

Ficha 4

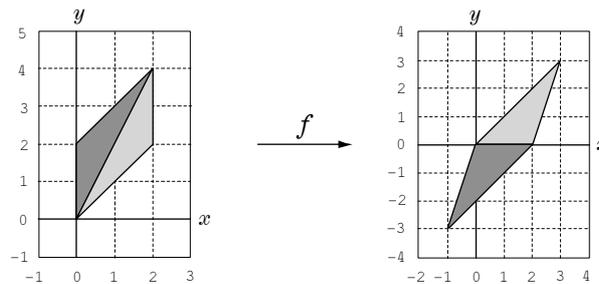
Prazo de entrega: até dia 12 Jan 2009

- 1 ■ Considere a função linear $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(x, y, z, w) = (x + y - z, -y + 2z - w, 2x + y - w)$$

- a ■ Determine o núcleo, a imagem, a nulidade e a característica de g .
- b ■ Determine a representação matricial de g em relação à base canónica de \mathbb{R}^4 e à base $((1, -1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ de \mathbb{R}^3 .
- c ■ Verifique se o vector $\vec{v} = (3, -2, 4)$ pertence à imagem de g e, em caso afirmativo, determine todos os vectores de \mathbb{R}^4 cuja imagem por g é \vec{v} .

- 2 ■ Considere a aplicação linear $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma o paralelogramo da esquerda no paralelogramo da direita, sendo cada triângulo aplicado por f no correspondente triângulo da mesma cor. Determine a matriz que representa f na base canónica de \mathbb{R}^2 :



- 3 ■ Sejam λ_1 e λ_2 os valores próprios da matriz complexa $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:

- a ■ Mostre que $a + d = \lambda_1 + \lambda_2$ e que $ad - bc = \lambda_1 \lambda_2$.
- b ■ Suponha agora que $a + c = b + d$. Nestas condições, mostre que $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A e determine os dois valores próprios de A em função de a, b, c e d . Nas condições indicadas, mostre ainda que $\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$ é também um vector próprio de A .

Ficha 4

Prazo de entrega: até dia 12 Jan 2009

- 4** ■ Seja E um espaço vectorial real e $v = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ uma base de E . Considere ainda o endomorfismo h de E tal que

$$\begin{cases} h(\vec{v}_1) = 4\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 6\vec{v}_3 \\ h(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 \\ h(\vec{v}_3) = -(3\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 5\vec{v}_3) \end{cases}$$

- a** ■ Determine a matriz H de h em relação à base v e ainda os valores próprios de h bem como os respectivos subespaços próprios. Indique também os graus de multiplicidade algébrica e geométrica de cada valor próprio obtido.
- b** ■ Averigue a existência de bases de E em relação às quais a matriz de h seja diagonal e indique uma dessas bases, se existir. Determine uma matriz invertível T e uma matriz diagonal D tais que $H = TDT^{-1}$.

- 5** ■ Seja E um espaço euclidiano e $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormada de E . Dados os vectores

$$\vec{u} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \text{ e } \vec{v} = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3$$

- a** ■ Determine o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} e ainda o versor de \vec{v} .
- b** ■ Determine a projecção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} .
- c** ■ Mostre que o vector $\vec{w} = \frac{\|\vec{v}\|\vec{u}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} + \frac{\|\vec{u}\|\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$ divide ao meio o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .