

AULA 13

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

TÓPICOS

Exercícios.

13. Exercícios.

DETERMINAR UMA BASE DE UM SUBESPAÇO.

13.1. Determinar uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$

$$\mathbb{W} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x - y + 2z = 0) \wedge (w - x - z = 0) \right\}$$

Uma vez que qualquer conjunto de k vectores linearmente independentes pertencentes a $\mathbb{W}$ é uma base de $\mathbb{W}$, sendo k a dimensão do subespaço, a solução particular encontrada depende do método utilizado na sua determinação.

Dadas as restrições impostas, temos o sistemas de equações

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ w - x - z = 0 \end{cases}$$

Fazendo

$$\begin{cases} y = x + 2z \\ w = x + z \end{cases}$$

, o que corresponde a considerar x e z como variáveis livres, e y e w como variáveis principais, resulta que os vectores $\mathbf{u} = (x, y, z, w)$ pertencentes ao subespaço são da forma

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x + 2z \\ z \\ x + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2z \\ z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, são uma combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1)$ e $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 1, 1)$. Dado que $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são linearmente independentes fica assim determinada uma base de $\mathbb{W}$.

Se analisarmos formalmente o sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ w - x - z = 0 \end{cases}$$

, ou seja, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



```
>> A=[1 -1 2 0;-1 0 -1 1];
>> B=[0 0]';
>> rref([A B])
ans =
```

```
1 0 1 -1 0
0 1 -1 -1 0
```

, concluímos que o sistema é possível e indeterminado, sendo x e y variáveis principais e z e w variáveis livres, as soluções do sistema são da forma

$$\begin{cases} x = w - z \\ y = w + z \end{cases}$$

ou seja

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w - z \\ w + z \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ w \\ 0 \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são portanto uma combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (-1, 1, 1, 0)$. Dado que $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_3$ são linearmente independentes, fica assim determinada uma outra base de $\mathbb{W}$. Note-se que $\mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_2$. O subespaço $\mathbb{W}$ tem dimensão 2; quaisquer 2 vectores linearmente independentes pertencentes $\mathbb{W}$ são uma base de $\mathbb{W}$.

REPRESENTAR UM VECTOR EM BASES DIFERENTES.

13.2. Vimos num exemplo anterior que, em $\mathbb{R}^2$, dadas a base canónica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ e a base $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, com $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, sendo conhecida a representação de $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{W}$, $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, podemos encontrar a representação de $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{E}$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$$

, atendendo ao conceito de matriz de transição,

$$\begin{aligned} [v]_{\mathcal{E}} &= M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{w}_1]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{w}_2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} [v]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Caso fosse conhecida a representação de $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{E}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, e se pretendesse encontrar a representação de $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{W}$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}}$$

, deveríamos ter em atenção que

$$[v]_{\mathcal{W}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{E}}^{-1} [v]_{\mathcal{E}}$$

logo

$$\begin{aligned} [v]_{\mathcal{W}} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou seja $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$.

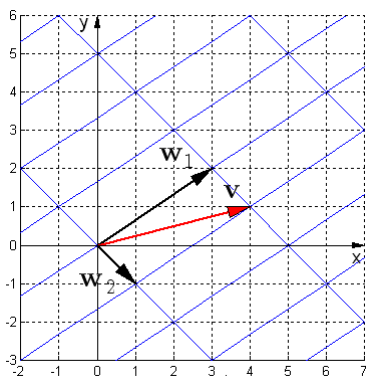


Figura 13.1

13.3. Em $\mathbb{R}^2$, consideremos a base canónica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, a base $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, com $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, e o vector $\mathbf{v} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Consideremos o problema de, sendo conhecida a representação de $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{E}$, encontrar a representação de $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{U}$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

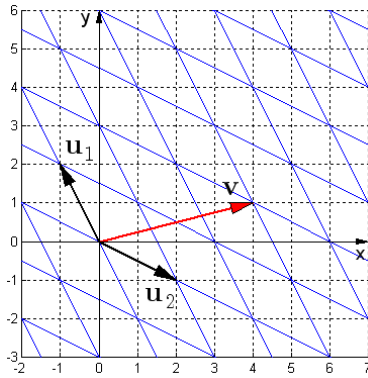


Figura 13.2

Sendo conhecida a matriz de transição da base $\mathcal{U}$ para a base $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{U}\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

, e dado que

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{U}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1}$$

temos

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

, ou seja, $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$.

13.4. Em $\mathbb{R}^2$, consideremos a base $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, com $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, a base $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, com $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, e $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Pretendemos encontrar a representação de $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{U}$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

Com os dados do problema, é fácil determinar as matrizes de transição das base $\mathcal{W}$ e $\mathcal{U}$ para a base canónica

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ M_{\mathcal{U}\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pelo que, considerando a representação intermédia de $\mathbf{v}$ na base canónica

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

, sendo

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{W}}$$

e

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{U}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{U}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$$

resulta

$$\begin{aligned} [v]_{\mathcal{U}} &= M_{\mathcal{U}\mathcal{E}}^{-1} M_{\mathcal{W}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{W}} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

, ou seja, $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$.



```
>> u1=[-1 2]';
>> u2=[2 -1]';
>> w1=[3 2]';
>> w2=[1 -1]';
>> Mwe=[w1 w2];
>> Mue=[u1 u2];
>> vw=[1 1]';
>> vu=inv(Mue)*Mwe*vw
vu =
    2.0000
    3.0000
```

INDEPENDÊNCIA LINEAR EM ESPAÇOS DE FUNÇÕES.

13.5. Verificar se $p(x) = 3x^2$ pertence ao subespaço de $\mathcal{P}_2$ gerado por $q(x) = 1 - x + 2x^2$ e $r(x) = 2 - 2x + x^2$.

Trata-se de verificar se o vector $p(x)$ pertence ao espaço gerado pelos vectores $q(x)$ e $r(x)$, ou seja, verificar se existem escalares k_1 e k_2 tais que $p(x) = k_1 q(x) + k_2 r(x)$. Temos então

$$\begin{aligned} p(x) &= k_1 q(x) + k_2 r(x) \\ 3x^2 &= k_1(1 - x + 2x^2) + k_2(2 - 2x + x^2) \\ &= k_1 - k_1 x + 2k_1 x^2 + 2k_2 - 2k_2 x + k_2 x^2 \\ &= (k_1 + 2k_2) + (-k_1 - 2k_2)x + (2k_1 + k_2)x^2 \end{aligned}$$

, o que implica

$$\begin{cases} 0 = k_1 + 2k_2 \\ 0 = -k_1 - 2k_2 \\ 3 = 2k_1 + k_2 \end{cases}$$

, ou seja, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

O sistema é possível e determinado

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, sendo, portanto, $k_1 = 2$ e $k_2 = -1$. Ou seja, $p(x) = 2q(x) - 1r(x)$.

13.6. Verificar se os vectores 1 , e^x , e e^{2x} são linearmente independentes.

Recorrendo ao Wronskiano dos vectores, temos

$$\det \begin{bmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{bmatrix} = 4e^{3x} - 2e^{3x} = 2e^{3x}$$

Dado que o determinante não é nulo para todo o x , os vectores são linearmente independentes.

MUDANÇA DE BASE EM ESPAÇOS DE FUNÇÕES.

13.7. Escrever o vector $1 + 2x - x^2$ na base $\mathcal{P} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$.

Temos

$$k_1(1 + x) + k_2(x + x^2) + k_3(1 + x^2) = 1 + 2x - x^2$$

$$k_1 + k_1x + k_2x + k_2x^2 + k_3 + k_3x^2 = 1 + 2x - x^2$$

$$(k_1 + k_3) + (k_1 + k_2)x + (k_2 + k_3)x^2 = 1 + 2x - x^2$$

, o que implica

$$k_1 + k_3 = 1$$

$$k_1 + k_2 = 2$$

$$k_2 + k_3 = -1$$

, ou seja, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e, dado que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

temos

$$1 + 2x - x^2 = 2(1 + x) + 0(x + x^2) - 1(1 + x^2)$$

13.8. À semelhança de $\mathbb{R}^n$ podemos analisar o problema anterior recorrendo ao conceito de matriz de mudança de base.

Considerando a base canónica de $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, podemos escrever o vector $p(x) = 1 + 2x - x^2$ na forma $(1, 2, -1)_{\mathcal{B}}$, isto é, explicitando apenas as coordenadas do vector na base canónica. Por outro lado, dado que conhecemos as coordenadas dos vectores da base $\mathcal{P} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ na base canónica, $\mathcal{P} = \{(1, 1, 0)_{\mathcal{B}}, (0, 1, 1)_{\mathcal{B}}, (1, 0, 1)_{\mathcal{B}}\}$, a escrita da matriz de mudança da base $\mathcal{P}$ para a base $\mathcal{B}$, $M_{\mathcal{P}\mathcal{B}}$, é imediata, dado ser a matriz cujas colunas correspondem às coordenadas dos vectores p_i na base $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{P}\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} [p_1]_{\mathcal{B}} & [p_2]_{\mathcal{B}} & [p_3]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resulta então

$$\begin{aligned} [p(x)]_{\mathcal{P}} &= M_{\mathcal{B}\mathcal{P}} [p(x)]_{\mathcal{B}} \\ &= M_{\mathcal{P}\mathcal{B}}^{-1} [p(x)]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

, tal como tínhamos calculado no exemplo anterior.