

- Note bem, a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira

- Chama-se à atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

# Módulo 14

## TÓPICOS

Funções complexas definidas por séries

Série de Taylor.

Série de Laurent.

Teoria dos resíduos.

Teorema dos resíduos.

Aplicações do teorema dos resíduos



## Exercícios.

1. Determine a região de convergência da série

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2n-1}{n!} z^{n-2}$$

- Sendo

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2n-1}{n!} z^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2(n+2)-1}{(n+2)!} z^n$$

, a série tem coeficientes

$$a_n = \frac{2(n+2)-1}{(n+2)!}$$

Pelo que o seu raio de convergência é

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2(n+2)-1}{(n+2)!}}{\frac{2(n+3)-1}{(n+3)!}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2(n+2)-1}{(n+2)!} \frac{(n+3)!}{2(n+3)-1} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+4-1)(n+3)}{2n+6-1} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n^2+9n+9}{2n+5} \right| \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

O raio de convergência é infinito, ou seja, a série é absolutamente convergente para todos os valores de  $z \in \mathbb{C}$ .

2. a) Determine o desenvolvimento em série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)}$$

, em torno da origem. Qual é o raio de convergência da série?

b) Calcule

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz$$

- a) Vamos fazer o desenvolvimento em série de Laurent com base no conhecimento da soma da série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \text{ para } |z| < 1$$

Sendo

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{z^2(z-3)} \\
 &= \frac{1}{-3z^2} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} \\
 &= \frac{1}{-3z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n
 \end{aligned}$$

, para  $0 < |z/3| < 1 \Leftrightarrow 0 < |z| < 3$ . E ainda

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{-3z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \frac{1}{-3z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^{n-2}}{3^{n+1}} \\
 &= \sum_{n=-2}^{\infty} -\frac{1}{3^{n+3}} z^n
 \end{aligned}$$

O raio de convergência é  $R = 3$ , ou seja, igual à distância entre a origem e o pólo mais próximo,  $z = 3$ .

b) Sendo conhecido o desenvolvimento em série de Laurent válido na região que contém o contorno  $|z| = 1$ , o cálculo do integral é imediato. Sendo

$$a_n = -\frac{1}{3^{n+3}}$$

, temos  $a_{-1} = -\frac{1}{3^{-1}+3} = -\frac{1}{9}$ , pelo que, atendendo ao teorema dos resíduos, e dado que  $z = 0$  é o único pólo dentro do contorno

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=1} f(z) dz &= 2\pi j \operatorname{res}(f,0) = 2\pi j a_{-1} \\ &= -j \frac{2\pi}{9}\end{aligned}$$

O mesmo resultado, naturalmente, que resultaria de

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=1} f(z) dz &= 2\pi j \operatorname{res}(f,0) \\ &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z-3} \right) \\ &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{(z-3)^2} \right) \\ &= -j \frac{2\pi}{9}\end{aligned}$$

3. Mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\operatorname{sen}(\theta))^2} d\theta = \frac{5}{32} \pi$$

- Procedendo à mudança de variável  $z = e^{j\theta}$ , com  $\theta \in [0, 2\pi]$ , pelo que

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \frac{z - z^{-1}}{2j}$$

, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\operatorname{sen}(\theta))^2} d\theta &= \oint_{|z|=1} f(z) \frac{1}{jz} dz \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(5-3\frac{z-z^{-1}}{2j}\right)^2} \frac{1}{jz} dz \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{-4}{(10j-3z+3z^{-1})^2} \frac{1}{jz} dz \\ &= -\frac{4}{j} \oint_{|z|=1} \frac{z}{(10zj-3z^2+3)^2} dz \\ &= -\frac{4}{j} \oint_{|z|=1} \frac{z}{(3z^2-10zj-3)^2} dz\end{aligned}$$

Calculando os zeros do denominador

$$\begin{aligned}3z^2 - 10zj - 3 = 0 &\Leftrightarrow z = \frac{10j \pm \sqrt{-100 + 36}}{6} = \frac{10j \pm \sqrt{-64}}{6} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{10j \pm 8j}{6} \\ &\Leftrightarrow z_1 = 3j \wedge z_2 = j \frac{1}{3}\end{aligned}$$

resulta

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 - 3 \operatorname{sen}(\theta))^2} d\theta = -\frac{4}{j} \oint_{|z|=1} \frac{z}{\left(3(z - 3j)\left(z - \frac{j}{3}\right)\right)^2} dz$$

Tendo em atenção que apenas o pólo (duplo)  $z_2 = j/3$  está dentro do círculo unitário, e calculando o resíduo correspondente

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f, j/3) &= \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left( (z - z_2)^k f(z) \right) \\ &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow j/3} \frac{d}{dz} \frac{z}{(3(z - 3j))^2} = \frac{1}{9} \lim_{z \rightarrow j/3} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z - 3j)^2} \\ &= \frac{1}{9} \lim_{z \rightarrow j/3} \frac{(z - 3j) - 2z}{(z - 3j)^3} \\ &= \frac{1}{9} \frac{(j/3 - 3j) - 2j/3}{(j/3 - 3j)^3} = \frac{(j - 9j) - 2j}{(j - 9j)^3} = \frac{-10j}{(-8j)^3} \\ &= -\frac{5}{256} \end{aligned}$$

Resulta

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 - 3 \operatorname{sen}(\theta))^2} d\theta &= 2\pi j \left( -\frac{4}{j} \right) \left( -\frac{5}{256} \right) \\ &= \frac{5}{32} \pi \end{aligned}$$

4. Sendo

$$u(x, y) = \cos(y)e^x$$

- Mostre que  $u(x, y)$  é uma função harmónica em  $\mathbb{R}^2$ .
- Determine  $v(x, y)$  tal que  $f(x, y) = u + jv$  seja uma função analítica e  $f(0, 0) = 1$
- Calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^4}$$

- a) Podemos verificar que a função  $u(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função harmónica (em  $\mathbb{R}^2$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\cos(y)e^x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\cos(y)e^x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\cos(y)e^x) + \frac{\partial}{\partial y} (-\operatorname{sen}(y)e^x) \\ &= (\cos(y)e^x) + (-\cos(y)e^x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Com base nas equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

podemos determinar a sua função harmónica conjugada. Sendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \cos(y)e^x \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = \text{sen}(y)e^x\end{aligned}$$

, resulta

$$\begin{aligned}v &= \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int \cos(y)e^x dy \\ &= \text{sen}(y)e^x + g(x)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}v &= \int \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int \text{sen}(y)e^x dx \\ &= \text{sen}(y)e^x + h(y)\end{aligned}$$

, pelo que

$$v(x, y) = \text{sen}(y)e^x + c$$

logo

$$\begin{aligned}f(x, y) &= u(x, y) + jv(x, y) \\ &= \cos(y)e^x + j(\text{sen}(y)e^x + c)\end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned}f(0,0) &= \cos(0)e^0 + j(\text{sen}(0)e^0 + c) \\ &= 1 + jc\end{aligned}$$

então

$$f(0,0) = 1 \Rightarrow c = 0$$

pelo que

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \cos(y)e^x + j \text{sen}(y)e^x \\ &= e^x (\cos(y) + j \text{sen}(y)) \\ &= e^x e^{jy} \\ &= e^{x+jy}\end{aligned}$$

ou ainda, sendo  $z = x + jy$ ,

$$f(z) = e^z$$

, que é uma função analítica em  $\mathbb{C}$ , ou seja, inteira.

c) O integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^4}$$

É facilmente calculado com base nas relações integrais de Cauchy, ou no teorema dos resíduos. Sendo  $f(z) = e^z$  uma função analítica no interior da circunferência  $|z| = 2$ , e recorrendo às relações integrais de Cauchy

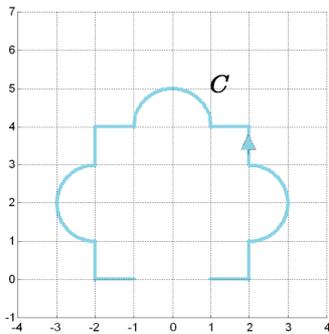
$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(a)$$

temos

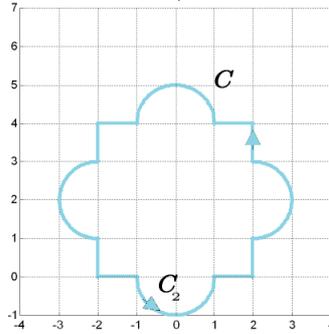
$$\begin{aligned} \oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^4} &= \frac{2\pi j}{3!} \left. \frac{d^3}{dz^3} e^z \right|_{z=1} \\ &= \frac{2\pi j}{6} e^1 \\ &= j \frac{\pi e}{3} \end{aligned}$$

5. Tendo em atenção a figura M14.1 a), calcule

$$\int_C z e^z dz$$



a)



b)

Figura M14.1

- Sendo  $f(z) = z e^z$  uma função analítica em  $\mathbb{C}$ , o integral não depende do percurso, podendo ser aplicado o teorema fundamental do cálculo integral. Consideremos uma qualquer curva simples,  $C_2$ , entre os pontos  $z_1 = -1$  e  $z_2 = 1$ , por exemplo a circunferência  $C_2 : z(\theta) = e^{j\theta}$  com  $-\pi \leq \theta \leq 0$ , de modo a que a concatenação de  $C$  com  $C_2$  constitua uma linha fechada  $C_1 = [C C_2]$ . Sendo  $f(z) = z e^z$  uma função analítica na região interior a  $C_1$ , resulta do teorema de Cauchy

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} z e^z dz &= \int_C z e^z dz + \int_{C_2} z e^z dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

, pelo que

$$\int_C z e^z dz = - \int_{C_2} z e^z dz$$

, ficando assim o cálculo do integral de linha significativamente simplificado.

Um modo mais simples de abordar o problema seria ter em atenção que, sendo  $f(z) = z e^z$  uma função inteira, o integral

$$\int_C z e^z dz$$

não depende do percurso mas apenas dos pontos inicial e final. Atendendo ao teorema fundamental do cálculo integral temos

$$\begin{aligned} \int_C z e^z dz &= \int_1^{-1} z e^z dz \\ &= [z e^z - e^z]_1^{-1} \\ &= -\frac{2}{e} \end{aligned}$$

6. Calcule

$$\oint_{|z|=2} z^2 e^{\frac{1}{z-1}} dz$$

- A função  $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z-1}}$  tem uma singularidade essencial em  $z = 1$ , portanto dentro do círculo de raio 2. Assim sendo, e dado que atendendo ao teorema dos resíduos,

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=2} z^2 e^{\frac{1}{z-1}} dz &= 2\pi j \operatorname{res}(f, 1) \\ &= 2\pi j a_{-1} \end{aligned}$$

, vamos calcular o coeficiente  $a_{-1}$  do desenvolvimento em série de Laurent da função em torno de  $z = 1$ . Sendo

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

, resulta

$$\begin{aligned} z^2 e^{\frac{1}{z-1}} &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z-1}\right)^n}{n!} = (z-1+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n} \\ &= ((z-1)^2 + 1 + 2(z-1)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n} \\ &= (z-1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n} + 2(z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^2}{n!(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(z-1)}{n!(z-1)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^{n-2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!(z-1)^{n-1}} \\ &= \dots + \frac{1}{3!(z-1)} + \dots + \frac{1}{1!(z-1)} + \frac{2}{2!(z-1)} \\ &= \dots + \left(\frac{1}{6} + 1 + 1\right) \frac{1}{(z-1)} + \dots \\ &= \dots + \frac{13}{6} \frac{1}{(z-1)} + \dots \end{aligned}$$

Sendo

$$a_{-1} = \frac{13}{6}$$

resulta

$$\oint_{|z|=2} z^2 e^{\frac{1}{z-1}} dz = 2\pi j a_{-1} = j \frac{13}{3} \pi$$

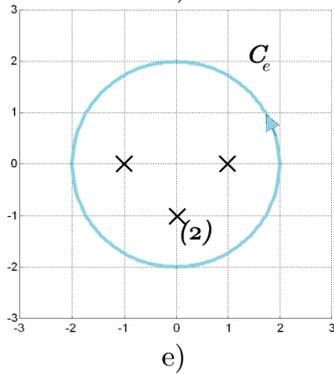
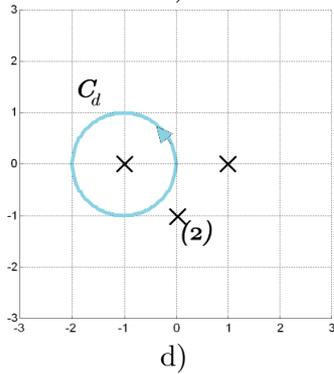
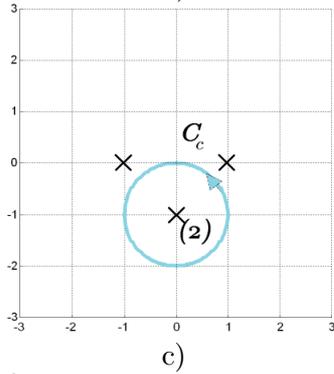
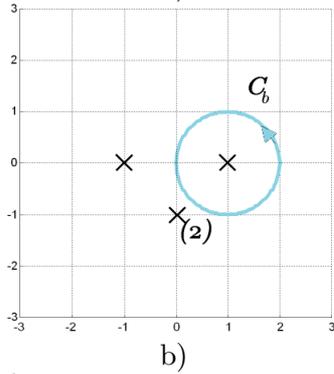
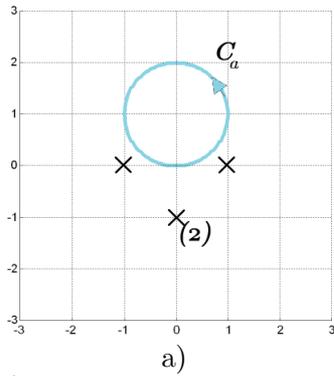


Figura M14.2

7. Sendo

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - 1)(z + j)^2}$$

Calcule

- a)  $\int_{|z-j|=1} f(z) dz$     b)  $\int_{|z-1|=1} f(z) dz$     c)  $\int_{|z+j|=1} f(z) dz$   
 d)  $\int_{|z+1|=1} f(z) dz$     e)  $\int_{|z|=2} f(z) dz$

• Qualquer das alíneas tem uma abordagem idêntica, baseada em considerandos que envolvem o teorema de Cauchy e as relações integrais de Cauchy, ou o teorema dos resíduos. A função

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - 1)(z + j)^2}$$

tem um pólo duplo em  $z_1 = -j$  e pólos simples em  $z_2 = 1$  e  $z_3 = -1$ . Assim

a) Sendo  $f(z)$  uma função analítica no interior do círculo de raio unitário e cento  $(0, j)$  resulta do teorema de Cauchy que

$$\int_{|z-j|=1} f(z) dz = 0$$

b) Dado que no interior do círculo de raio unitário e cento  $(1, 0)$   $f(z)$  tem apenas um pólo,  $z_2 = 1$ , resulta das relações integrais de Cauchy que

$$\begin{aligned} \int_{|z-1|=1} f(z) dz &= \oint_{C_b} \frac{z}{(z+1)(z+j)^2} = \oint_{C_b} \frac{f_b(z)}{(z-1)} \\ &= 2\pi j f_b(z_2) \\ &= 2\pi j \frac{z_2}{(z_2+1)(z_2+j)^2} = 2\pi j \frac{1}{(1+1)(1+j)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ou, alternativamente, com base no teorema dos resíduos

$$\begin{aligned} \int_{|z-1|=1} f(z) dz &= 2\pi j \text{res}(f, z_2) \\ &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) f(z) = 2\pi j \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z_2}{(z_2+1)(z_2+j)^2} \\ &= 2\pi j \frac{1}{(1+1)(1+j)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

c) Dado que no interior do círculo de raio unitário e cento  $(0, -1)$   $f(z)$  tem apenas um pólo (duplo),  $z_1 = -j$ , resulta das relações

integrais de Cauchy que

$$\begin{aligned}
 \int_{|z+j|=1} f(z) dz &= \oint_{C_c} \frac{z}{(z^2-1)(z+j)^2} = \oint_{C_c} \frac{f_c(z)}{(z+j)^2} \\
 &= \frac{2\pi j}{1!} f'_c(z_2) \\
 &= 2\pi j \left. \frac{d}{dz} \frac{z}{(z^2-1)} \right|_{z=-j} = 2\pi j \left. \frac{(z^2-1) - 2z^2}{(z^2-1)^2} \right|_{z=-j} \\
 &= 2\pi j \frac{(-1-1) - 2(-1)}{(-1-1)^2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ou, alternativamente, com base no teorema dos resíduos

$$\begin{aligned}
 \int_{|z+j|=1} f(z) dz &= 2\pi j \operatorname{res}(f, z_1) \\
 &= 2\pi j \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left( (z-z_1)^2 f(z) \right) \\
 &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow -j} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z^2-1)} = 2\pi j \lim_{z \rightarrow -j} \frac{(z^2-1) - 2z^2}{(z^2-1)^2} \\
 &= 2\pi j \frac{(-1-1) - 2(-1)}{(-1-1)^2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

d) Dado que no interior do círculo de raio unitário e centro  $(-1,0)$   $f(z)$  tem apenas um pólo,  $z_3 = -1$ , resulta das relações integrais de Cauchy que

$$\begin{aligned}
 \int_{|z+1|=1} f(z) dz &= \oint_{C_b} \frac{z}{(z-1)(z+j)^2} = \oint_{C_b} \frac{f_d(z)}{(z+1)} \\
 &= 2\pi j f_d(z_3) \\
 &= 2\pi j \frac{z_3}{(z_3-1)(z_3+j)^2} = 2\pi j \frac{-1}{(-1-1)(-1+j)^2} \\
 &= -\frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Ou, alternativamente, com base no teorema dos resíduos

$$\begin{aligned}
 \int_{|z+1|=1} f(z) dz &= 2\pi j \operatorname{res}(f, z_3) \\
 &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow z_3} (z-z_3) f(z) = 2\pi j \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z}{(z-1)(z+j)^2} \\
 &= 2\pi j \frac{-1}{(-1-1)(-1+j)^2} \\
 &= -\frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

e) Tendo em atenção os resultados das alíneas anteriores temos

$$\begin{aligned}
 \int_{|z|=2} f(z) dz &= \oint_{C_e} f(z) dz \\
 &= 2\pi j \sum_{i=1}^3 \text{res}(f, z_i) \\
 &= \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

8. Calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z \text{sen}^2(z) - \text{sen}^2(z)}{z^5} dz$$

- Reescrevendo a expressão de  $f(z)$

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{e^z \text{sen}^2(z) - \text{sen}^2(z)}{z^5} \\
 &= \frac{e^z - 1}{z} \frac{\text{sen}^2(z)}{z^2} \frac{1}{z^2}
 \end{aligned}$$

Evidenciamos que, em  $z = 0$ , a função tem duas singularidades removíveis e um pólo duplo, como podemos verificar recorrendo às respectivas definições

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} &= \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{1} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2(z)}{z^2} &= \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(z)}{z} \frac{\text{sen}(z)}{z} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{e^z \text{sen}^2(z) - \text{sen}^2(z)}{z^5} = 1$$

Dado que o pólo (duplo) está no interior da circunferência  $|z| = 2$ , temos, atendendo ao teorema dos resíduos

$$\begin{aligned}
 \oint_{|z|=2} \frac{e^z \text{sen}^2(z) - \text{sen}^2(z)}{z^5} dz &= 2\pi j \text{res}(f, 0) \\
 &= 2\pi j \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) \\
 &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^z \text{sen}^2(z) - \text{sen}^2(z)}{z^3} \right) \\
 &= j\pi
 \end{aligned}$$

9. Determine o domínio da função

$$f(z) = \frac{z - j}{z^4 + 1}$$

- Calculando as raízes do denominador, lembrando que,

$$z^{1/n} = \rho^{1/n} e^{j(\theta+2k\pi)/n}$$

temos

$$z^4 + 1 = 0$$

$$z^4 = -1$$

$$z = (-1)^{\frac{1}{4}} = (e^{j\pi})^{\frac{1}{4}} = e^{j\frac{\pi+2k\pi}{4}} = e^{j\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}}$$

com  $k = 0, 1, 2, 3$ , resulta

$$z^4 + 1 = \left( z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j) \right) \left( z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j) \right) \left( z - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + j) \right) \left( z - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - j) \right)$$

, pelo que o domínio da função é

$$z \in \mathbb{C} \wedge z \neq \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm j), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm j)$$

10. Calcule

$$\lim_{z \rightarrow j} \frac{z - j}{z^4 + 1}$$

- Temos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow j} \frac{z - j}{z^4 + 1} &= \lim_{z \rightarrow j} \frac{z - j}{(z^2)^2 + 1} \\ &= \frac{j - j}{(-1)^2 + 1} \\ &= \frac{0}{1 + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

11. Calcule

$$\int_C z^3 dz$$

, sendo  $C : y = x \wedge x \in [0, 1]$

- Sendo  $f(z) = z^3$  uma função analítica em  $\mathbb{C}$ , o integral não depende do percurso, podendo ser aplicado o teorema fundamental do cálculo integral. Sendo

$$z_1 = 0 + j0$$

$$z_2 = 1 + j1$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_C z^3 dz &= \int_{z_1}^{z_2} z^3 dz \\
&= \int_0^{1+j} z^3 dz \\
&= \left[ \frac{z^4}{4} \right]_0^{1+j} = \frac{1}{4}(1+j)^4 = \frac{1}{4}(1+j)^2(1+j)^2 \\
&= \frac{1}{4}(1-1+2j)((1-1+2j)) = \frac{1}{4}(-4) \\
&= -1
\end{aligned}$$

12. Calcule

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz$$

, sendo  $f(z) = f(x + jy) = -2x^3 + x^2 + 6xy^2 - y^2 + j(-6x^2y + 2xy + 2y^3 + 1)$

- Vamos verificar as equações de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6x^2 + 2x + 6y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 12xy - 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -12xy + 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -6x^2 + 2x + 6y^2$$

peço que se verificam as equações de Cauchy-Riemann. Sendo todas as derivadas parciais contínuas em  $\mathbb{C}$ ,  $f(z)$  é uma função inteira. Assim sendo, atendendo ao teorema de Cauchy,

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz = 0$$

13. Sendo

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2(z+j)}$$

, calcule

a)  $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz$

b)  $\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} f(z) dz$

c)  $\oint_{|z+j|=\frac{1}{2}} f(z) dz$

- O denominador tem zeros em

$$z - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = 1$$

$$z + j = 0 \Rightarrow z_2 = -j$$

, pelo que  $f(z)$  tem um pólo simples  $z_2 = -j$  em e um pólo duplo em  $z_1 = 1$ . Temos então;

- a) A função não tem singularidades no interior da circunferência  $|z| = 1/2$ , logo

$$\oint_{|z|=1/2} f(z) dz = 0$$

- b) A função tem um pólo duplo,  $z_1 = 1$ , no interior da circunferência  $|z - 1| = 1/2$ , logo

$$\begin{aligned} \oint_{|z-1|=1/2} f(z) dz &= 2\pi j \operatorname{res}(f, z_1) \\ &= 2\pi j \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left( (z - z_1)^2 f(z) \right) \\ &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \frac{e^z}{(z+j)} = 2\pi j \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z(z+j) - e^z}{(z+j)^2} \\ &= 2\pi j \frac{(1+j) - 1}{(1+j)^2} e^1 \\ &= j\pi e \end{aligned}$$

- c) A função tem um pólo,  $z_2 = -j$ , no interior da circunferência  $|z + j| = 1/2$ , logo

$$\begin{aligned} \oint_{|z+j|=1/2} f(z) dz &= 2\pi j \operatorname{res}(f, z_2) \\ &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) f(z) = 2\pi j \lim_{z \rightarrow -j} \frac{e^z}{(z-1)^2} \\ &= 2\pi j \frac{e^{-j}}{(-j-1)^2} \\ &= \frac{\pi}{e^j} \end{aligned}$$

14. Determine o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1-2n}{n+1} \right)^n (z+2)^n$$

- A série tem coeficientes

$$a_n = \left( \frac{1-2n}{n+1} \right)^n$$

, pelo que o seu raio de convergência é

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1-2n}{n+1} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/n-2}{1+1/n} \right|} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Assim sendo, o intervalo de convergência é  $|z+2| < \frac{1}{2}$ .

15. Desenvolva a função  $f(z) = (z + 1)^2 e^z$  em série de potências de  $z + 1$

- Sendo

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Então

$$\begin{aligned} (z + 1)^2 e^z &= (z + 1)^2 e^z e^{-1} \\ &= e^{-1} (z + 1)^2 e^{z+1} \\ &= e^{-1} (z + 1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 1)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{n!} (z + 1)^{n+2} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-1}}{(n - 2)!} (z + 1)^n \end{aligned}$$

16. Seja  $f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z + j)^2}$

a) Determine e classifique as singularidades de  $f(z)$ .

b) Calcule  $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz$

c) Calcule  $\oint_{|z-1|=3} f(z) dz$

- a) Reescrevendo a expressão de  $f(z)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z - 1}{z(z + j)^2} \\ &= \frac{e^z - 1}{z} \frac{1}{(z + j)^2} \end{aligned}$$

Evidenciamos que em  $z = 0$  a função tem uma singularidade removível, e em  $z = -j$  a função tem um pólo duplo, como podemos verificar recorrendo às respectivas definições

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{z \rightarrow -j} (z + j)^2 \frac{e^z - 1}{z(z + j)^2} = \frac{e^{-j} - 1}{-j}$$

b) Dado que a função é analítica no da circunferência  $|z| = 1/2$ , temos

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz = 0$$

c) Dado que o pólo (duplo) está no interior da circunferência  $|z - 1| = 3$ , temos, atendendo ao teorema dos resíduos

$$\begin{aligned} \oint_{|z-1|=3} \frac{e^z - 1}{z(z+j)^2} dz &= 2\pi j \operatorname{res}(f, -j) \\ &= 2\pi j \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow -j} \frac{d}{dz} \left( (z+j)^2 f(z) \right) \\ &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow -j} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^z - 1}{z} \right) \\ &= 2j\pi (je^{-j} + e^{-j} - 1) \end{aligned}$$

17. Seja  $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^5}$

a) Determine a série de Laurent em torno de  $z = 0$ .

b) Calcule  $\oint_{|z|=1} f(z) dz$

- a) Sendo

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

então

$$\begin{aligned} \frac{e^{z^2}}{z^5} &= \frac{1}{z^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{z^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n-5} \end{aligned}$$

b) Sendo

$$\frac{e^{z^2}}{z^5} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n-5} = \dots + \frac{1}{1!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z} + \frac{1}{3!} z + \dots$$

, então

$$a_{-1} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

, pelo que

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{z^2}}{z^5} dz = 2\pi j \operatorname{res}(f, 0) = 2\pi j a_{-1} = j\pi$$

18. Mostre que  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 3\sin^2(\theta)} d\theta = \pi$

- Procedendo à mudança de variável  $z = e^{j\theta}$ , com  $\theta \in [0, 2\pi]$ , pelo que

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \frac{z - z^{-1}}{2j}$$

, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 3\operatorname{sen}^2(\theta)} d\theta &= \oint_{|z|=1} f(z) \frac{1}{jz} dz \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{1 + 3\left(\frac{z - z^{-1}}{2j}\right)^2} \frac{1}{jz} dz \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}(z - z^{-1})^2} \frac{1}{jz} dz \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}(z^2 + z^{-2} - 2)} \frac{1}{jz} dz \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{4}{4 - 3(z^2 + z^{-2} - 2)} \frac{1}{jz} dz \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{4}{-3z^2 - 3z^{-2} + 10} \frac{1}{jz} dz \\ &= \frac{4}{j} \oint_{|z|=1} \frac{z}{-3z^4 + 10z^2 - 3} dz \end{aligned}$$

Calculando os zeros do denominador

$$\begin{aligned} -3z^4 + 10z^2 - 3 = 0 &\Leftrightarrow z^2 = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{-6} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{-6} \\ &\Leftrightarrow z^2 = \frac{-10 \pm 8}{-6} \\ &\Leftrightarrow z^2 = 3 \vee z^2 = \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{3} \vee z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 3\operatorname{sen}^2(\theta)} d\theta &= \frac{4}{j} \oint_{|z|=1} \frac{z}{-3(z + \sqrt{3})(z - \sqrt{3})\left(z + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} dz \\ &= -\frac{4}{3j} \oint_{|z|=1} \frac{z}{(z + \sqrt{3})(z - \sqrt{3})\left(z + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} dz \end{aligned}$$

Tendo em atenção que apenas os pólos  $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$  estão dentro do círculo unitário, e calculando os resíduos correspondentes

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}\left(f, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) &= \lim_{z \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}} \left( \left( z - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) f(z) \right) \\
&= \lim_{z \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{z}{(z + \sqrt{3})(z - \sqrt{3}) \left( z + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left( \frac{\sqrt{3}}{3} + 3 \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{3} - 3 \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left( 4 \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left( -2 \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left( 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \right)} = \frac{1}{-16 \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)} \\
&= -\frac{3}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}\left(f, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) &= \lim_{z \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}} \left( \left( z + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) f(z) \right) \\
&= \lim_{z \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{z}{(z + \sqrt{3})(z - \sqrt{3}) \left( z - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)} \\
&= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left( -\frac{\sqrt{3}}{3} + 3 \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} - 3 \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)} \\
&= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left( 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left( -4 \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left( -2 \frac{\sqrt{3}}{3} \right)} = \frac{-1}{16 \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)} \\
&= -\frac{3}{16}
\end{aligned}$$

Resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 3\operatorname{sen}^2(\theta)} d\theta &= 2\pi j \left( -\frac{4}{3j} \right) \left( \operatorname{res}\left(f, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \operatorname{res}\left(f, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right) \\
&= 2\pi j \left( -\frac{4}{3j} \right) \left( -\frac{3}{16} - \frac{3}{16} \right) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

19. Sendo

$$u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x + y)$$

a) Mostre que  $u(x, y)$  é uma função harmónica em  $\mathbb{R}^2$ .

- b) Determine a função inteira  $f(z)$  cuja parte real é  $u(x, y)$  e cuja parte imaginária é  $v(x, y)$  tal que  $v(0, 0) = 0$
- c) Calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz$$

- a) Sendo

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^3 + y^3 - 3xy(x + y) \\ &= x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2 \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 - 6xy - 3y^2) + \frac{\partial}{\partial y} (3y^2 - 3x^2 - 6xy) \\ &= (6x - 6y) + (6y - 6x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- b) Com base nas equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

podemos determinar a sua função harmónica conjugada. Sendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6xy - 3y^2 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 3x^2 + 6xy \end{aligned}$$

, resulta

$$\begin{aligned} v &= \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int (3x^2 - 6xy - 3y^2) dy \\ &= 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + g(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v &= \int \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int (-3y^2 + 3x^2 + 6xy) dx \\ &= -3xy^2 + x^3 + 3x^2y + h(y) \end{aligned}$$

, pelo que

$$v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + 3x^2y - y^3 + c$$

Sendo

$$v(0, 0) = c$$

então

$$v(0, 0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

pelo que

$$v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + 3x^2y - y^3$$

Logo

$$\begin{aligned} f(z) &= u + jv \\ &= (x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2) + j(x^3 - y^3 + 3x^2y - 3xy^2) \end{aligned}$$

, que é uma função analítica em  $\mathbb{C}$ , dado as derivadas parciais de  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  serem contínuas em  $\mathbb{C}$ .

c) O integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz$$

Pode ser calculado com base no teorema dos resíduos. Dada a existência de um pólo duplo em  $z = 1$ , temos

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^2} &= 2\pi j \operatorname{res} \left( \frac{f(z)}{(z-1)^2}, 1 \right) \\ &= 2\pi j \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left( (z-1)^2 \frac{f(z)}{(z-1)^2} \right) \\ &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} f(z) \end{aligned}$$

Resultando das equações de Cauchy-Riemann que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} f(z) &= \frac{du}{\partial x} - j \frac{du}{\partial y} \\ &= (3x^2 - 6xy - 3y^2) - j(3y^2 - 3x^2 - 6xy) \end{aligned}$$

, então

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} f(z) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} ((3x^2 - 6xy - 3y^2) - j(3y^2 - 3x^2 - 6xy)) \\ &= 3 + 3j \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^2} &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} f(z) \\ &= 2\pi j(3 + j3) \\ &= 6j\pi - 6\pi \end{aligned}$$



## Auto-Avaliação.

Fórmulas integrais de Cauchy	Eq. de Cauchy-Riemann	Derivada complexa
$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi j f(a)$ $\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(a)$	$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$	$f' = u'_x + jv'_x$ $= v'_y - ju'_y$
	Funções harmónicas	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
Série Geométrica	Série de Taylor	
$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z},  z  < 1$	$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n ; a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$	
S. Potências: raio de convergência	Série de Laurent	
$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n }} ; R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left  \frac{a_n}{a_{n+1}} \right $	$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n ; a_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$	
Integral de Linha	Séries de Potências	
$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$	$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} ; \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} ; \sen(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$	
Teorema dos resíduos		
$a_{-1} = \text{res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z-z_0)^k f(z)) ; \oint_C f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{res}(f, z_i)$		
Aplicações T. resíduos		
$\int_0^{2\pi} f(e^{j\theta}) d\theta = \oint_{ z =1} f(z) \frac{1}{jz} dz ; z(\theta) = e^{j\theta} ; \cos(\theta) = \frac{z+z^{-1}}{2} ; \sen(z) = \frac{z-z^{-1}}{2j}$		

1. Calcule

a)  $\oint_{|z|=1/2} \frac{e^z - 1}{z(z+j)^2} dz$  b)  $\oint_{|z-1|=3} \frac{e^z - 1}{z(z+j)^2} dz$  c)  $\oint_{|z|=1} \frac{e^{z^2}}{z^5} dz$  d)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sen^2(\theta)} d\theta$

2. Sendo  $u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x + y)$

a) Mostre que  $u(x, y)$  é uma função harmónica em  $\mathbb{R}^2$ .

b) Determine  $v(x, y)$  tal que  $f(x, y) = u + jv$  seja uma função inteira e  $v(0,0) = 0$

c) Calcule  $\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz$

Soluções 1a) 0 ; 1b)  $2\pi j(je^{-j} + e^{-j} - 1)$ ; 1c)  $j\pi$  ; 1d)  $\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$  ; 2c)  $2\pi j(3 + j3)$