

# AULA 2

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

## TÓPICOS

Álgebra matricial.

Igualdade.

Adição.

Multiplificação por um escalar.

Multiplificação matricial.

Potenciação.

Matriz transposta.

Matriz simétrica e anti-simétrica.

## 2. Álgebra matricial.

### 2.1. Igualdade.

Duas matrizes,  $\mathbf{A}_{m \times n}$  e  $\mathbf{B}_{p \times q}$ , são iguais se têm o mesmo tamanho, ou seja,  $m = p$  e  $n = q$ , e os elementos correspondentes são iguais, ou seja,

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j.$$

### 2.2. Adição.

A soma de duas matrizes do mesmo tamanho,  $\mathbf{A}_{m \times n}$  e  $\mathbf{B}_{m \times n}$ , define-se como sendo a matriz  $m \times n$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

resultante da soma dos elementos homólogos de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$$

### Exemplos

1. Sejam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

A soma de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  é a matriz

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) & 2+1 \\ 2+2 & 3+1 & 5+(-1) \\ 4+1 & 1+4 & 6+(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$



Soma de duas matrizes,  $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ ,

```
>> A=[1 4 2 ; 2 3 5 ; 4 1 6];
```

```
>> B=[2 -1 1 ; 2 1 -1 ; 1 4 -1];
```

```
>> C=A+B
```

```
C =
```

```
    3    3    3
    4    4    4
    5    5    5
```

### 2.3. Multiplicação por um escalar.

A multiplicação de uma matriz,  $\mathbf{A}_{m \times n}$ , por um escalar,  $\alpha \in \mathbb{R}$  (ou  $\alpha \in \mathbb{C}$ ), define-se como sendo a matriz  $m \times n$

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{A}$$

resultante da multiplicação por  $\alpha$  de cada um dos elementos da matriz  $\mathbf{A}$ , ou seja,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \forall i, j$$

#### Exemplos

2. O produto do escalar  $\alpha = 5$  pela matriz  $\mathbf{A}$  é a matriz

$$\mathbf{B} = 5\mathbf{A}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 1 & 5 \times 4 & 5 \times 2 \\ 5 \times 2 & 5 \times 3 & 5 \times 5 \\ 5 \times 4 & 5 \times 1 & 5 \times 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 10 & 15 & 25 \\ 20 & 5 & 30 \end{bmatrix}$$



Produto do escalar  $a = 5$  pela matriz  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{a}*\mathbf{A}$ ,

```
>> a=5;
```

```
>> B=a*A
```

```
B =
```

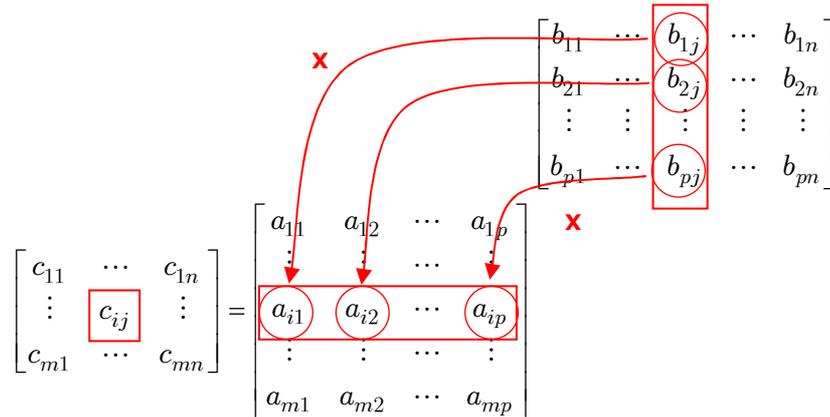
```
    5    20    10
   10    15    25
   20     5    30
```

### 2.4. Multiplicação matricial.

O produto de duas matrizes, tais que o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda,  $A_{m \times p}$  e  $B_{p \times n}$ , define-se como sendo a matriz  $m \times n$

$$C = AB$$

cujos elementos,  $c_{ij}$ , resultam da soma dos produtos dos elementos da linha  $i$  da matriz  $A$  pelos elementos correspondentes da coluna  $j$  da matriz  $B$



, ou seja

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \quad ; 1 \leq i \leq m \wedge 1 \leq j \leq n$$

### Exemplos

3. Sejam as seguintes matrizes:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Do produto da matriz  $D$ ,  $(2 \times 3)$ , pela matriz  $E$ ,  $(3 \times 2)$ , resulta uma matriz  $2 \times 2$

$$DE = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [3 \ 4 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & [3 \ 4 \ 1] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ [2 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & [2 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \times 1 + 4 \times 3 + 1 \times 0 & 3 \times 2 + 4 \times 1 + 1 \times 4 \\ 2 \times 1 + 1 \times 3 + 0 \times 0 & 2 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Note-se que o produto da matriz  $E$ ,  $(3 \times 2)$ , pela matriz  $D$ ,  $(2 \times 3)$ , também está definido,

$$(3 \times 2) (2 \times 3)$$

, resultando uma matriz  $3 \times 3$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{ED} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \ 2] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & [1 \ 2] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & [1 \ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [3 \ 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & [3 \ 1] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & [3 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [0 \ 4] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & [0 \ 4] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & [0 \ 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 2 & 1 \times 4 + 2 \times 1 & 1 \times 1 + 2 \times 0 \\ 3 \times 3 + 1 \times 2 & 3 \times 4 + 1 \times 1 & 3 \times 1 + 1 \times 0 \\ 0 \times 3 + 4 \times 2 & 0 \times 4 + 4 \times 1 & 0 \times 1 + 4 \times 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 11 & 13 & 3 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Este exemplo evidencia claramente que o **produto de matrizes não é comutativo**, uma vez que

$$\mathbf{DE} \neq \mathbf{ED}$$

Quando se verifica  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$  as matrizes **A** e **B** dizem-se **matrizes permutáveis** (ou **comutáveis**).



Produto de matrizes, **A\*B**,

```

>> D=[3 4 1; 2 1 0]
D =
     3     4     1
     2     1     0
>> E=[1 2; 3 1; 0 4]
E =
     1     2
     3     1
     0     4
>> D*E
ans =
    15    14
     5     5
>> E*D
ans =
     7     6     1
    11    13     3
     8     4     0
    
```

## 2.5. Potenciação.

Dada uma matriz quadrada de ordem  $n$ ,  $\mathbf{A}$ , e um inteiro não negativo  $k$ , definimos a **potência**  $k$  de  $\mathbf{A}$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^0 &= \mathbf{I}_n \\ \mathbf{A}^{k+1} &= \mathbf{A}^k \mathbf{A}, \forall k \geq 0 \end{aligned}$$

, ou seja,  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$  e  $\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \dots \times \mathbf{A}}_{k \text{ termos}}, k > 0$ .

### Exemplos

4. O cubo da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

é

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 & 1 \times 2 + 2 \times (-1) \\ 3 \times 1 - 1 \times 3 & 3 \times 2 - 1 \times (-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \times 1 + 0 \times 3 & 7 \times 2 + 0 \times (-1) \\ 0 \times 1 + 7 \times 3 & 0 \times 2 + 7 \times (-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & -7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Potência de uma matriz,  $\mathbf{A}^n$ ,

```
>> A=[1 2;3 -1]
```

```
A =
```

```
    1    2
    3   -1
```

```
>> A^3
```

```
ans =
```

```
    7    14
   21   -7
```

```
>> A*A*A
```

```
ans =
```

```
    7    14
   21   -7
```

## 2.6. Matriz transposta.

A matriz transposta de uma matriz  $\mathbf{A}_{m \times n}$  é definida pela matriz  $n \times m$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$$

, obtida passando as linhas de  $\mathbf{A}$  a colunas (ou as colunas a linhas), ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$$

### Exemplos

A transposta da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$



Transposta de uma matriz,  $\mathbf{A}'$ ,

```
>> A=[1 3 4; 2 8 9; 5 7 6];
```

```
>> A.'
```

```
ans =
```

```
     1     2     5
     3     8     7
     4     9     6
```

## 2.7. Matriz simétrica e anti-simétrica.

Uma matriz quadrada  $\mathbf{A}$  diz-se simétrica se  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$  ( $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$ ), e diz-se anti-simétrica se  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$  ( $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$ ).

### Exemplos

Sejam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz  $\mathbf{B}$  é simétrica, e a matriz  $\mathbf{C}$  é anti-simétrica

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = -\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Os elementos da diagonal principal de uma matriz anti-simétrica são obrigatoriamente nulos, dado que

$$a_{ii} = -a_{ii} \Leftrightarrow 2a_{ii} = 0 \Leftrightarrow a_{ii} = 0.$$

## Exercícios.

2.1. Sendo

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 9 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 9 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 8 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule  $c_{23}$ .

Atendendo à definição de produto matricial,  $c_{23}$  é igual ao produto da 2ª linha da matriz  $\mathbf{A}$  pela 3ª coluna da matriz  $\mathbf{B}$

$$c_{23} = a_{2j}b_{j3} = [4 \ 0 \ 8 \ 2] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \times 3 + 0 \times 5 + 8 \times 6 + 2 \times 0 = 60$$



```
>> c23=[4 0 8 2]*[3 5 6 0].'  
c23 =  
60
```

2.2. Dadas as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Calcule  $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - 2\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & 4 \\ -10 & 4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 3 \\ 19 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



```
>> A=[1 8 6;5 3 7;9 4 2];  
>> B=[0 1 3;1 -2 2;-5 2 -1];  
>> A-2*B
```

$$\text{ans} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 3 \\ 19 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Calcule  $\mathbf{AB}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \times 0 + 8 \times 1 + 6 \times (-5) & 1 \times 1 + 8 \times (-2) + 6 \times 2 & 1 \times 3 + 8 \times 2 + 6 \times (-1) \\ 5 \times 0 + 3 \times 1 + 7 \times (-5) & 5 \times 1 + 3 \times (-2) + 7 \times 2 & 5 \times 3 + 3 \times 2 + 7 \times (-1) \\ 9 \times 0 + 4 \times 1 + 2 \times (-5) & 9 \times 1 + 4 \times (-2) + 2 \times 2 & 9 \times 3 + 4 \times 2 + 2 \times (-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -22 & -3 & 13 \\ 32 & 13 & 14 \\ -6 & 5 & 33 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



```
>> A=[1 8 6;5 3 7;9 4 2];
>> B=[0 1 3;1 -2 2;-5 2 -1];
>> A*B
ans =
    -22     -3     13
    -32     13     14
     -6      5     33
```

3. Calcule  $A^2$ .

$$\begin{aligned}
 A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 8 \times 5 + 6 \times 9 & 1 \times 8 + 8 \times 3 + 6 \times 4 & 1 \times 6 + 8 \times 7 + 6 \times 2 \\ 5 \times 1 + 3 \times 5 + 7 \times 9 & 5 \times 8 + 3 \times 3 + 7 \times 4 & 5 \times 6 + 3 \times 7 + 7 \times 2 \\ 9 \times 1 + 4 \times 5 + 2 \times 9 & 9 \times 8 + 4 \times 3 + 2 \times 4 & 9 \times 6 + 4 \times 7 + 2 \times 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 95 & 56 & 74 \\ 83 & 77 & 65 \\ 47 & 92 & 86 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



```
>> A=[1 8 6;5 3 7;9 4 2];
```

```
>> A^2
```

```
ans =
```

```

95    56    74
83    77    65
47    92    86

```