

AULA 11

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Subespaço.

Subespaço gerado.

Base e dimensão.

Mudança de base.

11. Subespaço, Base e Dimensão.

11.1. Subespaço .

Seja $\mathbb{E}$ um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Qualquer conjunto não vazio $\mathbb{W} \subset \mathbb{E}$ que seja fechado relativamente à soma vectorial e ao produto escalar designa-se por subespaço vectorial de $\mathbb{E}$. Ou seja:

Se $\mathbb{W}$ é um subconjunto não vazio de um espaço vectorial $\mathbb{E}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, dizemos que $\mathbb{W}$ é um **subespaço** de $\mathbb{E}$ se:

1. $\forall \mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ pertencentes a $\mathbb{W}$, $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ pertence a $\mathbb{W}$.
2. $\forall \mathbf{u}$ pertencente a $\mathbb{W}$ e $\forall k \in \mathbb{K}$, $k\mathbf{u}$ pertence a $\mathbb{W}$.

Saliente-se que o fecho relativamente ao produto escalar implica que todos os subespaços contêm o vector nulo (basta considerar $k = 0$ em 2.).

Exemplos

1. Num espaço vectorial $\mathbb{E}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, $\{\mathbf{0}\}$ e $\mathbb{E}$ são subespaços vectoriais (designados por *subespaços triviais*).
2. O conjunto das funções polinomiais de grau igual ou inferior a n $\mathcal{P}_n$, é um subespaço vectorial do conjunto das funções polinomiais sem restrição de grau $\mathcal{P}$.
3. O conjunto das funções polinomiais sem restrição de grau $\mathcal{P}$ (dado que todas as funções polinomiais são diferenciáveis) é um subespaço vectorial do conjunto das funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$.
4. O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis, $\mathcal{C}^\infty$, é um subespaço vectorial do conjunto de funções continuamente diferenciáveis até à ordem n , $\mathcal{C}^n$.
5. O conjunto de funções continuamente diferenciáveis até à ordem n , $\mathcal{C}^n$, é um subespaço vectorial do conjunto de funções com primeira derivada contínua, $\mathcal{C}^1$.
6. O conjunto de funções com primeira derivada contínua, $\mathcal{C}^1$, dado que todas as funções diferenciáveis são contínuas, é um subespaço vectorial do conjunto de funções

contínuas $\mathcal{C}$. O conjunto das funções contínuas em $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}$, é um subespaço vectorial do conjunto de funções definidas para todos os valores reais $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

7. O conjunto dos inteiros, $\mathbb{Z}$, não é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$, dado que não é fechado para a multiplicação escalar: o produto de qualquer escalar não inteiro por um inteiro não é um inteiro.

8. $\mathbb{R}^2$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, dado que $\mathbb{R}^2$ é um conjunto de pares ordenados, e portanto não é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$, que é o conjunto de ternos ordenados de números reais. No entanto, o plano $\mathbb{W} = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

11.2. Subespaço gerado.

Se $\mathbb{W}$ é um subespaço de um espaço vectorial $\mathbb{E}$, dizemos que os vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{W}$ **geram** $\mathbb{W}$, ou que $\mathbb{V} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ é um **conjunto de geradores** de $\mathbb{W}$, se qualquer vector de $\mathbb{W}$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$. Dizemos que $\mathbb{W}$ é o **subespaço gerado** por $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ e escrevemos $\mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ ou $\mathbb{W} = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$.

Ou seja, o conjunto de todas as combinações lineares de um conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset \mathbb{E}$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{E}$ designado por **subespaço gerado** por $\mathbb{V}$.

Exemplos

9. Em $\mathbb{R}^4$, o subespaço gerado pelo conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$, com $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$ é coincidente com $\mathbb{R}^4$.

Escrevendo um qualquer vector $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ como combinação linear de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_4$, temos

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3 + k_4\mathbf{e}_4$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

A resolução do sistema é imediata, dado que a matriz já está na forma escalonada reduzida. Concluímos que o sistema é possível e determinado para quaisquer valores de x_1, x_2, x_3 e x_4 . Assim, o subespaço gerado por $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_4$ é constituído por todos os vectores $\mathbf{u} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ sem restrições, ou seja, é coincidente com $\mathbb{R}^4$

$$\mathbb{W} = L((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)) = \mathbb{R}^4$$

10. O espaço das funções polinomiais de grau menor ou igual a 3, $\mathcal{P}_3$, é gerado pelo conjunto de vectores $\mathbb{P} = \{1, x, x^2, x^3\}$ dado que, por definição, $\mathcal{P}_3$ é o conjunto de funções polinomiais da forma $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, ou seja, o conjunto de todas as possíveis combinações lineares dos vectores do conjunto $\mathbb{P}$.

11.3. Base e dimensão.

Se $\mathbb{W}$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{E}$, dizemos que o conjunto de vectores $\mathbb{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{W}$ é uma **base** de $\mathbb{W}$ se:

1. $\mathbb{U}$ é um conjunto de geradores de $\mathbb{W}$
2. $\mathbb{U}$ é linearmente independente.

Se $\mathbb{W}$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{E}$ e $\mathbb{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{W}$ é uma base de $\mathbb{W}$, prova-se que todas as bases de $\mathbb{W}$ têm o mesmo número k de elementos. A **dimensão** de $\mathbb{W}$, $\dim(\mathbb{W})$, é o número k de elementos de uma qualquer base de $\mathbb{W}$.

Se $\dim(\mathbb{W}) = k$, qualquer conjunto de k vectores linearmente independentes pertencentes a $\mathbb{W}$ é uma base de $\mathbb{W}$, e qualquer conjunto de mais de k vectores de $\mathbb{W}$ é linearmente dependente.

Um espaço vectorial pode ter um número infinito de vectores linearmente independentes (isto é, existem conjuntos linearmente independentes com tantos vectores quantos quisermos), como é o caso da maioria dos espaços de funções, dizendo-se então um **espaço de dimensão infinita**.

Exemplos

11. Para além de gerar $\mathbb{R}^4$, o conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ é linearmente independente, dado que a equação $k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3 + k_4\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$ só possui a solução trivial $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = \mathbf{0}$. Temos

$$k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3 + k_4\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é sempre possível, admitindo apenas a solução trivial $[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, logo os vectores são linearmente independentes.

Dado que geram $\mathbb{R}^4$ e são linearmente independentes, os vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$ são uma base de $\mathbb{R}^4$.

Todas as bases de $\mathbb{R}^4$ têm 4 vectores, ou seja, $\mathbb{R}^4$ tem dimensão 4, $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Qualquer conjunto de 4 vectores linearmente independentes pertencentes a $\mathbb{R}^4$ é uma base de $\mathbb{R}^4$, e qualquer conjunto de mais de 4 vectores é linearmente dependente. Os vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_4$ formam a base canónica de $\mathbb{R}^4$.

12. Os vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, geram $\mathbb{R}^2$ e são linearmente independentes. Formam a base canónica de $\mathbb{R}^2$. Os vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ geram $\mathbb{R}^3$ e são linearmente independentes. Formam a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Os vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ geram $\mathbb{R}^n$ e são

linearmente independentes. Formam a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

13. O conjunto de vectores

$$\mathbb{P} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

constitui a base canónica do espaço das funções polinomiais de grau menor ou igual n , $\mathcal{P}_n$. Por isso, $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$.

14. $\mathcal{P}_n$ é um exemplo de um espaço de funções de dimensão finita. O espaço de funções polinomiais sem restrição de grau, $\mathcal{P}$, é um espaço de dimensão infinita, visto que $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ é linearmente independente $\forall n \in \mathbb{N}$. O espaço das funções contínuas $\mathcal{C}$ tem dimensão infinita. Não há nenhum conjunto finito de vectores que seja base desse espaço.

15. O conjunto de vectores $\mathbb{P} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ sendo, como vimos, linearmente independente e em número igual à dimensão do espaço de funções polinomiais de grau menor ou igual a 2, constitui uma base de $\mathcal{P}_2$.

16. Define-se o sinal **impulso unitário** discreto por

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & , n \neq 0 \\ 1 & , n = 0 \end{cases} \quad , \forall n \in \mathbb{Z}$$

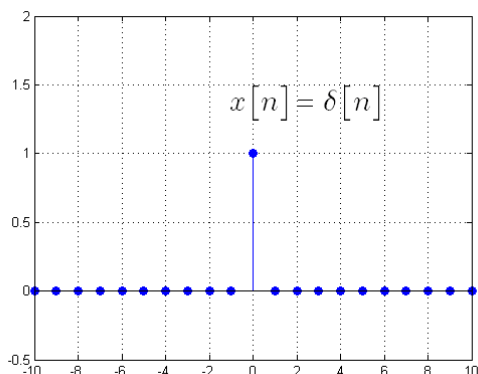


Figura 11.1

Qualquer sinal discreto pode exprimir-se como combinação linear, infinita, do sinal impulso unitário

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \delta[n - k]$$

, com $\alpha_k \in \mathbb{C}$. O espaço de sinais discretos, $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, tem dimensão infinita, visto que as funções $(n \rightarrow \delta[n - k])$, $|k| \leq m$, são linearmente independentes $\forall m \in \mathbb{N}$.

17. O espaço de sinais discretos, $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, de duração limitada, $n \in [0, \dots, N - 1]$, tem dimensão finita N . O conjunto de vectores

$$\mathbb{U} = \{\delta[n], \delta[n - 1], \dots, \delta[n - N + 1]\}$$

constitui uma base de sinais discretos de duração limitada N . Qualquer sinal discreto de dimensão N pode exprimir-se como combinação linear, finita, do sinal impulso unitário

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \delta[n - k]$$

, com $\alpha_k \in \mathbb{C}$.

11.4. Mudança de base.

Seja $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ e $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$ duas bases de um subespaço de $\mathbb{E}$, um qualquer vector do subespaço, $\mathbf{v}$, expresso na base $\mathcal{U}$ e na base $\mathcal{W}$, respectivamente,

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots + a_k \mathbf{u}_k$$

e

$$\mathbf{v} = b_1 \mathbf{w}_1 + b_2 \mathbf{w}_2 + \dots + b_k \mathbf{w}_k$$

tem coordenadas únicas em cada uma das bases, $[v]_{\mathcal{U}} = [a_1, a_2, \dots, a_k]^T$ e $[v]_{\mathcal{W}} = [b_1, b_2, \dots, b_k]^T$ relacionadas por uma matriz quadrada invertível, $M_{k \times k}$, chamada **matriz de mudança de base**,

$$[v]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{U}} [v]_{\mathcal{W}}$$

$$[v]_{\mathcal{W}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{W}} [v]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{U}}^{-1} [v]_{\mathcal{U}}$$

A matriz de transição da base $\mathcal{W}$ para a base $\mathcal{U}$ é dada por

$$M_{\mathcal{W}\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} [w_1]_{\mathcal{U}} & [w_2]_{\mathcal{U}} & \dots & [w_k]_{\mathcal{U}} \end{bmatrix}$$

em que $[w_i]_{\mathcal{U}}$ é o vector coluna das coordenadas do vector $\mathbf{w}_i$ na base $\mathcal{U}$.

Exemplos

18. Em $\mathbb{R}^2$, consideremos a base canónica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ e a base $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, com $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, e o vector $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$.

Consideremos o problema de, sendo conhecida a representação de $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{W}$, encontrar a representação de $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{E}$

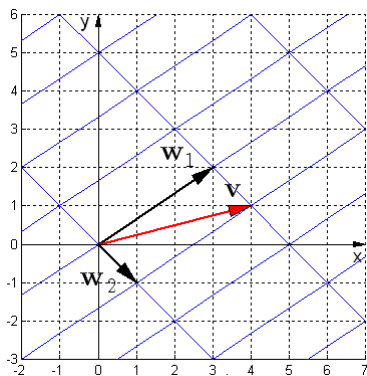


Figura 11.2

$$[v]_{\mathcal{W}} \rightarrow [v]_{\mathcal{E}}$$

Dado que

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

, que é a resposta procurada (como podemos verificar na figura).

De outro modo, poderíamos ter em atenção que, sendo

$$\mathbf{w}_1 = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{w}_2 = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

então

$$[\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2] = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \\ &= [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Ou ainda, atendendo ao conceito de matriz de mudança de base, sendo conhecido $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, e $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, temos simplesmente

$$\begin{aligned} [v]_{\mathcal{E}} &= M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} [w_1]_{\mathcal{E}} & [w_2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} [v]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$