

AULA 09

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Vectores livres.

Vectores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Vectores em $\mathbb{R}^n$.

Vectores iguais.

Soma de vectores.

Produto de um escalar por um vector.

Notação matricial.

Vector nulo. Vector simétrico.

Propriedades da soma e do produto por um escalar

9. Vectores em $\mathbb{R}^n$.

9.1. Vectores livres.

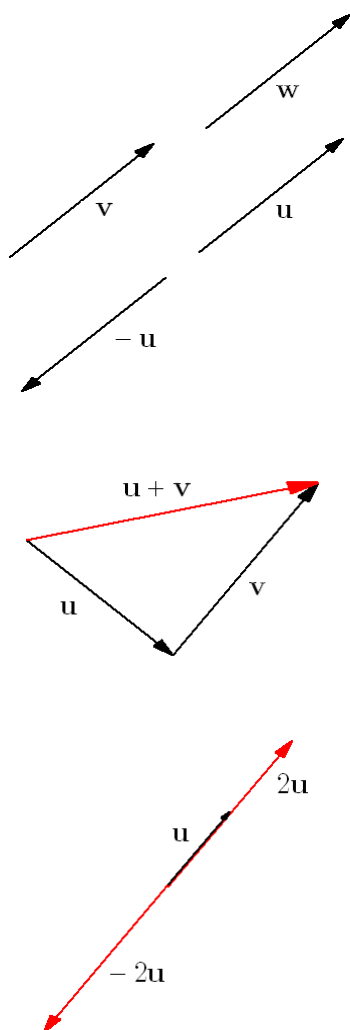


Figura 9.1

Recorde do Ensino Secundário que um **vector** u é definido por uma **direcção**, um **sentido** e um **comprimento**, e representa-se geometricamente no plano, $\mathbb{R}^2$, ou no espaço, $\mathbb{R}^3$, por um **segmento orientado**, que corresponde a um deslocamento de um ponto para outro.

A ponta da seta do vector é chamada ponto final ou **extremidade**, e o outro ponto extremo é chamado ponto inicial ou **origem** do vector.

Segmentos orientados com a mesma direcção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento representam o mesmo vector, ou seja, são considerados **vectores iguais**.

No exemplo figurado tem-se

$$u = v = w$$

O **vector simétrico** de u é o vector que tem o mesmo comprimento, a mesma direcção e sentido oposto ao de u . Representa-se por $-u$.

A **soma** u e v é o vector $u + v$ que une a origem de u à extremidade de v quando se faz coincidir a origem de v com a extremidade de u .

Um vector com comprimento zero e direcção e sentido indeterminados chama-se **vector nulo** e representa-se por 0 .

$$u + (-u) = 0$$

O **produto de um escalar real**, α , **por um vector** $\mathbf{u}$ é o vector $\alpha\mathbf{u}$ tal que:

Se $\alpha = 0$, $\alpha\mathbf{u}$ é o vector nulo.

Se $\alpha \neq 0$, $\alpha\mathbf{u}$ tem:

- comprimento igual a $|\alpha|$ vezes o comprimento de $\mathbf{u}$;
- a direcção de $\mathbf{u}$;
- o sentido de $\mathbf{u}$ se $\alpha > 0$ e contrário ao de $\mathbf{u}$ se $\alpha < 0$.

Propriedades da soma de vectores

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad (\text{comutativa})$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad (\text{associativa})$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (\text{elemento neutro})$$

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (\text{todos os vectores têm simétrico})$$

Propriedades do produto de um escalar real por um vector

$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \quad (\text{distributiva})$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \quad (\text{distributiva})$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (\text{elemento neutro})$$

O **comprimento** de um vector $\mathbf{u}$ é o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam e é designado por **norma** do vector, usando-se a notação $\|\mathbf{u}\|$.

Um vector de norma igual a 1 é chamado **vector unitário**. Dado um vector não nulo $\mathbf{u}$, o vector

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

é o vector unitário com a direcção e sentido de $\mathbf{u}$ e chama-se o **versor** de $\mathbf{u}$. A operação de multiplicação de um vector $\mathbf{u}$ pelo inverso da sua norma é designada por **normalização** do vector $\mathbf{u}$.

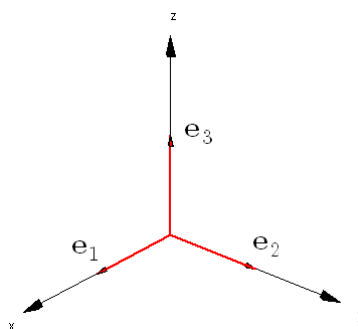
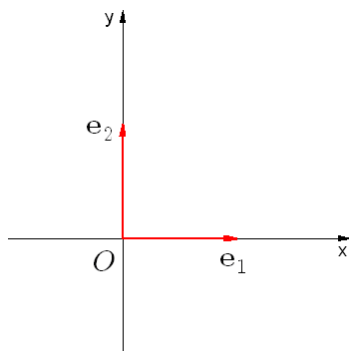


Figura 9.2

9.2. Vectores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Um conjunto de dois vectores não colineares $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ diz-se uma **base** de vectores em $\mathbb{R}^2$, e um conjunto de três vectores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ não complanares diz-se uma base de vectores em $\mathbb{R}^3$.

Uma **base ortonormada** em $\mathbb{R}^2$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ em que os vectores $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ têm comprimento 1 e são perpendiculares, e uma base ortonormada em $\mathbb{R}^3$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ em que os vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ têm norma 1 e são perpendiculares dois a dois.

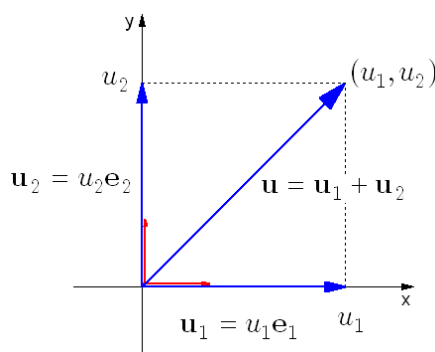
A **base canónica** de $\mathbb{R}^2$ é a base ortonormada de vectores com as direcções e sentidos dos eixos coordenados constituída pelos vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0,1)$, $\{(1,0), (0,1)\}$. Identicamente, a base canónica de $\mathbb{R}^3$ é constituída pelos vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$, $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Componentes e coordenadas de um vector em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

As **componentes do vector** $\mathbf{u}$, de $\mathbb{R}^2$, numa base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ são os vectores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ que têm, respectivamente, a direcção de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, e cuja soma é igual a $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

As componentes do vector $\mathbf{u}$, de $\mathbb{R}^3$, numa base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ são os vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ que têm, respectivamente, as direcções de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$, e cuja soma é igual a $\mathbf{u}$:



$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

As **coordenadas do vector** $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^2$ numa base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ são os números reais, u_1 e u_2 , que devemos multiplicar por $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ para obtermos as componentes de $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$$

Tendo o vector o seu ponto inicial na origem do referencial, $O = (0,0)$, as coordenadas do vector são coincidentes com as coordenadas do ponto onde o vector tem a sua extremidade (u_1, u_2) , ou seja, o conjunto de todos os pontos do plano corresponde ao conjunto de todos os vectores cujo ponto inicial é a origem do referencial, O , pelo que, também é usada a notação

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$$

Temos, portanto, para os vectores da base canónica,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 \\ &= (1,0) \\ \mathbf{e}_2 &= 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 \\ &= (0,1)\end{aligned}$$

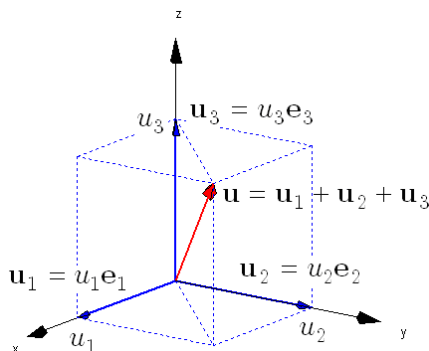


Figura 9.3

, como já tínhamos visto.

É também usual designar u_1 e u_2 como as componentes do vector segundo $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, respectivamente.

As coordenadas do vector $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^3$ numa base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ são os números reais, u_1 , u_2 e u_3 , que devemos multiplicar por $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ para obtermos as componentes de $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$$

À semelhança de $\mathbb{R}^2$, é também usual a notação $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, e a designação de u_1, u_2 e u_3 como as componentes do vector segundo cada um dos respectivos vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, e $\mathbf{e}_3$.

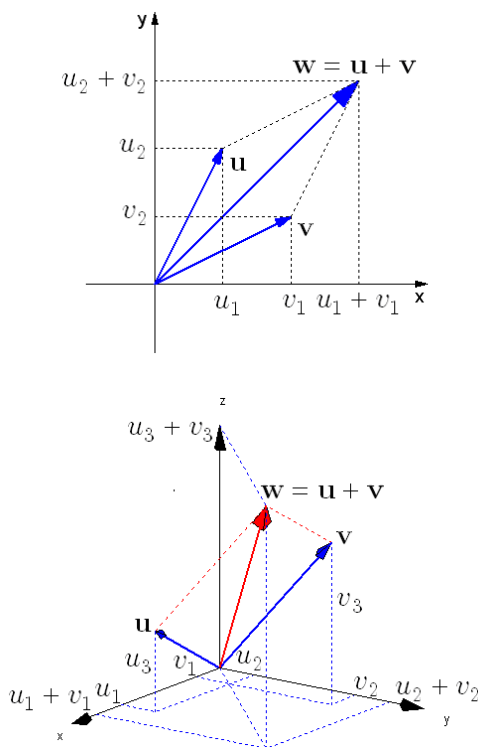


Figura 9.4

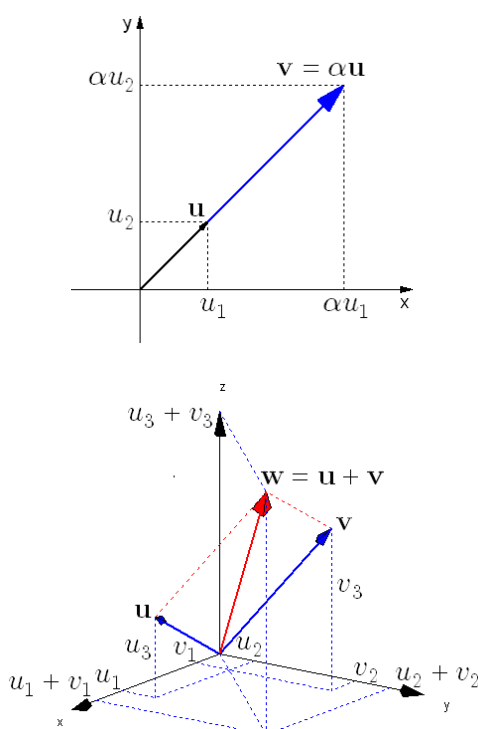


Figura 9.5

Soma de vectores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

O vector **soma de dois vectores** de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$, é o vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ de coordenadas $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, ou seja, resultante da soma ordenada das componentes segundo cada um dos versores

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) + (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\ &= (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2 \\ &= w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

O vector **soma de dois vectores** de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, é o vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ de coordenadas $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) + (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \\ &= (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3 + v_3)\mathbf{e}_3 \\ &= w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Produto de um escalar por um vector em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

O produto de um escalar α por um vector $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^2$ é o vector $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ de coordenadas $(\alpha u_1, \alpha u_2)$, ou seja, resultante do produto do escalar pelas componentes segundo cada um dos versores

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \alpha\mathbf{u} \\ &= \alpha(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) = (\alpha u_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha u_2)\mathbf{e}_2 \\ &= v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

O produto de um escalar α por um vector $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^3$ é o vector $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ de coordenadas $(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \alpha\mathbf{u} \\ &= \alpha(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \\ &= (\alpha u_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha u_2)\mathbf{e}_2 + (\alpha u_3)\mathbf{e}_3 \\ &= v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Exemplos

1. O vector que tem origem no ponto $A = (-2, 2)$ e extremidade no ponto $B = (2, 4)$, $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, é igual ao vector na posição canónica (com ponto inicial na origem do referencial)

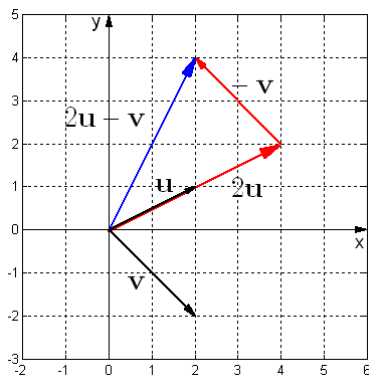
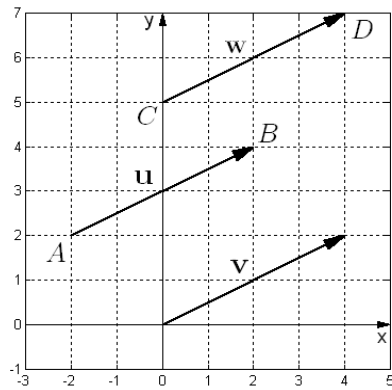


Figura 9.6

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= B - A \\ &= (2, 4) - (-2, 2) \\ &= (2 + 2, 4 - 2) \\ &= (4, 2) \end{aligned}$$

, ou ainda, igual ao vector $\mathbf{w} = \overline{CD}$ com origem no ponto $C = (0, 5)$ e extremidade no ponto D

$$\begin{aligned} D &= C + \mathbf{v} \\ &= (0, 5) + (4, 2) \\ &= (0 + 4, 5 + 2) \\ &= (4, 7) \end{aligned}$$

, ou seja, $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{w} = (4, 2) = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

2. Dados os vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, o vector $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= 2\mathbf{u} - \mathbf{v} \\ &= 2(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - (2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) \\ &= 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \\ &= 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

, ou, $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v} = 2(2, 1) - (2, -2) = (4, 2) - (2, -2) = (2, 4)$.

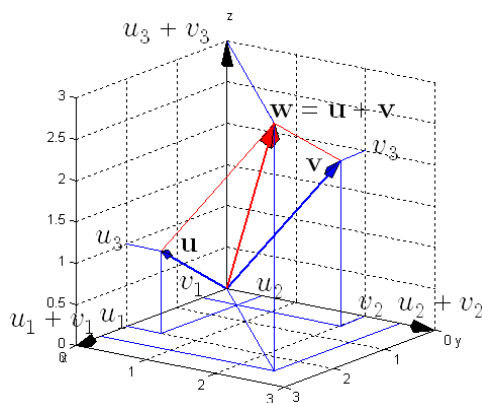


Figura 9.7



```
>> u=[2 1];
>> v=[2 -2];
>> w=2*u-v
w =
    2    4
```

3. Dados os vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 0.5\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = 0.5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, o vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ &= (2\mathbf{e}_1 + 0.5\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3) + (0.5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \\ &= 2.5\mathbf{e}_1 + 2.5\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$



```
>> u=[2 0.5 1];
>> v=[0.5 2 2];
>> w=u+v
w =
    2.5000    2.5000    3.0000
```

9.3. Vectores em $\mathbb{R}^n$.

Sendo n um inteiro positivo, define-se o **espaço** $\mathbb{R}^n$ como o conjunto de todas as seqüências ordenadas de n números reais, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, (ditas **n-uplos**).

Tal como em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, os elementos de $\mathbb{R}^n$ podem ser interpretados como pontos, ou como vectores, num espaço n -dimensional.

Exemplos

4. $\mathbb{R}^1$ é o conjunto de todos os números reais que representamos sobre um eixo orientado $\mathbf{x}$. $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de todos os pares ordenados de números reais, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, que usualmente representamos geometricamente no plano 2D recorrendo a um sistema de eixos cartesiano $\mathbf{xy}$. $\mathbb{R}^3$ é o conjunto de todos os ternos ordenados de números reais, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, que usualmente representamos geometricamente no espaço 3D recorrendo a um sistema de eixos cartesiano $\mathbf{xyz}$. $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^6$, ..., $\mathbb{R}^n$, é o conjunto de todos os quádruplos, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, quintuplos, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, sêxtuplos, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, ..., n -uplos, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que não podemos representar geometricamente, mas que podemos continuar a pensar como pontos, ou vectores, de um espaço 4D, 5D, 6D, ..., n D.

9.4. Vectores iguais.

Em $\mathbb{R}^n$, dois **vectores**, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, são **iguais** se, ordenadamente, cada uma das suas coordenadas é igual

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$$

9.5. Soma de vectores.

O vector **soma de dois vectores**, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, é o vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ cujas coordenadas são a soma ordenada das coordenadas dos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

9.6. Produto de um escalar por um vector.

O produto de um escalar real α por um vector $\mathbf{u}$ é o vector

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n)$$

, dizendo-se que $\mathbf{v}$ é um **múltiplo escalar** de $\mathbf{u}$.

9.7. Notação matricial.

Um vector de $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito em **notação matricial** como uma matriz linha (ou **vector linha**) ou uma matriz coluna (ou **vector coluna**). Temos assim que

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

pode ser escrito na forma da matriz linha

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

ou na forma da matriz coluna

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Utilizando a notação matricial as operações vectoriais de soma e produto por um escalar são idênticas às definidas para as matrizes

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

, e

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} = \alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n \end{bmatrix}$$

Exemplos

5. Em $\mathbb{R}^2$, em alternativa à notação

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$$

, $\mathbf{u}$ pode ser escrito na forma de um vector coluna

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ &= u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6. Dados os vectores de $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{u} = (1, -2, 3, 1)$ e $\mathbf{v} = (3, 1, -1, 0)$ o vector $\mathbf{w} = 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} \\ &= 3 \times (1, -2, 3, 1) - 2 \times (3, 1, -1, 0) \\ &= (3, -6, 9, 3) - (6, 2, -2, 0) \\ &= (-3, -8, 11, 3) \end{aligned}$$

, ou, em notação matricial,

$$\mathbf{w} = 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$$

$$= 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -8 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}$$



```
>> u=[1 -2 3 1]';
>> v=[3 1 -1 0]';
>> w=3*u-2*v
w =
    -3
    -8
    11
     3
```

9.8. Vector nulo. Vector simétrico.

O vector nulo é representado por $\mathbf{0}$ e define-se como sendo o elemento neutro da adição em $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$$

Sendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ um vector de $\mathbb{R}^n$, o vector simétrico de $\mathbf{u}$, representa-se por $-\mathbf{u}$, e é

$$-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$$

, uma vez que

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (-u_1, -u_2, \dots, -u_n) = (0, 0, \dots, 0) = \mathbf{0}$$

9.9. Propriedades da soma e do produto por um escalar.

As propriedades da soma de vectores e do produto de um vector por um escalar real são idênticas às conhecidas para vectores livres.

Sendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dois vectores em $\mathbb{R}^n$, e α e β dois escalares, temos

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{0}) = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$