

AULA 5

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Exercícios

5. Exercícios.

5.1. O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

tem a matriz completa

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

, pelo que



```
>> AB=[1 1 -1 1; 2 2 1 6; 3 -1 2 5; 0 4 -2 2];
>> CD=rref(AB)
CD =
    1.0000         0         0    1.1667
         0    1.0000         0    1.1667
         0         0    1.0000    1.3333
         0         0         0         0
>> format rat
>> CD
```

$$\begin{array}{cccc}
 \text{CD} = & & & \\
 & 1 & 0 & 0 & 7/6 \\
 & 0 & 1 & 0 & 7/6 \\
 & 0 & 0 & 1 & 4/3 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

O sistema é possível e determinado, com solução

$$x_1 = \frac{7}{6}; x_2 = \frac{7}{6}; x_3 = \frac{4}{3}$$

Poderíamos ter verificado que o sistema é possível e determinado, fazendo



```

>> A=[1 1 -1; 2 2 1; 3 -1 2;0 4 -2];
>> B=[1; 6; 5;2];
>> ra=rank(A)
ra =
     3
>> rb=rank([A B])
rb =
     3

```

Dado que $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = n = 3$ o sistema é possível e determinado.



Para resolver um sistema de equações lineares podemos utilizar a função **linsolve(A,B)**

```

>> A=[1 1 -1; 2 2 1; 3 -1 2;0 4 -2];
>> B=[1; 6; 5;2];
>> format rat
>> linsolve (A,B)
ans =
     7/6
     7/6
     4/3

```

5.2. O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

tem a matriz completa

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

, pelo que



```
>> AB=[1 2 -1 1 5;0 1 1 2 5; 1 3 0 3 2];
>> CD=rref(AB)
CD =
     1     0    -3    -3     0
     0     1     1     2     0
     0     0     0     0     1
```

Dado que a última linha não nula da forma escalonada reduzida da matriz completa do sistema é da forma $[0 \cdots 0 \mid b'_m]$ com $b'_m = 1 \neq 0$ o sistema é impossível.

Alternativamente, podemos fazer



```
>> A=[1 2 -1 1;0 1 1 2 ; 1 3 0 3];
>> B=[5;5; 2];
>> rank(A)
ans =
     2
>> rank([A B])
ans =
     3
```

, e concluir que, sendo $\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}])$, o sistema é impossível.

Se utilizarmos a função `linsolve(A,B)` somos informados que o sistema é impossível. A função só é útil para determinar a solução de sistemas de equações lineares possíveis e determinados.



```
>> linsolve(A,B)
Warning: Rank deficient, rank = 2, tol = 3.3233e-015.
ans = ...
```

5.3. O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

tem a matriz completa

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

, pelo que



```
>> AB=[0 0 1 1 2;2 -2 0 0 0;4 -4 2 2 4;2 -2 -1 -1 -2];
```

```
>> CD=rref(AB)
```

```
CD =
```

```
    1    -1     0     0     0
    0     0     1     1     2
    0     0     0     0     0
    0     0     0     0     0
```

A forma escalonada reduzida da matriz completa possui colunas sem pivots (a 2ª e a 4ª colunas) pelo que o sistema é possível e indeterminado. O sistema considerado é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

, tendo portanto como solução

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

As variáveis que não estão associada a um pivot, x_2 e x_4 , são variáveis livres. Tendo duas variáveis livres, o sistema tem um grau de indeterminação $g = 2$ (também dito sistema duplamente indeterminado). O sistema tem duas variáveis principais (associadas a um pivot), x_1 e x_3 , com um valor dependente das variáveis livres. A solução geral do sistema é expressa na forma

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 2 - x_4 \end{cases}$$

Alternativamente, podemos fazer



```
>> A=[0 0 1 1;2 -2 0 0;4 -4 2 2;2 -2 -1 -1];
>> B=[2;0;4;-2];
>> rank(A)
ans =
     2
>> rank([A B])
ans =
     2
```

, e concluir que, sendo $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2 < n = 4$, o sistema é indeterminado (duplamente indeterminado dado que $g = 4 - 2 = 2$).

Se utilizarmos a função `linsolve(A,B)` somos informados que o sistema é indeterminado



```
>> linsolve(A,B)
Warning: Matrix is singular to working precision.
ans =
     0/0
     0/0
     0/0
     0/0
```

5.4. Escreva na forma matricial o sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 = -2x_2 \\ 2x_3 = 1 - x_2 \end{cases}$$

Atendendo à definição de matriz dos coeficientes do sistema, de vector coluna das incógnitas, e de vector coluna dos termos independentes, temos

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.5. Resolva, recorrendo ao método de Gauss-Jordan, e classifique quanto à solução, o sistema

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = x_3 \\ 1 - x_1 = 2x_3 \\ 2 - x_1 = 5x_3 \end{cases}$$

Aplicando do método de Gauss-Jordan, temos

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} && \begin{array}{l} -L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ -L_1 + L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} && \begin{array}{l} L_2 + L_1 \rightarrow L_1 \\ -L_2 + L_2 \rightarrow L_3 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{bmatrix} && -1/3 L_3 \rightarrow L_3 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{bmatrix} && \begin{array}{l} -2L_3 + L_1 \rightarrow L_1 \\ -L_3 + L_2 \rightarrow L_2 \end{array} \end{aligned}$$

Temos $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A}\mathbf{b}]) = n = 3$, pelo que o sistema é possível e determinado, com solução

$$\mathbf{x} = [1/3 \quad 2/3 \quad 1/3]^T$$



```
>> A=[1 -1 1;1 0 2;1 0 5];
>> b=[0 1 2]';
>> format rat
>> rref([A b])
ans =
```

```
      1      0      0      1/3
      0      1      0      2/3
      0      0      1      1/3
```

5.6. Resolva, recorrendo ao método de Gauss-Jordan, e classifique quanto à solução, o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 \\ 2x_1 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Aplicando do método de Gauss-Jordan, temos

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \\ \sim &\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} && \begin{array}{l} -2L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ -L_1 + L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \\ \sim &\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} && \begin{array}{l} 1/2 L_2 \rightarrow L_2 \\ 1/4 L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \\ \sim &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} && \begin{array}{l} -L_2 + L_3 \rightarrow L_3 \\ L_2 + L_1 \rightarrow L_1 \end{array} \end{aligned}$$

Temos $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A}\mathbf{b}]) = 2 \neq n = 3$, pelo que o sistema é possível e indeterminado, com grau de indeterminação $g = n - \text{car}(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$.

As variáveis principais, correspondentes às colunas com pivot, são x_1 e x_2 , e a variável livre é x_3 .

A solução geral do sistema é dada por todos os vectores que verificam

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 - 2x_3 \\ x_2 = 1/2 - x_3 \end{cases}$$

, ou seja

$$\mathbf{x} = [1/2 - 2x_3 \quad 1/2 - x_3 \quad x_3]^T$$



```
>> A=[1 -1 1;2 0 4;1 3 5];
```

```
>> b=[0 1 2]';
```

```
>> rref([A b])
```

```
ans =
```

```

     1         0         2        1/2
     0         1         1        1/2
     0         0         0         0

```

5.7. Resolva, recorrendo ao método de Gauss-Jordan, e classifique quanto à solução, o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 \\ 2x_1 + 4x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Aplicando do método de Gauss-Jordan, temos

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -2L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ -L_1 + L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad -2L_2 + L_3 \rightarrow L_3 \end{aligned}$$

Temos $\text{car}(\mathbf{A}) = 2 < \text{car}([\mathbf{A}\mathbf{b}]) = 3$, pelo que o sistema é impossível.



```
>> A=[1 -1 1;2 0 4;1 3 5];
>> b=[0 -1 2]';
>> rref([A b])
ans =
```

```
     1         0         2         0
     0         1         1         0
     0         0         0         1
```

5.8. Dado o sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_3 = b_2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = b_3 \end{cases}$$

1. Resolva o sistema homogéneo associado
2. Determine b_1 , b_2 e b_3 de modo que $\mathbf{x} = [1 \ 0 \ 0]^T$ seja uma solução do sistema.
3. Com base nas alíneas anteriores determine a solução geral do sistema.

1. Aplicando do método de Gauss-Jordan ao sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, temos

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A} \mid \mathbf{0}] &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -2L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ -L_1 + L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 1/2 L_2 \rightarrow L_2 \\ 1/4 L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -2L_2 + L_3 \rightarrow L_3 \\ L_2 + L_1 \rightarrow L_1 \end{array}
\end{aligned}$$

Temos $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A}\mathbf{0}]) = 2 < n = 3$, pelo que o sistema é possível e indeterminado, com grau de indeterminação $g = n - \text{car}(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$.

As variáveis principais, correspondentes às colunas com pivot, são x_1 e x_2 , e a variável livre é x_3 .

A solução geral do sistema é dada por todos os vectores que verificam

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

, ou seja

$$\mathbf{x}_h = [-2x_3 \quad -x_3 \quad x_3]^T$$

2. Se $\mathbf{x} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ é uma solução particular do sistema, então

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} &= \mathbf{A}\mathbf{x} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. Com base nas alíneas anteriores, sendo

$$\mathbf{x}_h = [-2x_3 \quad -x_3 \quad x_3]^T$$

e

$$\mathbf{x}_p = [1 \quad 0 \quad 0]^T$$

a solução geral do sistema.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = [1 \quad 2 \quad 1]^T$$

é

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 + 1 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$