)$ , e, reciprocamente, se  $z_0$  é pólo de  $f(z)$  então

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

---

### Exemplos

7. A função

$$f(z) = \frac{e^{z-2}}{(z-2)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-2)^{n-3}}{n!} = \sum_{n=-3}^{+\infty} \frac{(z-2)^n}{(n+3)!}$$

tem uma pólo de ordem  $k = 3$  em  $z = 0$ .

3. **Singularidades essenciais.** Se um número infinito de termos da parte principal é diferente de zero,  $z_0$  é uma singularidade essencial de  $f(z)$ , e, reciprocamente, se  $z_0$  é uma singularidade essencial de  $f(z)$ , então

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

---

### Exemplos

8. A função

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^0 (-1)^n \frac{z^n}{n!}$$

tem uma singularidade essencial em  $z = 0$  (Um número infinito de termos da parte principal é diferente de zero).

### 6.3. Teorema dos resíduos.

Chama-se **resíduo** da função  $f(z)$  na singularidade isolada  $z_0$  ao coeficiente  $a_{-1}$  do desenvolvimento em série de Laurent  $f(z)$  no ponto  $z_0$

$$a_{-1} = \text{res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C f(z) dz$$

1. **Singularidades removíveis.** Se  $z_0$  é uma singularidade removível de  $f(z)$ , então

$$\text{res}(f, z_0) = 0$$

2. **Polos.** Se  $z_0$  é um pólo de  $f(z)$ , então

$$\text{res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left( (z - z_0)^k f(z) \right)$$

, em particular, se  $z_0$  é um pólo simples

$$\text{res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

3. **Singularidades essenciais.** Se  $z_0$  é uma singularidade essencial de  $f(z)$  o cálculo do resíduo faz-se recorrendo à expressão da série de Laurent de  $f(z)$  (reconhecendo o coeficiente  $a_{-1}$ ).

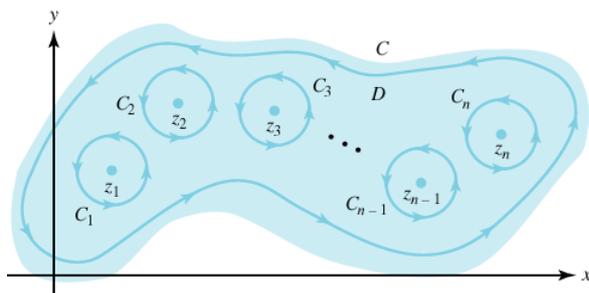


Figura M13.1

*Teorema dos resíduos:* Sendo  $f(z)$  uma função analítica numa região  $D \subset \mathbb{C}$ , excepto num número finito,  $n$ , de singularidades isoladas  $z_i$  e sendo  $C \subset D$  uma curva simples fechada seccionalmente regular contendo todos os pontos  $z_i$  no seu interior, então

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{res}(f, z_i)$$

### Exemplos

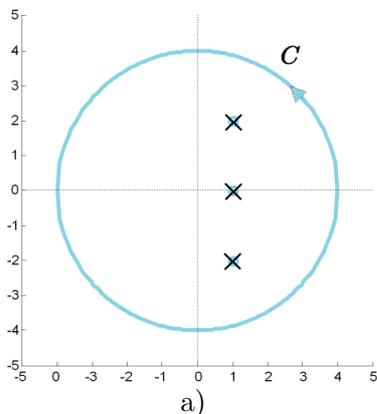


Figura M13.2

9. Calcule

$$\oint_{|z|=4} \frac{z^2}{(z-1)(z^2-2z+5)} dz$$

• (Compare a resolução com a adoptada no exemplo 6 do Módulo 11) O denominador tem zeros em

$$z - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = 1$$

$$(z^2 - 2z + 5) \Rightarrow z_{2,3} = 1 \pm 2i$$

, assim, a função tem 3 pólos, todos eles simples no interior do círculo de raio 4. Tendo em atenção o teorema dos resíduos, temos

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^3 \text{res}(f, z_i)$$

Sendo

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{(z - (1 + 2j))(z - (1 - 2j))} = \frac{1^2}{(1 - 1 - 2j)(1 - 1 + 2j)} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(f, z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1+2j} \frac{z^2}{(z - 1)(z - (1 - 2j))} = \frac{(1 + 2j)^2}{(1 + 2j - 1)(1 + 2j - 1 + 2j)} \\ &= \frac{-3 + 4j}{-8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(f, z_3) &= \lim_{z \rightarrow z_3} (z - z_3)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1-2j} \frac{z^2}{(z - 1)(z - (1 + 2j))} = \frac{(1 - 2j)^2}{(1 - 2j - 1)(1 - 2j - 1 - 2j)} \\ &= \frac{-3 - 4j}{-8}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) dz &= 2\pi j \sum_{i=1}^3 \operatorname{res}(f, z_i) \\ &= 2\pi j \left( \frac{1}{4} + \frac{-3 + 4j}{-8} + \frac{-3 - 4j}{-8} \right) \\ &= 2\pi j \frac{-2 - 3 + 4j - 3 - 4j}{-8} \\ &= 2\pi j\end{aligned}$$

10. Calcule

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2} dz$$

- $f(z)$  tem um pólo duplo,  $k = 2$ , em  $z_1 = -1$ , no interior do círculo de raio 3. Tendo em atenção o teorema dos resíduos, temos

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi j \operatorname{res}(f, z_1)$$

, sendo

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(f, z_1) &= \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left( (z - z_1)^k f(z) \right) \\ &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left( (z + 1)^2 \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} (z^2 - 2z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} (2z - 2) \\ &= -4\end{aligned}$$

resulta

$$\oint_C f(z) dz = -8\pi j$$

## 6.4. Aplicações do teorema dos resíduos.

Nas secções seguintes mostra-se alguns exemplos de aplicação da teoria dos resíduos ao cálculo integral de funções reais de variável real.

Recordemos que, sendo  $f(z)$  uma função complexa de variável complexa definida numa região  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $C \subset D$  uma curva seccionalmente regular e simples, e  $z(t)$  uma parametrização de  $C$  com  $a \leq t \leq b$ , então o integral de  $f(z)$  ao longo da curva  $C$  (e sentido de  $a$  para  $b$ ) é definido por

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

Vamos considerar aqui a aplicação da relação em sentido inverso, isto é, estando interessados no cálculo de um integral definido de uma função real de variável real vamos, *mediante a substituição de variável conveniente*, proceder ao seu cálculo através da avaliação de um integral de linha de uma função complexa de variável complexa

$$\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_C f(z) dz$$

, tendo o cuidado de verificar que  $f(z)$  está nas condições de aplicação da relação.

No estabelecimento da relação procura-se criar condições que permitam relacionar o cálculo do integral de linha em  $C$  com o cálculo de um integral sobre uma linha fechada,  $C_1$ , para que, dentro das condições de aplicação do teorema dos resíduos se tenha

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &\propto \oint_{C_1} f(z) dz \\ &= 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{res}(f, z_i) \end{aligned}$$

, ficando assim estabelecido um modo de expedito de calcular o integral da função real de variável real

$$\int_a^b f(x) dx \propto 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{res}(f, z_i)$$

Como se verá nas secções seguinte, a técnica pode ser utilizada quer para o cálculo de integrais próprios quer impróprios.

## Integrais próprios de funções trigonométricas.

A teoria dos resíduos é convenientemente utilizada na resolução de integrais do tipo

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta$$

, sendo  $f$  uma função racional de  $\cos(\theta)$  e  $\sin(\theta)$ .

Por exemplo, dado o integral

$$\int_0^{2\pi} f(e^{j\theta}) d\theta$$

, sendo

$$\int_0^{2\pi} f(e^{j\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{j\theta})}{je^{j\theta}} je^{j\theta} d\theta$$

, e fazendo a substituição de variável

$$z(\theta) = e^{j\theta} \text{ com } \theta \in [0, 2\pi]$$

, pelo que  $z'(\theta) = je^{j\theta}$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(e^{j\theta}) d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{j\theta})}{je^{j\theta}} je^{j\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z(\theta))}{jz(\theta)} z'(\theta) d\theta \\ &= \oint_{|z|=1} f(z) \frac{1}{jz} dz \end{aligned}$$

, se  $f(z)$  for analítica sobre a circunferência  $|z| = 1$ .

No contexto da substituição de variável  $z = e^{j\theta}$ , é útil reconhecer que resulta

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \frac{z - z^{-1}}{2j} \end{aligned}$$

## Exemplos

11. Dado o integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos(\theta)} d\theta$$

, procedendo à mudança de variável  $z = e^{j\theta}$ , com  $\theta \in [0, 2\pi]$ , pelo que

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \frac{e^{j3\theta} + e^{-j3\theta}}{2} = \frac{z^3 + z^{-3}}{2} \\ \cos(\theta) &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}\end{aligned}$$

, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos(\theta)} d\theta &= \oint_{|z|=1} f(z) \frac{1}{jz} dz \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^3 + z^{-3}}{2}}{5 - 4\frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{1}{jz} dz \\ &= -\frac{1}{2j} \oint_{|z|=1} \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} dz\end{aligned}$$

A função integranda tem um pólo de ordem  $k = 3$  na origem,  $z_1 = 0$ , e pólos simples em  $z_2 = 1/2$  e  $z_3 = 2$ . É portanto analítica para  $|z| = 1$ . Dado que  $z_3 = 2$  está no exterior da região  $|z| < 1$ , temos, atendendo ao teorema dos resíduos,

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^2 \text{res}(f, z_i)$$

Sendo

$$\begin{aligned}\text{res}(f, z_1) &= \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left( (z - z_1)^k f(z) \right) \\ &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{z^6 + 1}{(2z - 1)(z - 2)} \right) = \frac{21}{8} \\ \text{res}(f, z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{z^6 + 1}{z^3(z - 2)} = -\frac{65}{24}\end{aligned}$$

, temos então

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos(\theta)} d\theta &= -\frac{1}{2j} \oint_{|z|=1} \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} dz = -\frac{1}{2j} 2\pi j \sum_{i=1}^2 \text{res}(f, z_i) \\ &= -\pi \left( \frac{21}{8} - \frac{65}{24} \right) \\ &= \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

## Integrais impróprios de funções racionais e trigonométricas.

A teoria dos resíduos é convenientemente utilizada na resolução de integrais do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

, quando  $f(x)$  verifica um conjunto de condições que seguidamente se expõem.

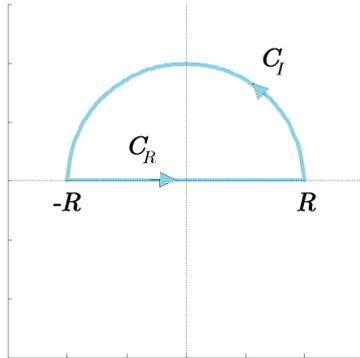


Figura M13.1

Seja  $C = [C_I C_R]$  a linha fechada resultante da concatenação do segmento de recta  $C_R$  com origem em  $(-R,0)$  e extremo em  $(R,0)$ , e a semicircunferência  $C_I$  de centro na origem e raio  $R$ ,  $C_I : z = R e^{j\theta}$  com  $\theta \in [0, \pi]$ , e seja  $f(z)$  uma função complexa de variável complexa resultante da substituição de variável  $x = z$ , na função real de variável real  $f(x)$ , cujo integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

se pretende calcular. Seja ainda que  $f(z)$  não tem singularidades sobre o eixo real e é tal que para  $z \in C_I$  se tem

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$$

, com  $M > 0$  e  $k > 1$ . Então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_C f(z) dz$$

Particularmente:

Sendo  $P(x)$  e  $Q(x)$  polinómios de coeficientes reais de grau  $m$  e  $n$ , respectivamente, com  $Q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

1. Se  $n \geq m + 2$ , então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)}, z_i \right)$$

2. Se  $n \geq m + 1$  e  $\alpha \geq 0$ , então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\alpha x) dx = -2\pi \sum_{i=1}^k \text{Im} \left\{ \text{res} \left( e^{j\alpha z} \frac{P(z)}{Q(z)}, z_i \right) \right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \text{sen}(\alpha x) dx = 2\pi \sum_{i=1}^k \text{Re} \left\{ \text{res} \left( e^{j\alpha z} \frac{P(z)}{Q(z)}, z_i \right) \right\}$$

, sendo  $z_i$  os pólos de  $e^{j\alpha z} P(z)/Q(z)$  situados no semi-plano imaginário superior.

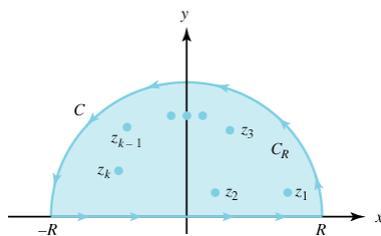


Figura M13.1

## Exemplos

12. Dado o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

,  $Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , e ainda,  $n \geq m + 2$ , então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi j \sum_{i=1}^n \operatorname{res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)}, z_i \right)$$

Os pólos de  $f(z) = P(z)/Q(z)$  são  $z = \pm j$  e  $z = \pm 2j$ . Temos então no semiplano imaginário superior apenas os pólos  $z_1 = j$  e  $z_2 = 2j$ . Calculando os resíduos correspondentes

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f, j) &= \lim_{z \rightarrow j} (z - j)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow j} \frac{1}{(z + j)(z^2 + 4)} \\ &= \frac{1}{(2j)(3)} \\ &= -j \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f, 2j) &= \lim_{z \rightarrow 2j} (z - 2j)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 2j} \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 2j)} \\ &= \frac{1}{(-3)(4j)} \\ &= j \frac{1}{12} \end{aligned}$$

, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx &= 2\pi j \sum_{i=1}^n \operatorname{res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)}, z_i \right) \\ &= 2\pi j \left( -j \frac{1}{6} + j \frac{1}{12} \right) \\ &= 2\pi j \left( -j \frac{1}{12} \right) \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

13. Dado o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{x^2 + 4} dx$$

sendo,  $Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $n \geq m + 1$ , e  $\alpha = 1 \geq 0$  então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(\alpha x) dx = 2\pi \sum_{i=1}^k \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{res} \left( e^{j\alpha x} \frac{P(z)}{Q(z)}, z_i \right) \right\}$$

Os pólos de  $f(z) = e^{j\alpha z} P(z)/Q(z)$  são  $z = \pm 2j$ . Temos então no semi-plano imaginário superior apenas o pólo  $z_2 = 2j$ . Calculando o resíduo correspondente

$$\begin{aligned} \text{res}(f, 2j) &= \lim_{z \rightarrow 2j} (z - 2j)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 2j} \frac{ze^{jz}}{z + 2j} \\ &= \frac{2je^{j(2j)}}{4j} = \frac{2je^{-2}}{4j} \\ &= \frac{1}{2e^2} \end{aligned}$$

, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{x^2 + 4} dx &= 2\pi \sum_{i=1}^k \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{res} \left( e^{j\alpha x} \frac{P(z)}{Q(z)}, z_i \right) \right\} \\ &= 2\pi \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2e^2} \right\} \\ &= \frac{\pi}{e^2} \end{aligned}$$