

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

CARLOS LEANDRO

INTRODUÇÃO

A teoria apresentada nestas notas resumem a primeira parte da unidade curricular de ALGA. Muitos dos tópicos apresentados, relativos a aplicações e utilização de ferramentas computacionais, são de leitura opcional.

Como ferramenta computacional escolhemos o Octave: É uma linguagem de alto nível para computação numérica, compatível com o MatLAB. Oferece um interface para resolver problemas lineares e não lineares e é de distribuição livre. O Octave pode ser descarregado em:

<http://octave.sourceforge.com>

1. O QUE TENHO/DEVIA SABER SOBRE SISTEMAS LINEARES

1.1. Sistemas lineares a duas equações e duas variáveis. Equações lineares são a tradução simbólica das relações entre os dados e as incógnitas dum determinado tipo de problemas. Note que, se o enunciado do problema estabelece apenas uma só relação entre dados e incógnitas, obtemos uma única equação - a equação que a traduz. Mas se existem várias relações deste tipo, obteremos várias equações.

Considere, por exemplo:

Problema 1.1. *Calcule dois números que a sua soma é 4, e que a soma dum deles com o triplo do outro é igual a 2.*

O enunciado deste problema estabelece, entre os números pedidos (incógnitas ou variáveis) e os números 4 e 2 (dados ou constantes), duas relações distintas:

(1) relação: «a soma das incógnitas é igual a 4»

(2) relação: «a soma duma das incógnitas com o triplo da outra é igual a 2».

Para definirmos as equações que traduzem aquelas relações, designemos as incógnitas (números pedidos) respectivamente por x e y .

Assim da primeira relação tem-se

$$x + y = 4,$$

da segunda relação resulta

$$x + 3y = 2.$$

Os números pedidos x e y devem por isso verificar simultaneamente para ambas as equações.

Definição: 1.2. *Chama-se sistema de equações a um conjunto de equações que devem ser satisfeitos pelos mesmos valores das incógnitas.*

Assim, as equações

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

admite a solução $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$ visto que $x = 5$ e $y = -1$ verificam ambas as equações do sistema.

Com efeito, substituindo, nas equações do sistema, x por 5 e y por -1 , obtém-se,

$$\begin{cases} 5 + (-1) = 4 \\ 5 + 3(-1) = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 4 = 4 \\ 2 = 2 \end{cases}$$

Da definição resulta que: Toda a solução dum sistema é solução comum das equações que o constituem.

Dois sistemas são equivalentes quando admitem as mesmas soluções. Afirmar que dois sistemas são equivalentes equivale a afirmar que:

- (1) Qualquer solução do primeiro sistema é solução do segundo, reciprocamente,
- (2) Qualquer solução do segundo é também solução do primeiro.

É claro que, se as equações que constituem um sistema são, respectivamente, equivalente às equações que constituem outro, os dois sistemas são equivalentes entre si.

Assim, os sistemas

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ x + 2 = y \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

são equivalentes. Não é, porém, necessário que as equações dum sistema sejam respectivamente equivalentes às de outro para que possa afirmar-se que os dois sistemas são equivalentes.

Definição: 1.3. *Chama-se sistema de duas equações lineares a duas incógnitas a todo o sistema de equações que se pode reduzir à forma (forma canónica):*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Assim

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

é um sistema linear a duas incógnitas, já ser da forma apresentada em 1.3.

O sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + 2y = 1 \\ 1 - \frac{x-y}{4} = x \end{cases}$$

também é um sistema linear a duas incógnitas, visto que se pode reduzir à forma 1.3.

Como todo o sistema linear de duas equações a duas incógnitas pode ser reduzido à forma canónica, conclui-se que a resolução de qualquer sistema linear deste tipo fica dependente da resolução dum sistema na forma canónica.

Como toda a solução dum sistema é solução comum das equações que o constituem o processo natural para resolver um sistema consiste em enumerar as soluções de cada equação e depois calcular as soluções comuns. Porém uma equação com duas incógnitas admite um número infinito de soluções, torna-se impossível calculá-las todas, embora se possam determinar tantas quantas se quiser.

Assim, dada a equação $x + 3y = 15$, para $x = 1$ temos $y = \frac{14}{3}$. A equação é, por isso, satisfeita por $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{14}{3} \end{cases}$. Se porém atribuirmos a x o valor 3, temos $y = 4$,

donde $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{14}{3} \end{cases}$ é outra solução da equação. Como podemos atribuir a x um valor qualquer, conclui-se que a equação admite um número infinito de soluções.

Sendo impossível enumerar o conjunto de soluções de cada equação linear à então que recorrer a outros métodos de resolução de sistemas. Para isso consideremos o sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

Este sistema é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x = 4 - y \\ x + 3y = 2 \end{cases} .$$

Como estamos na presença dum sistema, os valores de x que deve satisfazer a equação 1 são os mesmos que satisfazem a equação 2. Como os valores de x são da forma $4 - y$, podemos substituir, na equação 2, x por $4 - y$. Deste modo obtemos o sistema

$$\begin{cases} x = 4 - y \\ 4 - y + 3y = 2 \end{cases}$$

que tem a vantagem de apesar de ser equivalente ao inicial a equação 2 só tem uma variável - a incógnita y . Diz-se, então, que se eliminou a variável x . Resolvendo esta equação, obtemos:

$$\begin{cases} x = 4 - y \\ y = -1 \end{cases}$$

Substituindo este valor de y na equação 1 resulta:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

O método que acabamos de descrever chama-se **método de substituição**. Aplicado a qualquer sistema de equações lineares transforma-o num sistema equivalente. Onde:

Proposição 1.4 (Primeiro princípio de equivalência de sistemas lineares). *Dado um sistema de equações lineares, se resolvermos uma das equações em ordem a uma das incógnitas e substituirmos o valor dessa incógnita nas restantes equações, o sistema formado pelas equações resultantes é equivalente ao primeiro.*

Na prática para resolver um sistema **por substituição** procede-se do seguinte modo:

- (1) Reduz-se o sistema à forma canónica.
- (2) Resolve-se uma das equações em ordem a uma das incógnitas.
- (3) Substitui-se esse valor da incógnita nas outras equações.
- (4) Resolva-se então uma das outras equações.
- (5) Substitui-se essa solução nas expressões onde a incógnita ocorre.

Consider o sistema definido pelas seguintes equações lineares:

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

Por definição de sistema, estas duas equações devem ser satisfeitas pelos mesmos valores de x e y , valores que constituem a solução do sistema. Para tais valores, a expressão $x + 3y$ toma o valor 7 e a expressão $4x + 2y$ toma o valor 8. Então para os mesmos valores a expressão

$$(x + 3y) + (4x + 2y)$$

toma o valor

$$7 + 8$$

Isto significa que toda a solução do sistema é também da equação

$$(x + 3y) + (4x + 2y) = 7 + 8$$

Esta conclusão é geral donde:

Proposição 1.5 (Segundo princípio de equivalência de sistemas lineares). *Dado um sistema de equações lineares, se substituírmos uma delas pelo que se obtém quando lhe somamos outra, obtém-se um sistema equivalente ao inicial.*

Tratando-se dum sistema a duas equações e considerando o caso particular duma das incógnitas ter, nas duas equações, coeficientes simétricos, a aplicação do princípio anterior transforma o sistema dado noutro sistema em que uma das equações só contém a outra incógnita. Uma das incógnitas é assim eliminada duma das equações, o que permite calcular o valor da outra incógnita.

Seja, com efeito, o sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, as duas equações:

$$\begin{array}{r} 3x - 2y = 6 \\ x + 2y = 2 \\ \hline 4x = 8 \end{array}$$

Então, em virtude do princípio anterior, o sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 4x = 8 \end{cases}$$

é equivalente ao proposto.

Vimos assim que, se nas duas equações figura a mesma incógnita com coeficientes simétricos, o princípio anterior permite eliminar essa incógnita duma equação. Ora como veremos dado um sistema é sempre possível transformá-lo noutro sistema em que uma mesma incógnita figure nas duas equações com coeficientes simétricos. Então, procedendo deste modo podemos eliminar sucessivamente cada incógnita e assim calcular a solução do sistema. Tal é chamado **método da adição ordenada** que a seguir aplicamos à resolução do sistema:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 11 \\ 6x + 5y = 7 \end{cases}$$

Para eliminar a incógnita x , temos de transformar o sistema dado noutro sistema equivalente em que aquela incógnita figure, nas duas equações, com coeficientes simétricos. Esse coeficiente (em valor absoluto) deverá ser um múltiplo comum dos números 6 e 4, por motivos de simplicidade, é o menor múltiplo comum dos coeficientes da incógnita que se pretende eliminar.

Como o $mmc(6, 4) = 12$. Então o sistema deverá ser transformado noutro equivalente em que a incógnita x figura nas duas equações, respectivamente com os coeficientes 12 e -12. Para isso multiplicamos ambos os membros da equação 1 por -3 e ambos os membros da equação 2 por 2. Obtemos assim o sistema

$$\begin{cases} -12x + 9y = 33 \\ 12x + 10y = 14 \end{cases}$$

Adicionando agora membro a membro ambas as equações

$$\begin{array}{r} -12x + 9y = 33 \\ 12x + 10y = 14 \\ \hline 19y = -19 \end{array}$$

donde temos que

$$\begin{cases} -12x + 9y = 33 \\ y = -1 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema inicial.

1.2. Interpretação geométrica do conjunto de soluções. Por forma a termos uma ideia da natureza do conjunto solução dum sistema de equações linear note que:

As soluções duma equação linear a duas incógnitas define uma recta no plano. Assim dado um sistema de equações lineares a duas variáveis

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

o conjunto de pares (x, y) que satisfaz ambas as equações podem ser entendidos como as coordenadas de pontos que pertencem simultaneamente à recta de equação $ax + by = c$ e à recta de equação $a'x + b'y = c'$. Podemos assim dizer que o conjunto de soluções do sistema é o conjunto de pontos que pertence à intersecção das duas rectas. Com base nesta interpretação geométrica existem três tipos de conjuntos solução:

- (1) As duas rectas coincidem, assim o sistema tem um conjunto infinito de soluções, estes sistemas dizem-se **sistemas possíveis e indeterminados**;
- (2) As duas rectas são paralelas e o sistema não tem solução, estes sistemas dizem-se **sistemas impossíveis**;
- (3) As rectas intersectam-se num único ponto, a única solução do sistema, estes sistemas dizem-se **sistemas possíveis e determinados**.

Exemplo 1.6. *No sistema*

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 4x + 4y = 4 \end{cases}$$

As rectas definidas por ambas as equações coincidem, logo o conjunto solução é infinito. No caso de termos o sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

as rectas associadas são paralelas, logo o sistema não tem solução. Enquanto que no caso de se ter o sistema

$$\begin{cases} -12x + 9y = 33 \\ 12x + 10y = 14 \end{cases}$$

as rectas definidas intersectam-se no ponto $(2, -1)$, já que o sistema tem por única solução:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

O que foi feito para sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas pode ser extendido sistemas de equações lineares de qualquer tipo.

Todo o sistema de três equações lineares a três incógnitas é por definição redutível à **forma canónica**:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

A aplicação dos métodos de eliminação (**método de substituição** e método da **adição ordenada**) pressupõe que o sistema está reduzido à forma canónica.

1.3. Resolução pelo método da substituição. Consideremos o sistema reduzido à forma canónica:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - 3y + z = -2 \end{cases}$$

Resolvamos a equação 1 em ordem a x . Obtém-se

$$x = -y + z.$$

Assim, os valores de x nas equações 2 e 3 devem também satisfazer esta igualdade. Logo, substituindo esse valor de x nas equações 1 e 2 obtém-se o sistema

$$\begin{cases} x = -y + z \\ 2(-y + z) - y + z = 3 \\ (-y + z) - 3y + z = -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -y + z \\ -3y + 3z = 3 \\ -4y + 2z = -2 \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} x = -y + z \\ -y + z = -1 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

sistema equivalente ao inicial.

Resolvendo a nova equação 2 em ordem a y e substituindo o valor obtido para y nas restantes equações resulta:

$$\begin{cases} x = -(z - 1) + z \\ y = z - 1 \\ 2(z - 1) - z = 1 \end{cases}$$

e, portanto

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = z - 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Substituindo o valor de z na segunda equação obtemos

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

sistema equivalente ao inicial e portanto solução do sistema.

1.4. Resolução pelo método da adição ordenada. Consideremos o sistema reduzido à forma canónica:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 4y + 3z = 3 \\ x - 3y + z = -2 \end{cases}$$

Eliminemos a incógnita x entre as equações 1 e 2. Para isso, adicionemo-las membro a membro, depois de termos multiplicado a equação 1 por -2.

$$\begin{array}{r} -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 3z = 3 \\ \hline -6y + 5z = 3 \end{array}$$

Podemos ainda eliminar a incógnita x entre a equação 1 e 3. Para isso, adicionemo-las membro a membro, depois de multiplicado a equação 3 por -1.

$$\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ -x + 3y - z = 2 \\ \hline 4y - 2z = 2 \end{array}$$

Temos assim o sistema equivalente ao original,

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -6y + 5z = 3 \\ 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

Como os dois membros da equação 3 são divisíveis por 2, podemos escrever sob a forma mais simples:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -6y + 5z = 3 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

Consideremos este sistema e eliminemos a variável y entre as equações 2 e 3. Para isso, basta adicioná-las membro a membro, depois de termos multiplicado a equação 3 por 3.

$$\begin{array}{r} -6y + 5z = 3 \\ 6y - 3z = 3 \\ \hline 2z = 6 \end{array}$$

Ficamos assim com o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -6y + 5z = 3 \\ z = 3 \end{cases}$$

Eliminando a incógnita z de forma idêntica nas equações 1 e 2 obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -6y = -12 \\ z = 3 \end{cases}$$

O que podemos escrever como

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Eliminando a incógnita x na equação 1 resulta:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Que determina a solução do sistema original.

1.5. Interpretação geométrica do conjunto de soluções. As soluções duma equação linear a três incógnitas definem um plano no espaço tridimensional. Assim se considerarmos o sistema definido por duas equações lineares a três incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Como o conjunto solução de cada uma das equações é um plano, temos duas possibilidades para o conjunto solução do sistema:

- (1) Os dois planos coincidem, ou a sua intersecção é uma linha. Em ambos os casos o sistema tem um conjunto infinito de soluções.
- (2) Os dois planos são paralelos. Neste caso, o sistema não tem soluções.

Note que para este tipo de sistema não tem solução única.

Se considerarmos um sistema definido por três equações a três incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

interpretando as equações como planos o conjunto de soluções do sistema:

- (1) Pode ser vazio, i.e. o sistema pode não ter solução, se os planos forem paralelos;
- (2) Pode ser um conjunto infinito, caso a intersecção dos planos seja uma recta;
- (3) Pode ter uma única solução, caso os planos se intersectem num ponto.

Exercício 1.7. Resolva os seguintes sistemas:

(1)

$$\begin{cases} x = 2 \\ y + x = 1 \\ y + x + z = 2 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 4x + z = 21 \\ 5x - 6z = -10 \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} 4x + y = 6 \\ y - 3z = 10 \\ -3z + 4x = 20 \end{cases}$$

Exercício 1.8. *Resolva:*

(1)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ -x + y - z + w = 3 \\ -2x + y + z - w = 2 \end{cases}$$

2. GENERALIDADES SOBRE MATRIZES

Definição: 2.1. (Matriz) Uma matriz $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$ sobre o conjunto dos números reais \mathbb{R} (ou dos números complexos \mathbb{C}) é um quadro com m linhas e n colunas cujos elementos a_{ij} são números reais (ou complexos) representado genericamente por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde cada a_{ij} na matriz é identificado por dois índices:

- o índice i que designa a linha do elemento e
- o índice j que designa a coluna do elemento.

Para cada i e j , a_{ij} é o elemento de A situado na linha i e coluna j . Tal elemento é também referido como elemento de A na posição (i, j) , ou apenas por elemento (i, j) de A .

É costume usarem-se letras maiúsculas para designar matrizes. Exceptua-se o caso das matrizes-coluna, isto é, matrizes só com uma coluna, para as quais, frequentemente, se utilizam letras minúsculas.

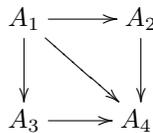
Para representar uma matriz genérica A do tipo $m \times n$, é usual escrever-se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, onde se designa a_{ij} de elemento genérico de A . Iremos apresentar o elemento genérico definido com base na letra minúscula associada à maiúscula que denota a matriz. Quando o tipo for conhecido do contexto ou não for importante na questão que esteja em estudo escreveremos apenas $[a_{ij}]$ para designar A .

Exemplo 2.2. Apresentamos de seguida alguns exemplos de matrizes:

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & i \\ 2i & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×2 onde $a_{31} = 2i$ e $a_{31} = i$.

(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×3 onde $b_{32} = 1$ e $b_{23} = 0$

Exemplo 2.3. Os grafos dirigidos do tipo apresentados abaixo aparecem frequentemente, por exemplo em cronogramas.



Estes grafos podem ser descritos por tabelas de adjacência, onde colocamos o número 1 (ou 0) na linha i e coluna j para indicar que existe uma seta (ou, respectivamente nenhuma) do vértice A_i para o vértice A_j .

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	0	1	1	1
A_2	0	0	1	0
A_3	0	1	0	0
A_4	0	0	0	0

Estas estruturas tem aplicações nas mais diversas áreas da ciência e engenharia. As tabelas de adjacência que descrevem o grafo podem ser codificadas por matrizes.

Assim por exemplo a matriz de adjacência para o grafo apresentado é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para simplificar a apresentação e exemplificar o uso do elemento genérico duma matriz, apresentamos de seguida alguns tipos específicos de matrizes.

Quanto à natureza das suas entradas classificamos as matrizes como *matrizes reais* ou *matrizes complexas*.

Definição: 2.4 (Matriz real). *A matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ é uma matriz real se*

" para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$ o elemento a_{ij} é um número real".

O que pode ser abreviado escrevendo

$$a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j.$$

De forma idêntica definimos:

Definição: 2.5 (Matriz complexa). *A matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ é uma matriz complexa se*

" para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$ o elemento a_{ij} é um número complexo".

O que pode ser abreviado escrevendo

$$a_{ij} \in \mathbb{C}, \forall i, j.$$

Podemos notar que segundo as definições toda a matriz real é uma matriz complexa. Isto porque qualquer número real pode ser identificado com sendo um número complexo. No entanto o recíproco é falso. Neste sentido definimos os seguintes domínios.

Definição: 2.6 (Conjunto das matrizes reais e conjunto de matrizes complexas). *Denotaremos por $\mathbb{R}^{m,n}$ o conjunto das matrizes reais do tipo $m \times n$ definidas em \mathbb{R} . Por $\mathbb{C}^{m,n}$ o conjunto das matrizes complexas do tipo $m \times n$ definidas em \mathbb{C}*

Notemos que na literatura é usual encontrar $\mathbb{R}^{m,n}$ denotado por $\mathcal{M}_{m \times n}[\mathbb{R}]$ ou $\mathbb{R}^{m \times n}$. Naturalmente, $\mathbb{C}^{m,n}$ é denotado por $\mathcal{M}_{m \times n}[\mathbb{C}]$ ou $\mathbb{C}^{m \times n}$.

Quanto ao número de linhas e colunas numa matriz é classificada como sendo quadrada ou rectangular.

Definição: 2.7 (Matriz rectangular). *A matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ é uma **matriz rectangular** se $m \neq n$.*

Definição: 2.8 (Matriz quadrada). *A matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ é uma **matriz quadrada** se $m = n$. Neste caso A diz-se uma matriz quadrada de **ordem** m .*

São exemplos de matrizes rectangulares as matrizes coluna e as matrizes linha.

Definição: 2.9 (Matriz fila). *Uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ é uma **matriz fila** se é formada apenas por uma coluna ou por apenas uma linha.*

- (1) caso $n = 1$, A diz-se uma **matriz coluna**;
- (2) caso $m = 1$, A diz-se uma **matriz linha**.

Definimos ainda:

Definição: 2.10 (Matriz nula). *A **matriz nula** de $m \times n$, A , é uma matriz do tipo $m \times n$ cujos elementos são todos iguais a zero, i.e.*

$$a_{ij} = 0, \forall i, j.$$

Representa-se normalmente a matriz nula A por $0_{m \times n}$, ou simplesmente por 0 se o tipo estiver claro no contexto.

Numa matriz quadrada podemos destacar ainda:

Definição: 2.11 (Elementos principais, diagonal principal e diagonal secundária). Os **elementos principais** da matriz A quadrada de ordem n são $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. A sequência ordenada (ou n -uplo) construído por estes elementos diz-se **diagonal principal** de A . O n -uplo constituído pelos elementos da outra diagonal recebe o nome de **diagonal secundária**.

Assim podemos definir:

Definição: 2.12 (Traço duma matriz). O traço duma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ é a soma dos elementos principais e que usualmente se denota por $tr(A)$. Assim

$$tr(A) = \sum_{i=1}^m a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{mm}$$

Definição: 2.13. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n diz-se:

- (1) **triangular superior**, se $a_{ij} = 0$, para $i > j$;
- (2) **triangular inferior**, se $a_{ij} = 0$, para $i < j$;
- (3) **diagonal**, se $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$;
- (4) **escalar**, se existe um número α tal que $a_{ij} = \alpha$, para $i \neq j$; e
- (5) **matriz identidade**, se $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$, para $i = j$.

Assim, uma matriz A é triangular superior se tem entradas todas nulas abaixo da diagonal. Por exemplo, são matrizes triangulares superiores as matrizes;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{1 \times 1} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

A matriz A é triangular inferior se tem entradas todas nulas acima da diagonal. São exemplos de matrizes deste tipo;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{1 \times 1} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Numa matriz diagonal são zero todas as entradas fora da diagonal principal. Por exemplo são diagonais as matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{1 \times 1} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Como as matrizes diagonais ficam totalmente descritas pelas suas diagonais, denotaremos a matriz diagonal A de ordem n que tem por elementos na diagonal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ por

$$diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Assim os exemplos anteriores podem ser representadas através de:

$$diag(1), diag(1, 0, 1) \text{ e } diag(a, b, c)$$

Uma matriz diagonal diz-se escalar caso todos elementos principais sejam iguais. Por exemplo $diag(1), diag(2, 2, 2)$ e $diag(a, a, a)$ são matrizes escalares, representando respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{1 \times 1} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

3. ÁLGEBRA DE MATRIZES

No conjunto das matrizes reais (ou complexas) definimos um conjunto de operadores.

A manipulação de matrizes exige a definição de uma igualdade de matrizes.

Definição: 3.1 (Igualdade). *Duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ do mesmo tipo são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i e j . Neste caso escrevemos*

$$A = B.$$

Neste sentido podemos dizer que matrizes de tipo diferentes são matrizes distintas.

Exemplo 3.2.

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ se e só se } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \\ w = 2 \end{cases}$$

Definição: 3.3 (Adição de matrizes). *Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes do tipo $m \times n$, $C = [c_{ij}]$ do tipo $m \times n$ diz-se **soma** de A e B se*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j.$$

Neste caso escrevemos

$$C = A + B.$$

Para matrizes A e B de tipo distinto a definição não se pode aplicar, nesse caso dizemos que a operação $A + B$ não está definida.

Exemplo 3.4. *Apresentamos alguns exemplos de adições:*

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ não está definido.}$$

$$(4) \text{diag}(1, 3, 0) + \text{diag}(2, 0, 3) = \text{diag}(3, 3, 3)$$

Definição: 3.5 (Multiplicação por escalar). *Seja $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ uma matriz real (ou complexa). Chama-se **produto** do número $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\alpha \in \mathbb{C}$) pela matriz A à matriz $C = [c_{ij}]$ onde*

$$c_{i,j} = \alpha a_{i,j}, \forall i, j.$$

Neste caso escrevemos

$$C = \alpha A.$$

Exemplo 3.6. *Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Obviamente $2 \cdot \text{diag}(1, 2, 1, 1) = \text{diag}(2, 4, 2, 2)$.*

Podemos assim definir matriz simétrica:

Definição: 3.7 (Matriz simétrica). *A **matriz simétrica** da matriz $A = [a_{i,j}]$ é a matriz $-1 \cdot A$ denotada por $-A$. Assim*

$$-A = [-a_{i,j}].$$

Exercício 3.8. *Considere o conjunto P das matrizes reais quadradas de ordem 2 da forma*

$$\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ a+c & 0 \end{bmatrix} (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

- (1) Mostre se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ são elementos de P .
 (2) Resolva a equação matricial $2B + 3X = -A$ em ordem à matriz real X .

Resposta 3.9. Definamos o conjunto P de forma mais sintética:

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} a-b & b+c \\ a+c & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Assim

- (1) $A \in P$ se e só existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $A = \begin{bmatrix} a-b & b+c \\ a+c & 0 \end{bmatrix}$. Assim determinemos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & b+c \\ a+c & 0 \end{bmatrix}$$

por definição de igualdade de matrizes vem

$$\begin{cases} a-b=0 \\ b+c=1 \\ a+c=1 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-c-1+c=0 \\ b=1-c \\ a=1-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-c \\ a=1-c \end{cases} \quad (\forall c \in \mathbb{R})$$

Como o sistema é possível (i.e. tem pelo menos uma solução) podemos concluir que

$$A \in P.$$

De forma idêntica $B \in P$ se e só existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$B = \begin{bmatrix} a-b & b+c \\ a+c & 0 \end{bmatrix}.$$

Por definição de igualdade de matrizes temos

$$\begin{cases} a-b=0 \\ b+c=3 \\ a+c=4 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-c-3+c=0 \\ b=3-c \\ a=4-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=0 \\ b=3-c \\ a=4-c \end{cases}$$

Como o sistema é impossível (i.e. não tem soluções) podemos concluir que

$$B \notin P.$$

- (2) Como $2B$ é uma matriz do tipo 2×2 , para que a equação matricial $2B + 3X = -A$ tenha sentido a matriz X tem de ser uma matriz quadrada de ordem 2. Determinamos assim $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por definição de adição de matrizes e matriz simétrica temos:

$$\begin{bmatrix} 2+3a & 6+3b \\ 8+3c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde por definição de igualdade de matrizes vem:

$$\begin{cases} 2+3a=0 \\ 6+3b=-1 \\ 8+3c=-1 \\ 3d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{2}{3} \\ b=-\frac{7}{3} \\ c=-3 \\ d=0 \end{cases}$$

Temos assim por resposta ao problema:

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

De forma simples podemos provar:

Teorema 3.10 (Propriedades da adição de matrizes). *Sejam A, B e C matrizes do mesmo tipo temos:*

- (1) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (*associatividade*);
- (2) $A + B = B + A$ (*comutatividade*);
- (3) $A + (-A) = 0$ (*existência de simétrico*).

Para o produto por escalar temos:

Teorema 3.11 (Propriedades da multiplicação de matrizes por escalar). *Sejam A e B matrizes do mesmo tipo temos:*

- (1) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- (2) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- (3) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- (4) $1 \cdot A = A$.

Definição: 3.12 (Subtração de matrizes). *Dadas duas matrizes do mesmo tipo A e B . Definimos $A - B$ como sendo $A + (-B)$.*

Assim a resposta ao problema 3.8 pode ser simplificada. De

$$2B + 3X = -A$$

somando $-2B$ a ambos os membros temos

$$3X = -A - 2B$$

multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{3}$ temos:

$$X = \frac{1}{3}(-A - 2B) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 3.13. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

e determine:

- (1) A matriz X tal que $\frac{1}{2}(X + A) = 3(X + (A - X)) + C$;
- (2) Matrizes X e Y tais que

$$\begin{cases} 2X - Y = A - B \\ X + Y = B - A \end{cases} .$$

4. MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Para as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \\ 1 & c \end{bmatrix}$ o produto $A \times B$ é a matriz C do tipo 3×2 dada através do seguinte esquema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \\ 1 & c \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & \times \\ \times & c_{22} \\ \times & c_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

onde c_{11} é definido pela linha 1 de A e pela coluna 1 de B

$$c_{11} = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 1 = 1,$$

c_{22} é definido pela linha 2 de A e pela coluna 2 de B

$$c_{22} = 0 \times a + 1 \times b + 2 \times c = b + 2a,$$

c_{32} é definido pela linha 3 de A e pela coluna 2 de B

$$c_{32} = \alpha \times a + \beta \times b + \gamma \times c.$$

Neste sentido para $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

done $A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Note que para podermos aplicar o esquema às matrizes A e B o número de colunas de A tem de ser iguais ao número de linhas de B .

Note que, assim definida, a multiplicação não goza da propriedade comutativa.

Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

donde temos $AB \neq BA$

Definição: 4.1. (*Matrizes permutáveis*) Diz-se que duas matrizes A and B são permutáveis, ou comutáveis, se $AB = BA$.

Exercício 4.2. *Determine todas as matrizes reais que comutam com aa matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resposta 4.3. *Seja*

$$P = \{B \in \mathbb{R}^{2,2} : BA = AB\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\}$$

como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é equivalente a

$$\begin{bmatrix} a+b & 3a+b \\ c+d & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3c & b+3d \\ c+d & 3c+d \end{bmatrix}$$

por definição de igualdade de matrizes temos

$$\begin{cases} a+b = a+3c \\ c+d = a+c \\ 3a+b = b+3d \\ 3c+d = b+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3c \\ a = d \end{cases}$$

temos assim, como conjunto das matrizes permutáveis com A

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} : b = 3c \text{ e } a = d \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} d & 3b \\ c & d \end{bmatrix} : d, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercício 4.4. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Efectue, caso seja possível, os produtos indicados:

- a) AB b) BA
- c) $(AB)C$ d) $A(BC)$
- e) CB
- f) DE g) ED
- h) CI_4 i) I_2C

Por forma a podemos demonstrar propriedades para a multiplicação de matrizes apresentamos como definição:

Definição: 4.5. (Multiplicação de matrizes) Seja $A = [a_{ik}]$ do tipo $m \times p$ e $B = [b_{kj}]$ do tipo $p \times n$. Chama-se produto de A por B à matriz $C = [c_{ij}]$ do tipo $m \times n$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots \\ \cdot & \cdots & \boxed{b_{2j}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \boxed{b_{pj}} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Assim podemos demonstrar que o produto de matrizes é associativa já que

$$\sum_{k=1}^p a_{ik} \left(\sum_{v=1}^q (b_{kv}c_{vj}) \right) = \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^q a_{ik}(b_{kv}c_{vj}) = \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^q (a_{ik}b_{kv})c_{vj} = \sum_{v=1}^q \left(\sum_{k=1}^p (a_{ik}b_{kv}) \right) c_{vj}$$

ou seja

$$A(BC) = (AB)C.$$

O produto goza da propriedade distributiva. Se A e B são matrizes do tipo $m \times n$ e C e D do tipo $n \times p$ temos

$$A(B+C) = AB + AC \text{ e } (B+C)A = BA + CA$$

como o produto não é comutativo, $A(B + C)$ e $(B + C)A$ caso estejam definidos podem não ser iguais. Assim

Proposição 4.6. (*Propriedades da multiplicação de matrizes*) *Caso as expressões estejam definidas temos*

- (1) $A0 = 0$ and $0A = 0$
- (2) $(AB)C = A(BC)$
- (3) $A(B + C) = AB + AC$
- (4) $(B + C)A = BA + CA$
- (5) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ para todo o número α
- (6) se A é do tipo $m \times n$

$$A \times I_n = A \text{ e } I_m \times A = A$$

- (7) $AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$
- (8) $(AB = AC \text{ and } A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$

Definição: 4.7 (Potência duma matriz). *Dada uma matriz quadrada A de ordem n e um inteiro positivo k definimos,*

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ termos.}}$$

onde $A^0 = I_n$.

Exemplo 4.8. *Assim temos:*

- (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$
- (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

4.1. Outra forma para definir o produto. É usual e útil expressar uma matriz $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$ na forma

$$A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$$

onde para cada j , A_j denota a coluna de ordem j de A . Isto é, A_j é um vector coluna do tipo $m \times 1$.

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Por exemplo a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

pode ser escrita da forma $A = [A_1, A_2, A_3]$, com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Usando este tipo de decomposição os teoremas abaixo apresentam formas alternativas de expressar as matrizes produto Au e AB .

Teorema 4.9. *Seja $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$ uma matriz do tipo $m \times n$ e u uma matriz coluna*

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Então o produto Au pode ser expresso como

$$Au = x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n.$$

Exemplo 4.10. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{aligned} Au &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 0x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Na sequência do que acabamos de dizer o resultado seguinte apresenta uma definição alternativa à definição de produto de matrizes.

Teorema 4.11. *Seja A uma matriz do tipo $m \times n$, e seja $B = [B_1, B_2, \dots, B_k]$ uma matriz do tipo $n \times k$. Então a coluna de ordem j de AB é igual a AB_j , assim*

$$AB = [AB_1, AB_2, \dots, AB_k].$$

Ilustremos o resultado com um exemplo, seja:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim as colunas de B são

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Donde temos

$$AB_1 = \begin{bmatrix} 26 \\ 16 \\ 9 \end{bmatrix}, AB_2 = \begin{bmatrix} 36 \\ 20 \\ 13 \end{bmatrix}, AB_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } AB_4 = \begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Assim, como $AB = [AB_1, AB_2, \dots, AB_k]$ temos

$$AB = \begin{bmatrix} 26 & 36 & 12 & 20 \\ 16 & 20 & 8 & 12 \\ 9 & 13 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

4.2. Produto de Matrizes e Equações Lineares. Uma das motivações para a definição apresentada para o produto de matrizes é o estudo dos sistemas de equações lineares que apresentaremos na seção 8. Considere o seguinte sistema de equações lineares em quatro incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z + 3w = 9 \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito como uma única equação matricial

$$\begin{bmatrix} 2x + y + z + w \\ x + y + 4z \\ 3y + 2z + 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

A matriz coluna da esquerda pode ser factorizada como um produto de matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Podemos assim transformar o sistema de equações lineares numa equação matricial

$$AX = B \text{ (representação matricial do sistema)}$$

onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ é designada por **matriz dos coeficientes**, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$

é a **matriz das incógnitas** e $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$ a **matriz dos termos independentes**.

É evidente que qualquer sistema de equações lineares pode ser escrito dessa maneira. É pelo que dissemos acima, a matriz coluna X é solução do problema caso:

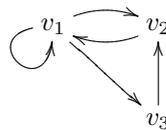
$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Nesta caso dizemos que, a coluna dos termos independentes pode ser escrita como combinação linear das colunas da matriz simples do sistema.

4.3. Grafos dirigidos (opcional). O produto de matrizes surge numa variedade de situações que vão para além do estudo de equações lineares. Por exemplo, pode ser usado para calcular o número de caminhos entre vértices num grafo dirigido.

Um grafo dirigido é definido por um conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ e de arcos orientados ligando pares de vértices. Se um grafo G tem n vértices, definimos matriz de adjacência de G , a $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ tal que $a_{ij} = 1$ se existe um arco do vértice v_i para o vértice v_j e $a_{ij} = 0$ caso não exista. Por exemplo o grafo dirigido abaixo tem

por matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ onde podemos observar que a_{ij} indica o número de arcos que existem no grafo do vértice v_i para o vértice v_j , i.e. 1 ou 0.



Um caminho de comprimento r do vértice v_i para o vértice v_j é uma sequência de r arestas com início no vértice v_i e com fim no vértice v_j . Assim, no grafo a sequência

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3$$

é um caminho de comprimento 4 de v_1 até v_3 . As potências de A determinam o número de tais caminhos.

Theorem 4.12. *Se A é uma matriz de aderência de um grafo dirigido, a_{ij} de A^r é o número de caminhos de comprimento r no grafo, de v_i para v_j .*

Por exemplo, considere a matriz de adjacência A do grafo acima. Então,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O facto de a_{12} de A^2 ser 2, exprime que existem exactamente dois caminhos de comprimento 2 do vértice v_1 para o vértice v_2 . Isto pode ser verificado directamente no grafo: de facto temos por caminhos $v_1 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$ e $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2$. A matriz A^3 não tem entradas nulas, o que permite concluir que podemos ir de qualquer vértice a qualquer outro em exactamente três passos.

Como em

$$I + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 8 \\ 8 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

o elemento $a_{12} = 12$ podemos concluir que existem 12 caminhos de v_1 para v_2 com comprimento menor ou igual 4.

4.4. Inversa duma matriz quadrada.

Definição: 4.13 (Matriz invertível). *Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Dizemos que A é invertível se existir uma matriz X quadrada de ordem n tal que*

$$AX = XA = I_n$$

Proposição 4.14 (Inversa de A). *Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Então existe no máximo uma matriz X quadrada de ordem n tal que $AX = XA = I_n$. (Nestas condições X diz-se a **inversa** de A e representa-se por A^{-1})*

Demonstração. Sejam X e Y matrizes quadradas de ordem n tais que $AX = XA = I_n$ e $AY = YA = I_n$. Então $Y = YI_n = Y(AX) = (YA)X = I_nX = X$. Logo, existe no máximo uma matriz X nas condições referidas. \square

Exemplo 4.15. *A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível, sendo a sua inversa a matriz $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. De facto tem-se*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = I_2 \text{ e } \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Proposição 4.16. *Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n invertíveis. Então AB é invertível e*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Demonstração.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(AB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

De modo análogo,

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

Podemos assim concluir que AB é invertível e a sua inversa é $B^{-1}A^{-1}$. \square

De modo idêntico podemos mostrar que:

Proposição 4.17. *Sejam A uma matrizes quadradas de ordem n invertíveis e α um número não nulo. Então αA é invertível e*

$$(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}.$$

Adiante estudaremos métodos para verificar se uma matriz quadrada é ou não invertível e em caso afirmativo calcular a sua inversa.

Exemplo 4.18. *Note que o sistema*

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

tem por representação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

como, pelo exemplo anterior, sabemos que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ tem como inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e já que:}$$

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow AX = A^{-1}B \end{aligned}$$

temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Assim, o sistema tem por solução:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

De forma idêntica podemos provar que

Proposição 4.19. *Seja A é uma matriz invertível e supondo que os produtos abaixo estão definidos.*

- (1) *Se $A \cdot B = 0$ então $B = 0$.*
- (2) *Se $A \cdot B = A \cdot C$ então $B = C$.*

5. TRANSPOSIÇÃO DE MATRIZES

Definição: 5.1. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz do tipo $m \times n$. Chama-se transposta de A , e representa-se por A^T , à matriz $A^T = [a_{ji}]$ do tipo $n \times m$.

Note que pela definição os elementos da coluna i de A^T são precisamente os da linha i de A , para $i = 1, \dots, m$.

Exemplo 5.2. A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2i+1 & 0 & \alpha \\ 1 & 5 & \text{cis}(\frac{\pi}{2}) & \beta \end{bmatrix}$ é a matriz

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2i+1 & 5 \\ 0 & \text{cis}(\frac{\pi}{2}) \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

Proposição 5.3. A transposição de matrizes goza das seguintes propriedades:

- (1) $(A^T)^T = A$;
- (2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
- (3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
- (4) $(AB)^T = B^T A^T$;
- (5) $(A^k)^T = (A^T)^k$, sendo k um número natural;
- (6) Se A for invertível, A^T também é, tem-se

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Demonstração. As propriedades 1,2,3 e 5 ficam como exercício. Provemos 4 e 6. Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, dos tipos $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente. Então $B^T A^T$ e $(AB)^T$ são do tipo $p \times m$. Sendo b_{ki} e a_{jk} os elementos (i, k) e (k, j) de B^T e A^T , respectivamente, tem-se que o elemento (i, j) de $B^T A^T$ é $\sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}$, que é o elemento (i, j) de $(AB)^T$, para $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, m$. Seja agora A invertível de ordem n . Então, usando a propriedade 4 tem-se

$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = I_n^T = I_n$$

e

$$(A^{-1})^T A^T = (A A^{-1})^T = I_n^T = I_n.$$

Logo $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. □

Exercício 5.4. Sejam A, B e C matrizes quadradas e $X = 2ABA^T - 3C^T B^T C$. Determine todas as matrizes B para as quais $X^T = X$.

Resposta 5.5. Pelas propriedades da transposta temos

$$\begin{aligned} (2ABA^T - 3C^T B^T C)^T &= (2ABA^T)^T + (-3C^T B^T C)^T \\ &= 2(A^T)^T B^T A^T - 3C^T (B^T)^T (C^T)^T \\ &= 2AB^T A^T - 3C^T BC \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} X = X^T &\Leftrightarrow 2ABA^T - 3C^T B^T C = 2AB^T A^T - 3C^T BC \\ &\Leftrightarrow 2ABA^T - 2AB^T A^T = 3C^T B^T C - 3C^T BC \\ &\Leftrightarrow 2A(B - B^T)A^T = 3C^T (B^T - B)C \end{aligned}$$

Assim para que $X = X^T$ qualquer que seja A e C temos de ter $B = B^T$.

Definição: 5.6. Uma matriz quadrada A diz-se:

- (1) **simétrica**, se $A^T = A$,
- (2) **hemi-simétrica** ou **anti-simétrica** se $A^T = -A$.

Por definição uma matriz é simétrica se for quadrada e forem iguais os elementos situados em posições simétricas relativamente à diagonal principal.

Exemplo 5.7. A matriz $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 7 & 3+2i & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é simétrica, mas a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

já o não é, uma vez que os elementos nas posições (4,1) e (1,4) são diferentes.

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz anti-simétrica. Como $A^T = -A$ temos $a_{ji} = -a_{ij}$ para todo i, j . Para os elementos na diagonal da matriz, como temos $i = j$, vem $a_{ii} = -a_{ii}$ donde $a_{ii} = 0$. Assim, se a matriz A é anti-simétrica então $tr(A) = 0$.

Exemplo 5.8. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & -7 & 2 \\ 7 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é hemi-simétrica, mas a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

já o não é, uma vez que os elementos nas posições (4,1) e (1,4) não são simétricas.

Exercício 5.9. Seja A uma matriz quadrada. Mostre que

- (1) $A + A^T$ e AA^T é simétrica,
- (2) $A - A^T$ é hemi-simétrica.

Resposta 5.10. Por definição uma matriz B é simétrica se $B = B^T$. Para $B = A + A^T$ temos

$$B^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T = B.$$

Logo $A + A^T$ é simétrica.

Quando pomos $B = AA^T$ temos

$$B^T = (AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T = B.$$

Logo AA^T é simétrica.

Para $B = A - A^T$ vem

$$B^T = (A - A^T)^T = A^T + (-A^T)^T = A^T - A = -A + A^T = -B.$$

Logo $A - A^T$ é anti-simétrica.

Exercício 5.11. Na equação matricial abaixo A e B são matrizes invertíveis. Explícite a matriz X .

$$A^{-1}X^T B^T = \left((A^T B^{-1})^T \right)^{-1}$$

Resposta 5.12.

$$A^{-1}X^T B^T = \left((A^T B^{-1})^T \right)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AA^{-1}X^T B^T (B^T)^{-1} = A \left((B^{-1})^T (A^T)^T \right)^{-1} (B^T)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X^T = AA^{-1} \left((B^{-1})^T \right)^{-1} (B^T)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X^T = IB^T (B^T)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X^T = I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = I$$

5.1. Produto interno e vectores normais (opcional). O operador transposta pode ser usado para definir produto interno e norma dum vector. Como veremos a norma pode ser empregue na definição do comprimento dum vector.

Ilustremos o pretendido com um exemplo, seja u e v duas matrizes coluna representando vectores de \mathbb{R}^3 dados por:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então u^T é a matriz linha

$$u^T = [1 \quad -3 \quad -2],$$

e $u^T v$ é um escalar (ou uma matriz do tipo 1×1) dado por:

$$u^T v = [1 \quad -3 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 6 + 2 = -3.$$

Mais geralmente, se u e v representam vectores em \mathbb{R}^n ,

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

então

$$u^T v = \sum_{i=1}^n u_i v_i;$$

o que permite definir o produto interno entre u e v como $u^T v$. Note que, $u^T v = v^T u$.

Um dos conceitos básicos associado aos desenvolvimentos computacionais da Álgebra Linear é a noção de norma e comprimento dum vector. Se

$$u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

representa um vector de \mathbb{R}^2 , então u pode ser representado no plano como um segmento orientado \overrightarrow{OP} da origem para o ponto P , de coordenadas (a, b) . Pelo teorema de Pitágoras, o comprimento do segmento orientado é $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Ideia semelhante podemos aplicar em \mathbb{R}^n . Para um vector de \mathbb{R}^n representado pela matriz coluna

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

definimos como comprimento Euclidiano, ou norma Euclidiana de u , que denotamos por $\|u\|$, como sendo

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}.$$

(A grandeza $\|u\|$ representa o comprimento do vector definido por u em \mathbb{R}^n)

Como o produto interno de u por u é

$$u^T u = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2,$$

temos

$$\|u\| = \sqrt{u^T u}.$$

Dados dois vectores de \mathbb{R}^n representados pelas matrizes u e v , definimos como distância euclidiana entre u e v a $\|u - v\|$. Assim a distância entre u e v é dada por

$$\begin{aligned} \|u - v\| &= \sqrt{(u - v)^T(u - v)} \\ &= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2} \end{aligned}$$

Exercício 5.13. *Considere as matrizes:*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ E &= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & F &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ u &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} & v &= \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calcule:

- | | | |
|-------------------|----------------|--------------|
| a) $u^T v$ | b) $v^T F u U$ | c) $v^t D v$ |
| d) $v^T F v$ | e) $u^T u$ | f) $v^T v$ |
| g) $\ u\ $ | h) $\ D v\ $ | i) $\ A u\ $ |
| j) $\ u - v\ $ | l) $\ F u\ $ | m) $\ F v\ $ |
| n) $\ (D - E)u\ $ | | |

6. TRANSCONJUGAÇÃO DE MATRIZES

Recorde que o conjunto dos números complexos é

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

onde i satisfaz $i^2 = -1$. As operações com números complexos na forma $a + bi$ realizam-se tratando-o como um polinómio real em i , usando as propriedades habituais, bem como a igualdade $i^2 = -1$. Assim, por exemplo,

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

e

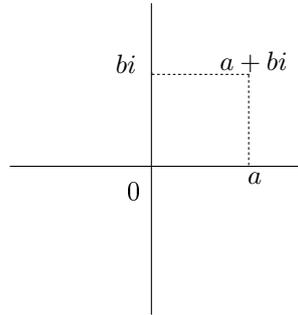
$$(a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Estas operações gozam das mesmas propriedades algébricas que as correspondentes no conjunto dos números reais: comutatividade, associatividade, distributividade da multiplicação relativamente à adição. Os números complexos $0 = 0 + 0i$ e $1 = 1 + 0i$ são elementos neutros para, respectivamente, adição e a multiplicação. O inverso do número complexo $a + bi \neq 0$ é

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i.$$

Note-se que todos os números reais são também números complexos (são aqueles em que $b = 0$).

A melhor maneira de "visualizar"o conjunto \mathbb{C} é pensar nos pontos de um plano, o "plano complexo". Traçando no plano um sistema de sistema de dois eixos perpendiculares, e identificando o número complexo $a + bi$ com o ponto de coordenadas (a, b) , obtém-se uma correspondência entre \mathbb{C} e o conjunto dos pontos no plano.



Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Chamamos a a parte real de z e escrevemos $a = \operatorname{Re}(z)$. Chamamos a b parte imaginária de z e escrevemos $b = \operatorname{Im}(z)$. Se $a = 0$ dizemos que z é um imaginário puro. O conjugado de z é $\bar{z} = a - bi$. O módulo de z é o número real não negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Geometricamente, $|z|$ é a distância do ponto z do plano complexo à origem.

Seja z um número complexo não nulo, identificado com um ponto no plano. À medida do ângulo que a semi-recta que vai da origem para z faz com a parte positiva do eixo real chamamos argumento de z , usualmente denotado por $\operatorname{arg}(z)$. Cada número complexo $z \neq 0$ tem uma infinidade de argumentos, diferindo uns dos outros por um múltiplo de 2π .

Pondo $|z| = \rho$. Seja θ um dos argumentos de z . Então $\operatorname{Re}(z) = \rho \cos(\theta)$ e $\operatorname{Im}(z) = \rho \sin(\theta)$ e podemos escrever

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Esta é a chamada forma polar ou trigonométrica de z , por oposição à forma algébrica $z = a + bi$. Para $\cos \theta + i \sin \theta$ usa-se por vezes a abreviatura $\operatorname{cis}(\theta)$.

Dado o complexo $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$ temos por conjugado $\bar{z} = \rho \operatorname{cis}(-\theta)$. Calculando o produto de dois complexos escritos na forma trigonométrica tem-se

$$(\rho_1 \operatorname{cis}(\rho_1))(\rho_2 \operatorname{cis}(\rho_2)) = \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis}(\rho_1 + \rho_2)$$

A fórmula de Euler, é uma fórmula matemática da área específica da análise complexa, que mostra uma relação entre as funções trigonométricas e a função exponencial. A fórmula é dada por:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta),$$

donde podemos escrever:

$$\rho e^{i\theta} = \rho \operatorname{cis}(\theta).$$

Isto porque muito abreviadamente

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para todo o x . Fazendo x igual a $i\theta$ e tendo em conta que $i^2 = -1$ obtemos

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \theta^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

como

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \theta^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

e

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!}$$

para todo o θ , temos assim

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Assim todo o complexo

$$z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$$

pode ser representado como

$$z = \rho e^{i\theta}$$

neste caso dizemos que ele está representado na **fórmula Euler** ou na **fórmula exponencial**.

Assim pelas propriedades da função exponencial temos:

- (1) Para $z = \rho e^{i\theta}$, $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$
- (2) $\rho_0 \operatorname{cis}(\theta_0) \cdot \rho_1 \operatorname{cis}(\theta_1) = \rho_0 \cdot \rho_1 e^{i(\theta_0 + \theta_1)} = \rho_0 \cdot \rho_1 \operatorname{cis}(\theta_0 + \theta_1)$
- (3) $(\rho \operatorname{cis}(\theta))^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$
- (4) $\frac{\rho_0 \operatorname{cis}(\theta_0)}{\rho_1 \operatorname{cis}(\theta_1)} = \frac{\rho_0}{\rho_1} e^{i(\theta_0 - \theta_1)} = \frac{\rho_0}{\rho_1} \operatorname{cis}(\theta_0 - \theta_1)$

Proposição 6.1. Para todo o complexo z_0 e z_1 temos

- (1) $\overline{z_0 + z_1} = \overline{z_0} + \overline{z_1}$
- (2) $\overline{z_0 \cdot z_1} = \overline{z_0} \cdot \overline{z_1}$

Demonstração. De forma simples podemos provar:

- (1) Caso $z_0 = a + bi$ e $z_1 = c + di$, temos

$$\overline{z_0 + z_1} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z_0} + \overline{z_1}$$

- (2) Caso $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ e $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, temos

$$\overline{z_0 \cdot z_1} = \overline{\rho_0 \rho_1 e^{i(\theta_0 + \theta_1)}} = \rho_0 \rho_1 e^{-i(\theta_0 + \theta_1)} = \rho_0 e^{-i\theta_0} \rho_1 e^{-i\theta_1} = \overline{z_0} \cdot \overline{z_1}$$

□

Definição: 6.2 (Conjugada duma matriz). Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz complexa. Chama-se conjugada de A à matriz $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$, definida conjugando as entradas de A .

Exemplo 6.3. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 + 2i & 2\operatorname{cis}(\pi/6) & 0 \\ 2 & i & 5e^{i\pi/3} \end{bmatrix}$ tem por conjugada a matriz $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 - 2i & 2\operatorname{cis}(-\pi/6) & 0 \\ 2 & -i & 5e^{-i\pi/3} \end{bmatrix}$

Proposição 6.4 (Propriedades da conjugada). Sempre que as expressões estejam definidas temos:

- (1) $\overline{\bar{A}} = A$,
- (2) $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$,
- (3) $\overline{zA} = \bar{z}\bar{A}$ para todo $z \in \mathbb{C}$,
- (4) $\overline{A \cdot B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$, and
- (5) $\overline{A^{-1}} = \bar{A}^{-1}$.

Definição: 6.5 (transconjugada duma matriz). Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz complexa. Chama-se transconjugada de A , e representa-se por A^* , à transposta da conjugada de A . Assim

$$A^* = (\bar{A})^T = \overline{A^T}$$

Exemplo 6.6. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 + 2i & 2\operatorname{cis}(\pi/6) & 0 \\ 2 & i & 5e^{i\pi/3} \end{bmatrix}$ tem por transconjugada $A^* = \begin{bmatrix} 1 - 2i & 2 & 0 \\ 2\operatorname{cis}(-\pi/6) & -i & 5e^{-i\pi/3} \\ 0 & 5e^{-i\pi/3} & 0 \end{bmatrix}$

Proposição 6.7 (Propriedades da transconjugada). *Sempre que as expressões estejam definidas temos:*

- (1) $(A^*)^* = A$,
- (2) $(A + B)^* = A^* + B^*$,
- (3) $(zA)^* = \bar{z}A^*$ para todo $z \in \mathbb{C}$,
- (4) $(A.B)^* = B^*.A^*$, and
- (5) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Exercício 6.8. *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2-i \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

Resolva em ordem a X a seguinte equação matricial complexa:

$$(BA^* - X^T)^* = (X^* + i^{17}B)^T$$

A magnitude ou norma dum matriz complexa u (denotada por $\|u\|$) é definida em termos de u e \bar{u} :

$$\|u\| = \sqrt{\bar{u}^T u} = \sqrt{u^* u}$$

Assim, se $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$ temos

$$u^* u = \bar{u}^T u = |u_1|^2 + |u_2|^2 + \dots + |u_n|^2.$$

7. MATRIZES NO MATLAB E OCTAVE

Nesta secção apresentamos, resumidamente, como se pode usar o MATLAB ou o Octave para criar e transformar matrizes.

Matrizes linha podem ser criadas pelo comando:

```
octave:1> a = [1 2 3]
a=
 1  2  3
```

As matrizes colunas podem ser definidas de forma semelhante, tendo no entanto as componentes separados por "ponto-e-virgula":

```
octave:2> b = [1;2;3]
a=
 1
 2
 3
```

O "operador '"', é usado para calcular o transconjugado duma matriz, enquanto que o "operador '.'", é usado para determinar a transposta duma matriz. Para ilustrar isto determinemos uma matriz complexa, tendo a parte real definida por a e os coeficientes da parte complexa dados por b , à qual aplicamos o transconjugado:

```
octave:3> (a+i*b')'
ans=
 1 - 1i
 2 - 2i
 3 - 3i
```

enquanto

```
octave:4> (a+i*b').'
ans=
 1 + 1i
 2 + 2i
 3 + 3i
```

O comando "length" devolve o número de componentes dum vector:

```
octave:5> length(a)
ans=
 3
```

O "operador .", desempenha um papel importante no Octave: É usada para aplicar a cada componente duma matriz a operação que se segue ao operador ponto. Exemplo:

```
octave:6> a.*a
ans=
 1  4  9
```

O mesmo resultado pode ser obtido se aplicarmos o "operador potência", ^, a todas as entradas da matriz:

```
octave:7> a.^2
ans=
  1  4  9
```

A divisão componente a componente dos elementos de a pelos elementos de b pode ser realizada usando o "operador \ ", juntamente com o "operador .":

```
octave:8> a.\ b'
ans=
  1  1  1
```

Podemos criar uma matriz quadrada de ordem 3 fazendo:

```
octave:9> A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
A=
  1  2  3
  4  5  6
  7  8  9
```

Note que, o "operador ;" é usado para separar as linhas das colunas. Os índices dos elementos duma matriz definem vectores. Podemos obter o elemento (1,2) da matriz A fazendo:

```
octave:10> A(1,2)
ans=
  2
```

Para extrair uma submatriz B definida pelas linhas 1 e 3 e as colunas 1 e 2 da matriz A devemos fazer:

```
octave:11> B = A([1 3], [1 2])
B=
  1  2
  7  8
```

Para trocar as linhas 1 e 3 de A devemos usar o índice das linhas juntamente com o "operador :", que denota o conjunto de índices de colunas existente na matriz:

```
octave:12> C=A([3 2 1], :)
ans=
  7  8  9
  4  5  6
  1  2  3
```

Para substituir uma coluna podemos usar

```
octave:13> A(:,2)=[6 6 6]'
ans=
  1  6  3
  4  6  6
  7  6  9
```

Podemos apagar uma coluna usando a matriz vazia []

```
octave:14> A(:,2)=[]
ans=
  1  3
  4  6
  7  9
```

A segunda coluna de A foi eliminada. Para linha, podemos fazer por exemplo:

```
octave:15> A(2,:)= [6 6 6]
ans=
  1  6  3
  6  6  6
  7  6  9
```

Para inserir uma nova coluna (linha) na matriz A devemos usar a técnica descrita para criar matriz:

```
octave:16> A=[A(:,1) A(:,2) [2 5 8]' A(:,3)]
A=
  1  6  2  3
  6  6  5  6
  7  6  8  9
```

A função "diag" é usada para criar uma matriz cuja diagonal é definida num vector:

```
octave:17> d=[1 2 3 4];
octave:18> D= diag(d)
D=
  1  0  0  0
  0  2  0  0
  0  0  3  0
  0  0  0  4
```

Note que, a utilização de "ponto-e-virgula" no final da linha de comando suprime o output do comando. Para extrair a diagonal da matriz fazemos:

```
octave:20> d= diag(G)
d=
  1
  2
  3
  4
```

Usamos o "operador *" para multiplicar matrizes de tipos compatíveis, por exemplo:

```
octave:21> A*D
ans=
  1 12  6 12
  6 12 15 24
  7 12 24 36
```

Caso um dos operandos do "operador `*`" é um escalar definimos de forma idêntica o produto por escalar:

```
octave:22> C=2*A
C=
  1  12  4  6
 12  12 10 12
 14  12 16 18
```

Ou de modo equivalente, podíamos ter feito `C=A.*2`. Adicionamos matrizes do mesmo tipo fazendo:

```
octave:23> A*D+(-2)*A
ans=
 -1  0  2  6
 -6  0  5 12
 -7  0  8 18
```

Ou de modo equivalente, podíamos ter feito `A*D-2*A`.

7.1. Matrizes especiais no MATLAB ou Octave. O Octave tem um conjunto de matrizes pré-definidas. Podemos criar uma matriz nula de qualquer tipo:

```
octave:1> A=zeros(4)
A=
  0  0  0  0
  0  0  0  0
  0  0  0  0
  0  0  0  0

octave:2> B=zeros(3,4)
B=
  0  0  0  0
  0  0  0  0
  0  0  0  0
```

De forma idêntica podemos criar matrizes de uns:

```
octave:3> C=ones(3);
octave:4> D=ones(3,2);
```

Em muitas aplicações é útil a construção de matrizes aleatórias. Para criar uma matriz de valores aleatórios seguindo uma distribuição normal, de valores entre 0 e 1, basta executar:

```
octave:5> C=rand(3);
octave:6> B=rand(3,2);
```

Obviamente que, para obtermos uma matriz quadrada C de ordem 4 com entradas aleatória de valores compreendidos entre 5 e 15 basta fazer:

```
octave:7> C=10*rand(4).+5;
```

Uma matriz identidade de uma ordem definida é gerada por

```
octave:8> I=eye(4)
I=
 1 0 0 0
 0 1 0 0
 0 0 1 0
 0 0 0 1
```

O Octave torna muito flexível o processo de criação de matrizes. Por exemplo:

```
octave:9> A=zeros(3); B=ones(3); C=eye(3); D=3*ones(3);
octave:10> M=[A B;C D]
M=
 0 0 0 1 1 1
 0 0 0 1 1 1
 0 0 0 1 1 1
 1 0 0 3 3 3
 0 1 0 3 3 3
 0 0 1 3 3 3
```

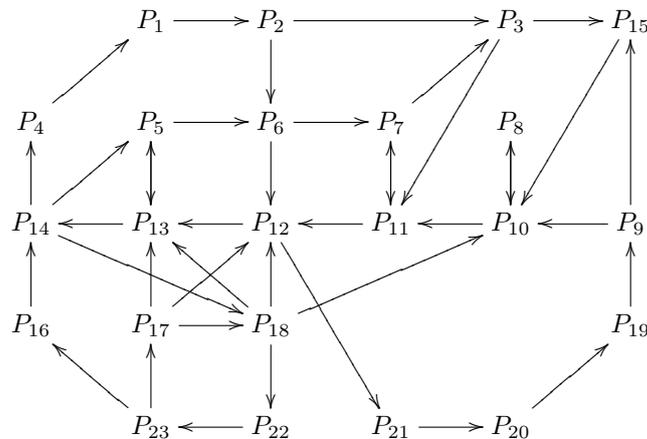
Ou melhor, com:

```
octave:11> x=[1 2 3 4 5]';
octave:12> N=[ones(size(x)) x x.^2 x.^3 x.^4]
octave:12> N=[x.^4 x.^3 x.^2 x ones(size(x)) ]
N=
 1 1 1 1 1
 14 8 4 2 1
 81 27 9 3 1
 256 64 16 4 1
 625 125 25 5 1
```

Temos um matrizes de Vandermonde que descreveremos mais adiante.

Usando o exposto nas últimas duas secções resolva o seguinte exercício:

Exercício 7.1. *O grafo orientado abaixo representa uma rede de transporte rodoviário: os vertices são paragens e as setas ligações rodoviárias.*



Calcule quantos itinerários existem da paragens P_8 para a paragem P_{11} usando pelo menos 8 ligações.

8. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Definição: 8.1 (Equação linear). *Uma equação linear nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n é uma equação do tipo:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

onde a_1, a_2, \dots, a_n e b são números. Um n -tuplo (s_1, s_2, \dots, s_n) é uma solução da, ou satisfaz a equação se substituindo os números s_1, s_2, \dots, s_n pelas variáveis obtivermos uma proposição verdadeira: $a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = b$.

As equações

$$4x - 5y + 2 = x \text{ e } x_2 = 2(\sqrt{6}x_2 - x_1) + x_3$$

são ambas equações lineares já que são equivalentes às equações:

$$3x - 5y = -2 \text{ e } 2x_1 + (1 - 2\sqrt{6})x_2 - x_3 = 0.$$

Note que, sendo equivalentes duas equações têm o mesmo conjunto de soluções.

Definição: 8.2. *Um sistema de equações lineares é uma coleção definida por uma ou mais equações lineares envolvendo as mesmas variáveis.*

Por exemplo

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

é um sistema definido por duas equações lineares a três incógnitas x, y e z .

Um solução dum sistema é um n -tuplo (s_1, s_2, \dots, s_n) de números que é solução de todas as equações que definem o sistema. Por exemplo $(2, -2, 0)$ é uma solução do sistema anterior.

O conjunto de todas as possíveis soluções dum sistema de equações é designado de **conjunto solução**. Dois sistemas dizem-se **equivalentes** se têm o mesmo conjunto solução. Com isto queremos dizer que as soluções do primeiro sistema são soluções do segundo e que todas as soluções do segundo sistema são também solução do primeiro.

Um sistema diz-se **consistente** se tem pelo menos uma solução. Caso o sistema não tenha solução diz-se **inconsistente**.

Tomemos com exemplo o sistema definido no conjunto dos números reais:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

Este é um sistema de 3 equações lineares a 3 variáveis. Uma solução deste sistema é um terno $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ de números reais, que satisfaz simultaneamente as 3 equações. Por exemplo, $x = 2, y = 1, z = 3$ é uma solução sistema. Como

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

pela definição de produto e igualdade de matrizes. Neste sentido o sistema de

equações é equivalente à equação matricial $AX = B$ onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ é

designada matriz dos coeficientes do sistema, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é designada matriz coluna das

variáveis, e $\begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$ é designada matriz coluna das termos independentes do sistema.

Assim $X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ é solução da equação $AX = B$ uma vez que temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Neste caso chamamos a X_0 uma solução particular do sistema de equações lineares $AX = B$.

Formalizando:

Definição: 8.3 (Representação matricial dum sistema). *Um sistema de equações lineares é uma colecção finita de equações lineares (todas nas mesmas incógnitas) consideradas em conjunto. Um sistema*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

tem por solução o n -tuplo (s_1, s_2, \dots, s_n) se ele é uma solução de todas as equações do sistema. O sistema pode representar-se matricialmente pela equação

$$AX = B$$

onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é designada de **matriz simples**, ou **matriz**

dos coeficientes do sistema, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é o **vector coluna das incógnitas** e

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

À matriz

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

obtida ampliando a matriz simples A com mais uma coluna definida pela vector coluna dos termos independentes B . $[A|B]$ é designada **matriz ampliada** ou **matriz complete** do sistema.

Exemplo 8.4. Dado o sistema

$$\begin{cases} x + 3y = -4z + 1 \\ 2x + 3z - 3 = -x \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

como

$$\begin{cases} x + 3y = -4z + 1 \\ 2x + 3z - 3 = -x \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 3z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dizemos que o sistema é representado na forma matricial pela equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Definição: 8.5 (Sistema homogêneo). *Um sistema em que os termos independentes são iguais a zero diz-se homogêneo. Assim um sistema é homogêneo se representa matricialmente na forma $AX = 0$.*

Todo o sistema $AX = B$ escrito na forma matricial define um novo sistema

$$AX = 0$$

designado de **sistema homogêneo associado** (ao sistema original). Ele difere de $AX = B$ apenas nos termos independentes que são todos iguais a zero. As soluções dos dois sistemas são relacionadas através do seguinte teorema.

Theorem 8.6. *Supondo X_p solução particular do sistema de equações lineares $AX = B$.*

- (1) *Se X_h for solução do sistema homogêneo associado $AX = 0$, então $X = X_p + X_h$ é solução de $AX = B$.*
- (2) *Toda a solução do sistema $AX = B$ é da forma $X = X_p + X_h$ para alguma solução X_h*

Demonstração. Assumindo $AX_p = B$

- (1) Se $AX_h = 0$, temos $AX = A(X_p + X_h) = AX_p + AX_h = B + 0 = B$
- (2) Se X for uma solução $AX = B$ e $X_h = X - X_p$. Temos $X = X_p + X_h$, e $AX_h = AX - AX_p = B - B = 0$. Onde, X_h é uma solução do sistema homogêneo associado $AX = 0$.

□

Resolver um sistema de equações consiste na determinação de todas as soluções do sistema. Na sequência vamos apresentar um método que permite resolver qualquer sistema, conhecido por método de Gauss. Este método permite transformar progressivamente um sistema num sistema, mais "simples" de resolver equivalentes ao sistema inicial. Para isso note que dois sistemas se dizem equivalentes se têm o mesmo conjunto de soluções e que:

Proposição 8.7 (Método de Gauss). *Dado um sistema de equações lineares, obtêm-se um sistema equivalente quando se aplica uma das seguintes **operações elementares**:*

- (1) *se troca a ordem das equações;*
- (2) *se multiplicam ambos os membros duma dada equação por um número não nulo;*
- (3) *uma equação é substituída pela que dela se obtém quando se lhe soma outra equação multiplicada por um número não nulo.*

Para facilitar o uso das operações elementares apresentadas no resultado anterior adoptamos a seguinte notação:

Notação	Operação elementar a realizar
$E_i \leftrightarrow E_j$	Troca a equação i com a equação j no sistema.
$E_i = kE_i$	A equação i do novo sistema passa a ser a equação i , do sistema original, multiplicada pelo número, não nulo, k .
$E_i = E_i + kE_j$	A equação i do novo sistema passa a ser a equação i , do sistema original, adicionado termo a termo à equação j multiplicada por k .

A aplicação destas operações vai ser orientada por forma a simplificar o sistema num que seja mais fácil de resolver por substituição. Nesta categoria vamos encontra

sistemas cuja matriz dos coeficientes está em escada. Veja o exemplo: o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ y + 4z = 13 \\ 2z = 6 \end{cases} \text{ tem por matriz ampliada } A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \text{ uma matriz}$$

em escada o que facilita a sua resolução por substituição de "trás-para-frente", fazendo $z = \frac{6}{2} = 3$, donde $y = 13 - 4z = 13 - 12 = 1$ e portanto, $x = 8 - y - z = 8 - 1 - 3 = 4$.

Note que, a solução dum sistema pode ser escrita sobre a forma dum sistema tendo por matriz ampliada uma matriz escalonada reduzida.

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Encontremos todas as soluções para o sistema abaixo, representando simultaneamente o sistema que resultante da aplicação das operações elementares e a sua matriz ampliada:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

Primeiro eliminamos x_1 da equação 2 por meio da sua subtracção de duas vezes a primeira equação à segunda ($E_2 = E_2 - 2E_1$). Podemos também eliminar x_1 da equação 3 por meio da subtracção de primeira equação à terceira ($E_3 = E_3 - E_1$). O resultado é o seguinte sistema.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 6 \\ x_2 - 3x_4 = 3 \end{cases} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right]$$

Este novo sistema é equivalente ao original. Observe que a nova matriz completa pode ser obtida directamente da original se subtrairmos duas vezes a primeira linha à segunda e subtrairmos a primeira linha à terceira.

Note que a segunda equação é múltipla de 3. Para simplificar a aritmética envolvida podemos multiplicar a segunda equação por $1/3$, i.e. fazer $E_2 = 1/3E_2$.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 - 3x_4 = 3 \end{cases} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right]$$

Agora podemos eliminar o x_2 na equação 3 subtraindo a segunda equação à terceira ($E_3 = E_3 - E_2$). Obtemos assim um novo sistema, que é mais simples que o inicial.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

Note que, a matriz ampliada do sistema que obtivemos está em escada.

Podemos assim terminar a resolução do sistema por substituição de "trás-para-frente".

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 = 2x_4 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_4 + 3 + x_4 = -3 \\ x_2 - 2x_4 - 1 - x_4 = 2 \\ x_3 = 2x_4 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -7x_4 - 6 \\ x_2 = 3x_4 + 3 \\ x_3 = 2x_4 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 6x_4 - 6 = -7x_4 - 6 \\ x_2 = 3x_4 + 3 \\ x_3 = 2x_4 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = 3x_4 + 3 \\ x_3 = 2x_4 + 1 \end{cases} \quad \text{Assim, a solução}$$

do sistema determina a seguinte matriz ampliada, que está na forma escalonada reduzida:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

Como foi referido vamos usar a matriz ampliada dum sistema como uma forma abreviada para o representar. Uma vez que as equações são directamente traduzidas em linhas da matriz ampliada, as operações elementares que definimos para equações podem ser vistas como operações definidas sobre as linhas da matriz ampliada. Para isso fixamos a seguinte terminologia:

Definição: 8.8 (Operações elementares). *As seguintes operações, a realizar sobre as linhas duma matriz são designadas de operações elementares:*

- (1) Troca de duas linhas;
- (2) Multiplicação duma linha por um número não nulo;
- (3) Adicionar a uma linha outra eventualmente multiplicada por um escalar.

Representamos estas operações através da seguinte notação:

Notação	Operação elementar sobre linhas
$L_i \leftrightarrow L_j$	Troca a linha i com a linha j .
$L_i = kL_i$	A linha i passa a ser igual à linha i , multiplicada pelo número, não nulo, k .
$L_i = L_i + kLE_j$	A linha i passa a ser igual à linha i , adicionada à linha j multiplicada por k .

Dizemos que duas matrizes; B e C são **equivalentes para linhas** se podemos obter uma matriz da outra usando operações elementares sobre linhas. Neste caso, escrevemos

$$B \sim C$$

Assim se B é a matriz ampliada dum sistema de equações lineares e se $C \sim B$, então C é a matriz ampliada dum sistema equivalente.

Assim, pode resolver um sistema de equações lineares se:

- (1) Determinar a matriz ampliada do sistema B .
- (2) Usar operações elementares sobre as linhas de B por forma a obter um sistema mais simples de resolver por substituição, i.e. tenha a matriz ampliada C em escada.
- (3) Resolver o sistema representado por C por substituição.

Aplicando este procedimento ao sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Começamos por escrever a matriz ampliada do sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

Usando operações elementares sobre as linhas da matriz podemos obter uma matriz em escada:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2=L_2-2L_1 \\ L_3=L_3-L_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right] \longrightarrow \\ & \xrightarrow{L_2=-1/3L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3=L_3+L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

- (1) A primeira matriz não está em escada. Como na primeira linha o primeiro elemento não nulo na primeira colunas, as seguintes linhas devem começar com pelo menos um zeros. Para que isso se verifique podemos fazer $L_2 = L_2 - 2L_1$ e $L_3 = L_3 - L_1$.
- (2) A segunda matriz não está em escada. Como na segunda linha o primeiro elemento não nulo está na segunda coluna, as seguintes linhas devem começar com pelo menos dois zeros. Para que isso se verifique, simplificamos fazendo $L_2 = -1/3L_2$ e condensamos fazendo $L_3 = L_3 + L_2$.
- (3) A matriz obtida está em escada.

Por substituição temos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 + 1 \\ x_2 = 3x_4 - 3 \\ x_3 = 1 - 2x_4 \end{cases}$$

Assim, a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem por solução:

$$X = \begin{bmatrix} -x_4 + 1 \\ 3x_4 - 3 \\ 1 - 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ para todo } x_4 \in \mathbb{R}.$$

8.1. O algoritmo de Gauss. Na sequência definimos o algoritmo de Gauss ou de condensação. Este processo tem início com uma matriz A e tem por resultado uma matriz B na forma escalonada para linhas, equivalente para linhas a A . Se A é a matriz ampliada dum sistema de equações lineares, então B é uma matriz mais simples que A a partir da qual a avaliação da consistência ou inconsistência do sistema correspondente é imediata e facilita a determinação das solução do sistema por substituição.

Algoritmo 8.9 (de Gauss). *Qualquer matriz pode ser transformada numa matriz em escada pelo método:*

- (1) *Se a matriz consiste inteiramente de zeros, o método pára. A matriz já está na forma escalonada.*
- (2) *Por toca de linhas escolher como primeira linha da matriz uma cujo primeira posição não nula vem antes ou na mesma coluna do que o primeiro elemento não nulo de todas as outras.*
- (3) *Caso a matriz obtida não esteja em escada. Usar o primeiro elemento não nulo para anular, através de operações elementares, todas as entradas não nulas que ocorrem nas linhas abaixo na mesma coluna.*
- (4) *Caso a matriz obtida não esteja em escada. Voltar a 2 aplicando o processo às linhas da matriz que seguem a linha usada em 3.*

O algoritmo de Gauss pode ser usado para demonstrar:

Proposição 8.10. *Toda a matriz pode ser transformada numa matriz em escada mediante uma sequência de operações elementares.*

Definição: 8.11. *A característica duma matriz A - abreviadamente $c(A)$ - é o número de pivots que aparecem quando se aplica a A o método de Gauss. De forma equivalente, $c(A)$ é o número de linhas não nulas da matriz em escada produzida pelo método.*

Exemplo 8.12. *Determine a característica da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 11 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -3 & -8 & -11 \\ 0 & -2 & 8 & 1 & 6 & 17 & 21 \end{bmatrix}$$

Aplicando o método de Gauss temos:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 11 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -3 & -8 & -11 \\ 0 & -2 & 8 & 1 & 6 & 17 & 21 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -1 & -3 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & -2 & 8 & 1 & 6 & 17 & 21 \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \xrightarrow{L_1 = L_1 + 2L_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -1 & -3 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 = L_4 + L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -1 & -3 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \xrightarrow{L_3 = \frac{1}{2}L_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -1 & -3 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 = L_4 - 3L_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -1 & -3 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 11 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -3 & -8 & -11 \\ 0 & -2 & 8 & 1 & 6 & 17 & 21 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -1 & -3 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

temos

$$c \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 11 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -3 & -8 & -11 \\ 0 & -2 & 8 & 1 & 6 & 17 & 21 \end{bmatrix} \right) = 4$$

Assim, podemos generalizar e escrever:

Proposição 8.13. *Se $A \sim B$ então $c(A) = c(B)$.*

Definição: 8.14. *Uma matriz quadrada A diz-se **regular** se a característica é igual à sua ordem, caso contrário diz-se **singular**.*

Exemplo 8.15. *Determinemos a característica da matriz real abaixo em função dos valores dos parâmetros α e β .*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha^2 & 1 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando a A o algoritmo de Gauss temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha^2 & 1 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{L_3=L_3-\alpha L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1-2\alpha & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3-(1-2\alpha)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta(2\alpha-1) & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

Donde podemos concluir que $2 \leq c(A) \leq 3$ já que a matriz resultante tem 3 linhas e pelo menos dois pivots. Temos $c(A) \geq 2$ caso as entradas (3,3) ou (3,4) forem diferente de zero. Note que (3,3) é zero se:

$$\beta(2\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \text{ ou } \alpha = \frac{1}{2}.$$

Assim

(1) Para $\beta = 0$ temos

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

(a) Para $\alpha = 1$, $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, donde podemos concluir $c(A) = 2$.

(b) Para $\alpha \neq 1$, $c(A) = 3$.

(2) Para $\beta \neq 0$ temos

(a) Para $\alpha = \frac{1}{2}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, donde $c(A) = 3$.

(b) Para $\alpha \neq \frac{1}{2}$, $c(A) = 3$.

Assim, resumindo,

- (1) $c(A) = 2$, se $\beta = 0$ e $\alpha = 1$;
- (2) $c(A) = 3$, se $\beta = 0$ e $\alpha \neq 1$;
- (3) $c(A) = 3$, se $\beta \neq 0$.

Exemplo 8.16. Classifiquemos, quanto ao número de soluções, os seguintes sistemas de equações:

$$(1) \begin{cases} x + y & = & 2 \\ x + & +z & = & 2 \\ & y + z & = & 2 \\ 2x - y + z & = & 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y + z + w & = & 2 \\ x + 2y + z + w & = & 2 \\ x + & +z & = & 2 \\ 2x - y + 2z + 2w & = & 4 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + y + z & = & 4 \\ 2x + 3y + 4z & = & 13 \\ 3x + 4y + 5z & = & 0 \end{cases}$$

O primeiro sistema tem por representação matricial:

$$\begin{cases} x + y & = & 2 \\ x + & +z & = & 2 \\ & y + z & = & 2 \\ 2x - y + z & = & 2 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_B$$

Usando o algoritmo de Gauss temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ -2 & -1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}}_{[A|B]} \xrightarrow{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_4=L_4-2L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -3 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3=L_3+L_2 \\ L_4=L_4-3L_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4=L_4+L_3} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & \textcircled{-1} & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Assim $c(A) = 3$, $c([A|B]) = 3$ e

$$\begin{cases} x + y & = & 2 \\ -y + z & = & 0 \\ 2z & = & 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & 1 \\ z & = & 1 \end{cases}$$

O sistema $AX = B$ é possível já que tem por solução $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ como a solução

é única o sistema é possível e determinado.

Para o segundo sistema temos

$$\begin{cases} x + y + z + w & = & 2 \\ x + 2y + z + w & = & 2 \\ x + z & = & 2 \\ 2x - y + 2z + 2w & = & 4 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_B$$

Usando o algoritmo de Gauss temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 2 & | & 4 \end{bmatrix}}_{[A|B]} \xrightarrow{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-L_1 \\ L_4=L_4-2L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3=L_3+L_2 \\ L_4=L_4+L_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Assim $c(A) = 2$, $c([A|B]) = 2$ e

$$\begin{cases} x + y + z + w & = & 2 \\ y & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 2 - z - w \\ y & = & 0 \end{cases}, \text{ para todo } z, w \in \mathbb{R}.$$

O sistema $AX = B$ é possível já que tem por solução

$$X = \begin{bmatrix} 2 - z - w \\ 0 \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$, como tem um conjunto infinito de solução o sistema é possível e indeterminado.

No terceiro caso temos,

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 13 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix}}_B$$

Usando o algoritmo de Gauss temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 2 & 3 & 4 & | & 13 \\ 3 & 4 & 5 & | & 0 \end{bmatrix}}_{[A|B]} \xrightarrow{\substack{L_2=L_2-2L_1 \\ L_3=L_3-3L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & | & -12 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{L_3=L_3+L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & | & -6 \end{bmatrix}$$

Assim $c(A) = 2$, $c([A|B]) = 3$ e

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3y + 2z = 11 \\ 0 = -6 \end{cases}$$

Assim, a equação $0 = -6$, torna o sistema $AX = B$ impossível uma vez que não tem solução.

Generalizando, podemos dizer que:

Proposição 8.17. Um sistema $AX = B$, com n variáveis, é possível se e só se

$$c(A) = c([A|B]),$$

tendo a solução expressa através de $n - c(A)$ variáveis independentes.

Assim, se $c(A) \neq c([A|B])$ o sistema é impossível (SI), o sistema é inconsistente não tendo soluções. Já que neste caso existe na matriz em escada, após o processo de Gauss, uma linha do tipo:

$$[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ \alpha]$$

onde $\alpha \neq 0$, representando uma equação impossível do tipo:

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = \alpha \Leftrightarrow 0 = \alpha.$$

Quando o sistema é possível e $c(A)$ é igual ao número de variáveis o sistema é possível e determinado (SPD), tem solução única. Caso o número de variáveis seja maior que $c(A)$ o sistema é possível e indeterminado (SPI), tem um conjunto infinito de soluções.

Definição: 8.18. Seja $AX = B$ um sistema possível e indeterminado, definimos como grau de indeterminação do sistema a :

$$g = n - c(A).$$

Assim, g determina o número de variáveis independentes usadas na definição das soluções do sistema.

Exemplo 8.19. Classifiquemos quanto ao número de soluções, o seguinte sistema de equações, em função dos parâmetros reais a e b :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + ay + z = b \\ 3x + y + 2z = b \end{cases}$$

Condensando a matriz ampliada do sistema, usando o algoritmo de Gauss, temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 1 & a & 1 & | & b \\ 3 & 1 & 2 & | & b \end{bmatrix}}_{[A|B]} \xrightarrow{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3+3L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & a-1 & 0 & | & b-2 \\ 0 & -2 & -1 & | & b-6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -2 & -1 & | & b-6 \\ 0 & a-1 & 0 & | & b-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3=2L_3+(a-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -2 & -1 & | & b-6 \\ 0 & 0 & 1-a & | & 2b-4+(a-1)(b-6) \end{bmatrix}$$

Para classificar o sistema quanto ao número de soluções devemos comparar as características da matriz simples e da matriz completa. Note que $2 \leq c(A) \leq 3$. Temos $c(A) = 2$ se $1-a=0$, i.e. se $a=1$. Assim

(1) Para $a=1$ vem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -2 & -1 & | & b-6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2b-4 \end{bmatrix}$$

temos que:

(a) Para $b=2$,

$$[A|B] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -2 & -1 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

temos que $c(A) = c([A|B]) = 2$, logo o sistema é possível. Uma vez que $c(A)$ é menor que o número de incógnitas o sistema é possível e indeterminado 3. O grau de indeterminação é $g = 3 - c(A) = 1$, ou seja o sistema é simplesmente indeterminado.

(b) Para $b \neq 2$ temos $c([A|B]) = 3 \neq 2 = c(A)$, logo o sistema é impossível.

(2) Para $a \neq 1$, temos então $c(A) = 3$. Como $c(A) \leq c([A|B]) \leq 3$, vem que $c([A|B]) = 3$, logo o sistema é possível e determinado.

Resumindo

- se $a=1$ e $b=2$, o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $g=1$;
- se $a=1$ e $b \neq 2$, o sistema é impossível;
- se $a \neq 1$, o sistema é possível e determinado.

Exemplo 8.20. Classifiquemos quanto ao número de soluções, o seguinte sistema de equações, em função do parâmetro real a :

$$\begin{cases} (a^2+1)x + y + (a+3)z = a^2 \\ 2x + y + az = 1-3z \\ (a^2+5)x + 3y + (2a+11-a^2)z = 3 \end{cases}$$

Condensando a matriz ampliada do sistema, usando o algoritmo de Gauss, temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a^2+1 & 1 & a+3 & | & a^2 \\ 2 & 1 & a+3 & | & 1 \\ a^2+5 & 3 & 2a+11-a^2 & | & 3 \end{bmatrix}}_{[A|B]} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{bmatrix} 1 & a^2+1 & a+3 & | & a^2 \\ 1 & 2 & a+3 & | & 1 \\ 3 & a^2+5 & 2a+11-a^2 & | & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-3L_1}} \begin{bmatrix} 1 & a^2+1 & a+3 & | & a^2 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & | & 1-a^2 \\ 0 & 2-2a^2 & -a^2-a+2 & | & 3-3a^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3=2L_3-(a-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & a^2+1 & a+3 & | & a^2 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & | & 1-a^2 \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 & | & 1-a^2 \end{bmatrix}$$

Para que $c(A) = 3$ as posições $(2,2)$ e $(3,3)$ não podem ser nulas. Como, $1 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ ou $a = -1$, e $-a^2 - a + 2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow a = -2$ ou $a = 1$, analisemos a $c(A)$ quando $a = -2$, $a = -1$, $a = 1$ e $a \notin \{-2, -1, 1\}$:

(1) Para $a = -2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

Como $c(A) = 2 \neq 3 = c([A|B])$ o sistema é impossível.

(2) Para $a = -1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

como $c(A) = 2 = c([A|B]) < 3 = n$. variáveis, o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $g = 1$.

(3) Para $a = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

como $c(A) = 1 = c([A|B]) < 3 = n$. variáveis, o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $g = 2$.

(4) Para $a \notin \{-2, -1, 1\}$, $c(A) = c([A|B]) = 3$ logo o sistema é possível e determinado.

Resumindo

- se $a = -2$, o sistema é impossível;
- se $a = -1$, o sistema possível indeterminado com grau de indeterminação $g = 1$;
- se $a = 1$, o sistema possível indeterminado com grau de indeterminação $g = 2$;
- se $a \notin \{-2, -1, 1\}$, o sistema é possível e determinado.

8.2. Forma escalonada reduzida. O resultado que se segue garante que toda a matriz pode ser transformada numa matriz escalonada reduzida.

Proposição 8.21. *Seja C uma matriz. Existe uma única matriz D tal que:*

- (1) D está na forma escalonada reduzida e
- (2) $C \sim D$

Supondo C uma matriz completa dum sistema de equações lineares. Uma consequência deste teorema é que podemos sempre transformar C numa matriz escalonada reduzida D por operações elementares sobre linhas. Então, porque D está na forma escalonada reduzida é trivial de resolver.

O procedimento seguinte garante que qualquer matriz C possa ser transformada numa matriz D escalonada reduzida:

- (1) Usar o método de Gauss para transformar C numa matriz em escada C' ;
- (2) Transformar cada pivots α de C' em 1 mediante a multiplicação da linha do pivot por α^{-1} . Assim este passo define uma matriz C'' onde todos os pivots são 1;
- (3) Usar, de modo ascendente, os pivots de C'' para anular as posições que o antecedem na mesma coluna.

Podemos exemplificar isso com o sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Aplicando o método de Gauss já tivemos visto que:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

podemos naturalmente usar os pivots para anular as entradas que os antecedem nas colunas,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{L_2=L_2+L_3 \\ L_1=L_1-3L_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \\ & \xrightarrow{L_1=L_1+2L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \end{aligned}$$

Assim, o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_4 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

é equivalente ao inicial, tendo por solução:

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = 3x_4 + 3 \\ x_3 = 2x_4 + 1 \end{cases}$$

8.3. Resolução de sistemas no MATLAB ou Octave.

Exemplo 8.22 (Sistema possível e determinado). *Consider o sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + -2z = 4 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

que tem por matriz ampliada

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]}_{[A|B]}$$

Podemos introduzir esta matriz no Octave através do comando:

```
octave:1> A=[1 1 1 6; 1 0 -2 4; 0 1 1 2]
A=
  1  1  1  6
  1  0 -2  4
  0  1  1  2
```

O comando "rref" do Octave permite reduzir uma matriz à forma escalonada reduzida.

```
octave:1> R=rref(A)
R=
  1  0  0  4
  0  1  0  2
  0  0  1  0
```

Assim temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Donde podemos concluir que $c(A) = c([A|B]) = 3$. Como o sistema tem 3 incógnitas o sistema é possível e determinado. O sistema original tem por solução:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Assim, geometricamente, os três planos que definem o sistema intersectam-se no ponto de coordenadas (4, 2, 0).

Exemplo 8.23 (Sistema impossível). Consideremos agora o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + -2z = 4 \\ 2x + y - z = 18 \end{cases}$$

que tem por matriz ampliada

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 18 \end{array} \right]}_{[A|B]}$$

Que podemos reduzir à forma escalonada reduzida através de:

octave:1 > A=[1 1 1 6; 1 0 -2 4; 2 1 -1 18];

octave:1 > R=rref(A)

R=

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Donde podemos concluir que $c(A) = 2$ e $c([A|B]) = 3$. Assim o sistema é impossível. Ao seja, os três planos que definem o sistema não se intersectam.

Exemplo 8.24 (Sistema possível e indeterminado). Consider o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + -2z = 4 \\ 2x + y - z = 10 \end{cases}$$

que tem por matriz ampliada

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 10 \end{array} \right]}_{[A|B]}$$

Que podemos reduzir à forma escalonada reduzida através de:

octave:1 > A=[1 1 1 6; 1 0 -2 4; 2 1 -1 10];

octave:1 > R=rref(A)

R=

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Donde podemos concluir que $c(A) = c([A|B]) = 2$, logo o sistema é possível. É possível indeterminado porque o número de variáveis é superior a $c(A)$. O sistema tem por grau de indeterminação $g = 3 - c(A) = 1$. Ou seja, o conjunto de pontos da intersecção dos planos que definem o sistema formam uma recta.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 10 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim o sistema original é equivalente a:

$$\begin{cases} x + -2z = 4 \\ y + 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2z \\ y = 2 - 3z \end{cases}$$

Exemplo 8.25. Consider o sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}}_B$$

A matriz ampliada do sistema podemos ser reduzir à forma escalonada reduzida através de:

octave:1> A=[-4 -2 0 2 4 4; 4 1 0 -3 4 -4; 1 -2 0 -3 1 -1; 0 -2 0 -2 0 0];

octave:2> B=[2 -3 -3 -2]';

octave:3> R=rref([A B])

R=

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde podemos concluir que $c(A) = c([A|B]) = 3$, logo o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $g = 6 - c(A) = 3$. Temos então:

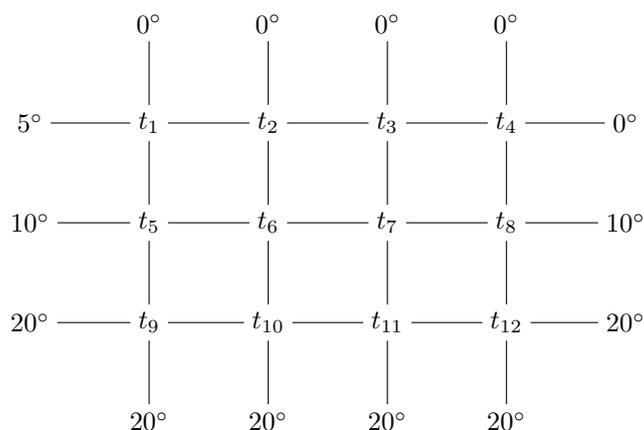
$$\begin{cases} a - d - f = -1 \\ b + d = 1 \\ e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d + f - 1 \\ b = 1 - d \\ e = 0 \end{cases}, \text{ para todo } c, d, f \in \mathbb{R}.$$

Lodo, o sistema $AX = B$ tem por solução:

$$X = \underbrace{\begin{bmatrix} d + f - 1 \\ 1 - d \\ c \\ d \\ 0 \\ f \end{bmatrix}}_{X_G} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_P} + \underbrace{\begin{bmatrix} d + f \\ -d \\ c \\ d \\ 0 \\ f \end{bmatrix}}_{X_H}, \text{ para todo } c, d, f \in \mathbb{R}.$$

Exercício 8.26. O diagrama abaixo relaciona um conjunto de pontos numa placa de metal. A temperatura nos pontos fronteira da placa é mantida constante, não variando com o tempo, e é dada em graus Celsius.

Seja t_i a temperatura do ponto i do interior do reticulado. Assumindo que a temperatura em cada ponto intermédio é a média das temperaturas dos quatro pontos vizinhos, i.e. pontos directamente ligados por uma linha, calcule a temperatura t_i de cada ponto interior i .



8.4. Aplicação de sistemas ao cálculo da inversa. Suponhamos que se pretende calcular, caso exista, a matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Por definição A tem inverso, se existe uma matriz B , tal que

$$AB = BA = I,$$

caso exista, B é uma matriz quadrada, com a mesma ordem que A . Procuremos assim uma matriz

$$B = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_3 \end{bmatrix}$$

tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

ou equivalente, as colunas de B são definidas como sendo as soluções dos três sistemas de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como as matrizes simples dos três sistemas são iguais, a mesma sequência de operações elementares que se podem usar para transformar a matriz A numa matriz escalonada reduzida, permite resolver os três sistemas. Assim, por forma a simplificar a representação, usamos os termos independentes dos três sistemas para construir a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Condensando temos

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{\substack{L_2=L_2+2L_1 \\ L_3=L_3-L_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \\ &\xrightarrow{L_3=L_3+3L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

a matriz escalonada obtida pode ser posta na forma escada reduzida:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{\substack{L_2=L_2+2L_3 \\ L_1=L_1-3L_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 21 & -9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -16 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \\ &\xrightarrow{L_1=L_1-2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 54 & -23 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -16 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ -16 \\ -7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde podemos concluir que:

$$B = \begin{bmatrix} 54 & -23 & -7 \\ -16 & 7 & 2 \\ -7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Como esta matriz B , verifica $AB = I_3$, podemos concluir que:

$$B = A^{-1}.$$

O procedimento ilustrado no exemplo pode ser usado para o cálculo de inversas. Para isso note que:

Proposição 8.27. *Qualquer matriz A regular é equivalente para linhas a uma matriz identidade, i.e. $A \sim I_n$*

Assim, pode calcular a matriz inversa duma matriz A de ordem n fazendo:

- (1) Formar a matriz ampliada do tipo $n \times 2n$, $[A|I]$;
- (2) Usar operações elementares sobre linhas (sem troca de linhas) para reduzir $[A|I]$ à forma $[I|B]$ escalonada reduzida;
- (3) A matriz B obtida é a inversa de A , i.e. $B = A^{-1}$.

Assim o cálculo da inversa de A depender da existência e unicidade das soluções de sistemas de equações lineares, cujos coeficientes são definidos por A . Para que o método descrito só funciona se e só se a matriz A tem de ser regular.

Proposição 8.28. *Uma matriz quadrada A tem inversa se e só se é regular.*

O resultado seguinte resume as propriedades das matrizes regulares:

Proposição 8.29. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n . As seguintes proposições são equivalentes:*

- (1) A é regular;

- (2) o sistema homogêneo $Ax = 0$ é possível e determinado;
- (3) qualquer sistema $Ax = B$ é possível e determinado;
- (4) A é invertível;
- (5) A é equivalente para linhas a I_n

Exemplo 8.30 (Cálculo da inversa no Octave). *Podemos usar o comando "rref" para calcular a inversa de uma matriz regular, por exemplo para:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

podemos fazer:

```
octave:1> A=[2 1 2 0; 1 1 1 0; 0 2 1 0; 0 0 2 1];
octave:2> C=[A eye(size(A))];
octave:3> R=rref(C)
```

$R =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

8.5. Aplicações de sistemas à interpolação polinomial (opcional). Dado um conjunto de pontos de \mathbb{R}^2 , é um problema usual em matemática e engenharia ter de encontrar um polinômio de grau específico que passe por esses pontos. Tal polinômio é conhecido por polinômio interpolador.

Por exemplo, tentemos encontrar um polinômio de grau 3 que passe pelos pontos $(-3, 0)$, $(-2, -3)$, $(0, 3)$ e $(2, -15)$. Recorde que um polinômio de terceiro grau tem a forma $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Substituindo cada ponto dado na equação $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ obtemos quatro equações nas incógnitas a, b, c e d :

$$\begin{cases} a(-3)^3 + b(-3)^2 + c(-3) + d = 0 \\ a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = -3 \\ a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 3 \\ a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d = -15 \end{cases}$$

Este sistema tem por matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} -27 & 9 & -3 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -15 \end{bmatrix}$$

equivalente para linhas a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema tem por solução $a = -1$, $b = -3$, $c = 1$, e $d = 3$. Donde, o polinômio interpolador para os pontos dados é:

$$p(x) = -x^3 - 3x^2 + 1x + 3$$

É tão simples verificar o resultado, graficamente, no Octave como calcular a solução. Para isso vamos desenhar no plano os pontos dados e o gráfico do polinômio resultante.

Comecemos por separar as componentes dos vectores das coordenadas dos pontos dados $(-3, 0)$, $(-2, -3)$, $(0, 3)$ e $(2, -15)$ em dois vectores:

```
octave:1> x=[-3 -2 0 2];
octave:2> y=[0 -3 3 -15];
```

como o menor e maior valores em x são -3 e 2 , respectivamente, vamos esboçar o polinômio $p(x) = -x^3 - 3x^2 + 1x + 3$ no intervalo $[-4, 3]$. O que pode ser feito pelas seguintes linhas de comando:

```
octave:3> p=[-1 -3 1 3];% coeficientes do polinômio p
octave:4> xp=linspace(-4,2);% 100 pontos no intervalo de -4 a 3
octave:5> yp=polyval(p,xp);% valores assumidos por p para pontos em xp
octave:6> plot(x,y,'ro',xp,yp,'-')
```

Note que, o comando "plot" é extremamente versátil, permitindo desenhar conjuntos de pontos discretos ou linhas contínuos na mesma imagem. Os elementos a serem representados têm no entanto de aparecer decompostos em dois vectores.

Suponhamos agora que pretendemos encontrar um polinômio interpolador de grau quatro que passa pelos cinco pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), \text{ e } (x_5, y_5).$$

Substituindo os valores correspondentes de cada ponto na expressão geral do polinômio a encontrar

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

obtemos cinco equações que têm de se verificar:

$$\begin{cases} ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e = y_1 \\ ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e = y_2 \\ ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 + e = y_3 \\ ax_4^4 + bx_4^3 + cx_4^2 + dx_4 + e = y_4 \\ ax_5^4 + bx_5^3 + cx_5^2 + dx_5 + e = y_5 \end{cases}$$

tendo este sistema por matriz completa

$$\begin{bmatrix} x_1^4 & x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^4 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^4 & x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \\ x_4^4 & x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 & y_4 \\ x_5^4 & x_5^3 & x_5^2 & x_5 & 1 & y_5 \end{bmatrix}$$

Para

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

a matriz dos coeficientes do sistema é designada de matriz de Vandermonde

$$A = \begin{bmatrix} x_1^4 & x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^4 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^4 & x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^4 & x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \\ x_5^4 & x_5^3 & x_5^2 & x_5 & 1 \end{bmatrix}$$

este tipo de matriz é muito útil em numerosas aplicações em particular para calcular polinómios interpoladores.

Assim podemos calcular o polinómio interpolador dos pontos

$$(-2, 26), (-1, -2), (1, -4), (2, -2), \text{ e } (4, 128).$$

Através do sistema cuja matriz simples é a matriz de Vandermonde:

```
octave:1> x=[-2 -1 1 2 4]';
octave:2> A=[x.^4 x.^3 x.^2 x ones(size(x)) ]
A=
    16    -8     4    -2     1
     1    -1     1    -1     1
     1     1     1     1     1
    16     8     4     2     1
   256    64    16     4     1
```

A matriz ampliada do sistema associado ao problema fica na forma escalonada reduzida:

```
octave:3> y=[26 -2 -4 -2 128]';
octave:4> R=rref([A y])
R=
     1     0     0     0     0     1
     0     1     0     0     0    -2
     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     1     0     1
     0     0     0     0     1    -4
```

Assim o polinómio interpolador é:

$$y = x^4 - 2x^3 + x - 4$$

8.6. Aplicações de sistemas à determinação de secções cónicas (opcional).

Uma aplicação interessante dos sistemas homogêneos envolve a definição de quádricas a duas variáveis, i.e. equações a duas variáveis reais do tipo:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Se a equação tem solução, então o gráfico é uma curva no plano- xy . Se pelo menos um dos parâmetros a, b , ou c não é zero, o gráfico resultante é conhecido como uma **secção cónica**. As secções cónicas representam uma família de curvas que incluem parábolas, elipses, hipérbolas, bem como figuras degeneradas como pontos e linhas. Objectos tais como planetas, cometas, satélites artificiais seguem trajectórias

no espaço que correspondem a secções cónicas. A terra, por exemplo, segue uma trajectória elíptica à volta do sol, e o sol é um dos focus dessa elipse.

Um importante problema para a construção de modelos é o de: Supondo dados um conjunto de pontos no plano $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, determinar caso exista uma secção cónica que passe por esses pontos. Por exemplo, sabendo que um objecto se desloca segundo uma elipse, fazer algumas observações e com base nisso definir a totalidade da órbita.

Exemplo 8.31. *Sabendo que a equação da recta no plano é do tipo $dx + ey + f = 0$, determinemos a equação da recta que passa pelos pontos $(1, 2)$ e $(3, 7)$.*

Uma vez que os pontos $(1, 2)$ e $(3, 7)$ estão na linha definida por $dx + ey + f = 0$, determinemos o parâmetros b, e e f tal que;

$$\begin{cases} d + 2e + f = 0 \\ 3d + 7e + f = 0 \end{cases}$$

O sistema tem por matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Que por operações elementares pode ser posto na forma escalonada reduzida:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

Donde sai que $d = -5f$ e $e = 2f$, e temos por equação da linha:

$$-5fx + 2fy + f = 0$$

Cancelando o parâmetro f , obtemos:

$$-5fx + 2fy + f = 0$$

De forma simples podemos estender este exemplo: Uma secção cónica geral é definida por seis coeficientes, assim dados cinco pontos a equação da cónica permite derivar cinco equações. O que permite definir um sistema homogéneo com seis incógnitas que definem a secção cónica, uma vez que é sempre possível.

Exemplo 8.32. *Determinemos a secção cónica que passa pelos pontos*

$$(-1, 0), (0, 1), (2, 2), (2, -1), (0, 3).$$

Cada ponto define uma equação quando substituimos os correspondentes valores de x e y na equação geral da secção cónica:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Assim as cinco equações definem o sistema homogéneo dado pela matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

que é equivalente para linhas à matriz na forma escalonada reduzida:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7/18 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -11/18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 \end{array} \right]$$

Assim, os coeficientes da secção cónica são:

$$a = -7f/18, b = f/2, c = -f/3, d = 11f/18, e = -2f/3$$

Fazendo $f = 18$, obtemos:

$$-7x^2 + 9xy - 6y^2 + 11x - 12y + 18 = 0$$

Devemos no entanto notar que o método que foi apresentado pode ser generalizado de forma simple. Por exemplo, se considerarmos a quádrlica a três variáveis,

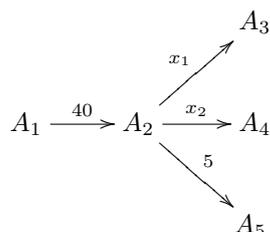
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

o gráfico desta equação é uma superfície no espaço tridimensional. Uma vez que temos 10 parâmetros, dados 9 pontos no espaço podemos determinar a superfície que passa por eles.

8.7. Aplicações de sistema ao cálculo do fluxo em redes (opcional). Nesta secção vamos apresentar como se pode usar sistemas de equações lineares em problemas de determinação de fluxo em redes.

Uma rede consiste num grafo orientado. Podemos, por exemplo, especificar uma rede rodoviária através dum grafo deste tipo. Para isso é usual interpretando os arcos do grafo como sendo estradas e cada nó como representando uma intersecção de estradas ou início ou fim de via. O cálculo do fluxo numa rede rodoviária consiste em, por exemplo, distribuir o tráfego na rede ou a quantidade de mercadorias a transportar por via para satisfazer requisitos de produção ou consumo.

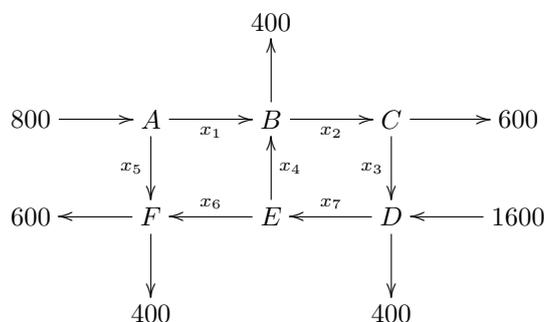
Num problema de cálculo de fluxo numa rede assumimos que numa rede o fluxo total que entra num nó é igual ao fluxo total que sai dele. Por exemplo em:



apresentamos um fluxo de 40 unidades para o nó A_2 e um total de $x_1 + x_2 + 5$ unidades que saem desse nó. Uma vez que assumimos a preservação de fluxo, os fluxos x_1 e x_2 devem satisfazer a equação linear $40 = x_1 + x_2 + 5$, ou de forma equivalente,

$$x_1 + x_2 = 35.$$

Como exemplo do cálculo de fluxo, consider a rede que representa a capacidade de escoamento de veículos, em média, por hora num sistema de vias de sentido único representado pelo grafo orientado:



Assim, por exemplo, entram $x_1 + x_2$ veículos por hora no nó B enquanto saem dele $x_2 + 400$ veículos por hora. As condições definidas pela rede podem ser apresentadas

sobre a forma do sistema de equações lineares:

$$\left\{ \begin{array}{l} 800 = x_1 + x_5 \quad (\text{Nó A}) \\ x_1 + x_4 = 400 + x_2 \quad (\text{Nó B}) \\ x_2 = 600 + x_3 \quad (\text{Nó C}) \\ 1600 + x_3 = 400 + x_7 \quad (\text{Nó D}) \\ x_7 = x_4 + x_6 \quad (\text{Nó E}) \\ x_5 + x_6 = 1000 \quad (\text{Nó F}) \end{array} \right.$$

O sistema tem por matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 800 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1000 \end{array} \right]$$

Que por condensação podemos mostrar ser equivalente para linhas à matriz:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

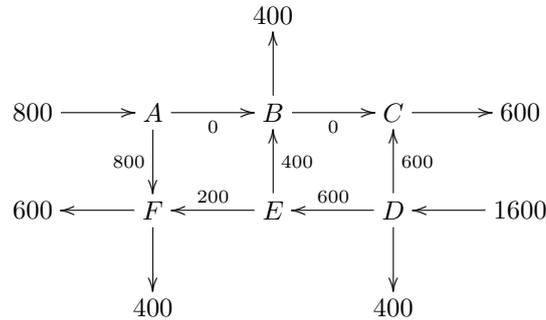
Assim, temos por solução

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_6 - 200 \\ x_2 = x_7 - 600 \\ x_3 = x_7 - 1200 \\ x_4 = x_7 - x_6 \\ x_5 = 1000 - x_6 \end{array} \right.$$

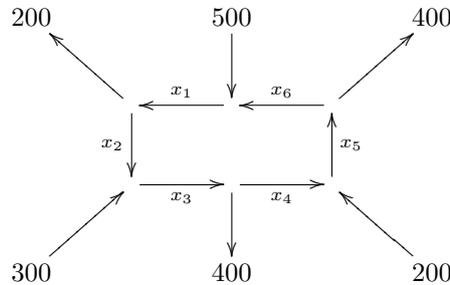
Supondo que, por motivos de restauro das vias, se tem de fechar a circulação de A para B e de B para C. Para que o sistema **não entre em colapso a circulação** de deve ser reorganizada. Usando a solução do sistema temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_6 - 200 \\ x_2 = x_7 - 600 \\ x_3 = x_7 - 1200 \\ x_4 = x_7 - x_6 \\ x_5 = 1000 - x_6 \\ x_1 = 0(\text{condição adicional}) \\ x_2 = 0(\text{condição adicional}) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -600 \\ x_4 = 400 \\ x_5 = 800 \\ x_6 = 200 \\ x_7 = 600 \end{array} \right.$$

Por forma a não termos fluxos negativos, temos de inverter o sentido de circulação na via de C para D. A rede assume assim a seguinte configuração:



Exercício 8.33. *Determine o fluxo de veículos na retunda descrita pela grafo orientado quando $x_1 = 600$.*



8.8. Aplicações à criptografia (opcional). Até aqui, os elementos das matrizes eram números reais ou complexos. Os números reais e complexos têm a propriedade de terem definidas operações de adição e multiplicação para os quais valem as regras usuais da aritmética. São elas:

- (1) **A adição é uma lei de composição interna:** Para todo o x e y existe um único número z tal que $z = x + y$;
- (2) **A adição é associativa:** Para todo x, y e z temos $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (3) **A adição é comutativa:** Para todo x e y temos $x + y = y + x$;
- (4) **Existe elemento neutro para a adição:** Existe um número que denotamos por 0 tal que qualquer que seja o x , $x + 0 = x$;
- (5) **Todo o número admite oposto para a adição:** Para todo o número x existe um número que denotamos por $-x$ tal que $x + (-x) = 0$;
- (6) **A multiplicação é uma lei de composição interna:** Para todo o x e y existe um único número z tal que $z = x.y$;
- (7) **A multiplicação é associativa:** Para todo x, y e z temos $(x.y).z = x.(y.z)$;
- (8) **A multiplicação é comutativa:** Para todo x e y temos $x.y = y.x$;
- (9) **Existe elemento neutro para a multiplicação:** Existe um número, que denotamos por 1 , tal que qualquer que seja o x , $x.1 = x$;
- (10) **Todo o número, diferente de 0, admite oposto para a multiplicação:** Para todo o número x existe um número que denotamos por x^{-1} tal que $x.x^{-1} = 1$;
- (11) **A multiplicação é distributiva em relação à adição:** Para x, y e z temos $x.(y + z) = x.y + x.z$.

A um conjunto munido de uma adição e multiplicação que satisfaz estas propriedades é usual chamar-se **corpo**. Assim, o conjunto dos números reais e o conjunto dos números complexos para a adição e multiplicação usuais são corpos. Como outro exemplo de corpo temos o conjunto dos números racionais. Já os inteiros não definem um corpo porque nem todo o inteiro tem oposto para a multiplicação (inverso).

Se definirmos matriz como uma tabela de dupla entrada cujos elementos pertencem a um corpo, as definições que apresentamos para matrizes reais e complexas aplicam-se a estas estruturas. Temos assim definida toda a algebra de matrizes relativamente a esse corpo. Desta forma, um sistemas de equações lineares está definida nesse corpo se os coeficientes e as soluções são definidos no corpo fixado. Os métodos apresentados podem ser usados na sua resolução. Por exemplo, podemos aplicar o método de Gauss para resolver o sistema, se as operações elementares a usar estão definidas usando a operação de adição e multiplicação do corpo.

Os corpos que nos têm sido apresentados até aqui são definidos por conjuntos de números infinitos. Existem no entanto corpos definidos por conjuntos finitos. Isto é, podemos definir operações de adição e multiplicação em conjuntos com um número finito de elementos que satisfazem as onze propriedades enunciadas. Este tipo de corpos têm tido aplicações na criptografia, que vamos tentar ilustrar de forma o mais simples possível.

A construção de corpos finitos é baseada no algoritmo da divisão. Quando dividimos um inteiro n , por exemplo, por 5 o resto da divisão é um número no conjunto $\{0, 1, 2, 4\}$ (chamado conjunto dos restos de n módulo 5). Por exemplo,

$$19 = 3 \cdot 5 + 4,$$

dizemos que o resto de 19 módulo 5 é 4. Mais formalmente, seja $p \geq 2$ um inteiro positivo. Então todo o inteiro n pode ser escrito de modo único na forma

$$n = qp + r \text{ em que } q \text{ e } r \text{ são inteiros e } 0 \leq r < p.$$

Neste caso, o número q é designado de **quociente**, e r é denominado de **resto** de n módulo p , e escrevemos $n \equiv r \pmod{p}$. Assim, $19 \equiv 4 \pmod{5}$ e $134 \equiv 2 \pmod{6}$, já que $134 = 22 \cdot 6 + 2$.

Para $p = 5$ consideremos o conjunto $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dos restos possíveis módulo 5. Neste conjunto podemos definir a adição e multiplicação:

- $x \oplus y = z$ se o resto da divisão de $x + y$ por 5 é z , i.e. $x + y \equiv z \pmod{5}$.
- $x \otimes y = z$ se o resto da divisão de $x \cdot y$ por 5 é z , i.e. $x \cdot y \equiv z \pmod{5}$.

Estas operações em \mathbb{Z}_5 podem ser expressas pelas seguintes tabelas:

\oplus	0	1	2	3	4	\otimes	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	0	1	0	1	2	3	4
2	2	3	4	0	1	2	0	2	4	1	3
3	3	4	0	1	2	3	0	3	1	4	2
4	4	0	1	2	3	4	0	4	3	2	1

As tabelas são preenchidas fazendo, por exemplo para a linha 3 e coluna 4, $3 \otimes 4 = 2$ já que $3 \cdot 4 = 12 = 2 \cdot 5 + 2$. O que acaba por se revelar notável é o facto de estas operações conferirem a \mathbb{Z}_5 a estrutura de corpo.

A aritmética de \mathbb{Z}_5 é em certo sentido mais simples que a dos números reais ou complexos.

Por exemplo, dado 3 em \mathbb{Z}_5 o seu simétrico -3 é um número x em \mathbb{Z}_5 tal que:

$$3 + x = 0$$

pela tabela podemos concluir que $x = 2$. Assim, em \mathbb{Z}_5 , temos, $-3 = 2$.

- (2) O receptor R deve codificar à direita a mensagem recebida, $D = CB$ e reenvia-la a E.
- (3) A mensagem recebida deve ser decodificada à esquerda, $E = A^{-1}D$, e devolvida a R.
- (4) R ao receber E deve decodifica-la à direita usando B^{-1} , já que

$$M = EB^{-1}.$$

Note que, o nível de segurança do processo está dependente do tipo e estrutura das matrizes usadas.

8.9. Uma aplicação para a álgebra de matrizes definidas em \mathbb{Z}_2 (opcional).

Pelo que foi apresentado no exemplo anterior: O conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ é um corpo quando algebrizado com as operações:

- $x \oplus y = z$ se o resto da divisão de $x + y$ por 2 é z , i.e. $x + y \equiv z \pmod{2}$.
- $x \otimes y = z$ se o resto da divisão de $x \cdot y$ por 2 é z , i.e. $x \cdot y \equiv z \pmod{2}$.

Que podem ser representadas através das seguintes tabelas de dupla entrada:

\oplus	0	1
0	0	1
1	1	0

\otimes	0	1
0	0	0
1	0	1

Se interpretarmos \mathbb{Z}_2 como conjunto dos valores de verdade: onde 1 representa verdadeiro e 0 falso. A primeira tabela é a **tabela de verdade da disjunção** (ou, \vee) e a segunda a **tabela de verdade da conjunção** (e, \wedge). Neste sentido \mathbb{Z}_2 , assim algebrizado, é muitas vezes chamado de **álgebra de Boole**, quando se define adicionalmente um operador unário de negação \neg , dado por $\neg 0 = 1$ e $\neg 1 = 0$.

Sejam A e B conjuntos. Chama-se relação binária de A em B a qualquer subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$, i.e.

$$R \subset A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

A relação R diz-se uma relação binária em A se $R \subset A \times A$

Dada uma relação binária R ,

- se $(a, b) \in R$ escrevemos aRb ;
- se $(a, b) \notin R$ escrevemos $a \not R b$.

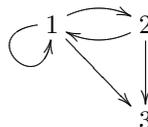
Caso o conjunto A onde a relação R está definida não tiver muitos elementos a relação binária R pode ser definida por:

- (1) Um diagrama sagital, grafo orientado ou digrafo, onde a relação é apresentada através do diagrama do conjunto enriquecido com setas de a para b para todos os pares $(a, b) \in R$;
- (2) Uma tabela de dupla entrada ou matriz da relação, preenchida com 0's e 1's, colocamos um 1, ou um 0 no cruzamento da linha a com a coluna b , respectivamente, se aRb ou $a \not R b$.

Exemplo 8.35. Consideremos o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ onde definimos por extensão a relação

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}.$$

R fica definida pelo grafo orientado,



ou pela tabela,

R	1	2	3
1	1	1	1
2	1	0	1
3	0	0	0

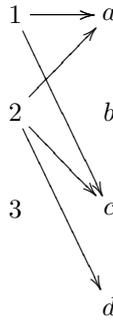
que pode ser abreviada pela matriz, em \mathbb{Z}_2 , de adjacência do grafo da relação,

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 8.36. Consideremos os conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$ onde definimos por extensão a relação

$$R = \{(1, a), (1, c), (2, a), (2, c), (2, d)\}.$$

R fica definida pelo grafo orientado,



ou pela tabela,

R	a	b	c	d
1	1	0	1	0
2	1	0	1	1
3	0	0	0	0

que pode ser abreviada pela matriz, em \mathbb{Z}_2 , de adjacência do grafo da relação,

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

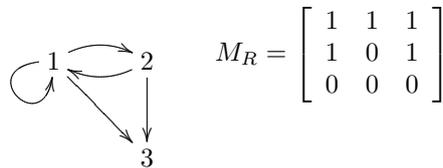
Seja R uma relação binária de A para B . Chama-se relação inversa de R à relação

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : aRb\},$$

i.e.

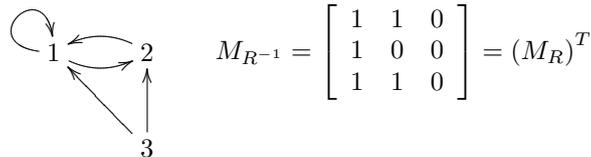
$$bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb.$$

Exemplo 8.37. Para a relação R dada por



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

temos a sua inversa R^{-1} dada por



$$M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (M_R)^T$$

O resultado que emerge do exemplo pode ser generalizado:

Proposição 8.38. *Seja R uma relação de A em B . Então*

$$M_{R^{-1}} = (M_R)^T$$

Sejam A, B e C conjuntos. Seja R uma relação de A em B e S uma relação de B em C . A composição S após $R, S \circ R$, é uma relação de A em C dada por

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \text{existe } b \in B \text{ tal que, } aRb \text{ e } bSc\}.$$

Exemplo 8.39. *Seja R uma relação de $\{1, 2, 3\}$ em $\{a, b, c, d\}$ dada em extensão por*

$$R = \{(1, a), (1, d), (2, c), (3, a), (3, d)\}$$

e S a relação de $\{a, b, c, d\}$ em $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ dada em extensão por

$$S = \{(a, \alpha), (b, \alpha), (c, \beta), (c, \gamma)\}$$

Por definição de $S \circ R$ temos:

$$S \circ R = \{(1, \alpha), (2, \beta), (2, \gamma), (3, \alpha)\}.$$

Notemos que $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e

$$M_{S \circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_R \cdot M_S$$

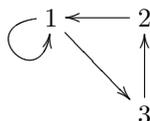
onde o produto $M_R \cdot M_S$ é realizada no corpo \mathbb{Z}_2 .

Na prática podemos provar que:

Proposição 8.40. *Se R é uma relação de A para B e S é uma relação de B para C então*

$$M_{S \circ R} = M_R \cdot M_S \text{ em } \mathbb{Z}_2$$

Exemplo 8.41. *O grafo orientado da relação R*



é representado pela matriz

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

como

$$M_R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_R^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O facto de $(1,2)$ em A^2 ser 1, exprime que existe pelo menos um caminho no grafo de 1 para 2 de comprimento 2. Como $(2,2)$ é 0, em A^2 , não existe nenhum caminho de comprimento 2 de 2 para 2. Assim, como em A^3 , $(3,2)$ é 0 não existe caminho de comprimento 3 de 3 para 2.

Podemos no entanto dizer que qualquer elemento pode se alcançada de qualquer outro por, pelo menos, um caminho de comprimento quatro, já que:

$$M_R^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$