

Ficha 3

Prazo de entrega: última aula da semana de 2008.11.24 - 2008.10.28

- 1** ■ Para cada um dos conjuntos seguintes, averigue se se trata de subespaços dos espaços vectoriais reais indicados e, em caso afirmativo, obtenha uma base e a dimensão desses subespaços:

a ■ $A = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} : w = y^2 \right\} \subset \mathbb{R}^{2,2}$.

b ■ $B = \{(a + c, -a - b - 3c, 2a + 2c, a + b + 3c) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$.

- 2** ■ Considere, no espaço vectorial real \mathbb{R}^4 , a sequência de vectores

$$s = ((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, -1), (2, 1, -1, 1), (1, 0, -1, 1))$$

a ■ Mostre que s não é uma base de \mathbb{R}^4 .

b ■ Determine uma base e a dimensão do subespaço $E \subset \mathbb{R}^4$ gerado por s e caracterize os vectores $(x, y, z, w) \in E$ por meio de uma condição nas suas componentes x, y, z e w .

c ■ Seja $F = \{(0, y, z, w) : y, z, w \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$ e determine uma base e a dimensão dos subespaços F e $G = E \cap F$. Diga ainda, justificando, se $E \cup F$ é um subespaço de \mathbb{R}^4 .

- 3** ■ Considere um espaço vectorial real E e sejam $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4 \in E$ vectores tais que

$$\vec{u}_2 \neq \vec{0} \wedge \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 = \vec{0} \wedge -\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 - \vec{u}_3 = \vec{0} \wedge \vec{u}_4 \notin L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3):$$

a ■ Diga, justificando, se são linearmente independentes as sequências $s_1 = (\vec{u}_3, \vec{u}_4)$ e $s_2 = (\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$.

b ■ Indique, justificando adequadamente a sua resposta, uma base e a dimensão do subespaço $F = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ gerado pelos quatro vectores dados.

- 4** ■ Usando a definição, averigue se são lineares as funções:

a ■ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (1 + y + z, 2x - 1)$.

b ■ $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(x, y) = (x + y, 2x - y)$.

- 5** ■ Sejam $t_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $t_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ as funções lineares definidas por $t_1(x, y) = (x, 3y)$ e $t_2(x, y) = (x + y, x - 3y)$ e $t = t_2 \circ t_1$.

a ■ Determine $t(x, y)$, para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, bem como o núcleo e a imagem da transformação linear t .

b ■ Com base na alínea anterior, averigue se t é invertível e determine $t^{-1}(x, y)$, se existir.