

# AULA 14

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

## TÓPICOS

Transformação linear.
Classificação de transformações lineares.
Matriz de uma transformação linear
Matriz de uma transformação linear e mudança de base.
Imagem e núcleo de uma transformação linear.
Operações com transformações lineares.
Transformações lineares elementares em $\mathbb{R}^2$ .
Transformações lineares elementares em $\mathbb{R}^3$ .

## 14. Transformações lineares.

### 14.1. Transformação linear.

1. Sejam  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{E}'$  espaços vectoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Uma função  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  é uma **transformação** (aplicação, função) **linear** se:

$$1. T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$$

$$2. T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

, ou, equivalentemente,

$$T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$$

, para quaisquer  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .

2. Resulta imediatamente da definição que

$$T(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}'}$$

, ou seja, a imagem do vector nulo de  $\mathbb{E}$  é o vector nulo de  $\mathbb{E}'$ . Com efeito

$$T(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = T(0 \mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = 0 T(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}'}$$

3. Sejam  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{E}'$  espaços vectoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{E}$  com dimensão finita,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  uma base de  $\mathbb{E}$ , e  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  quaisquer  $n$  vectores de  $\mathbb{E}'$ . Então existe uma e só uma transformação linear  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  tal que

$$T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i \quad , \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Quer isto dizer que uma aplicação linear cujo domínio é um espaço vectorial de dimensão finita fica perfeitamente definida quando se conhecem as imagens dos vectores de uma qualquer base desse domínio.

### 14.2. Classificação de transformações lineares.

Usam-se termos específicos para classificar as transformações lineares quanto à injectividade, sobrejectividade, etc.. Apresentam-se em seguida estes termos.

Sejam  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{E}'$  espaços vectoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$  e seja  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  uma transformação linear.

1.  $T$  diz-se um **homomorfismo** de  $\mathbb{E}$  em  $\mathbb{E}'$ . (gr. homo: igual; morfo: forma).
2. Se  $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$ , ou seja,  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $T$  diz-se um **endomorfismo** em  $\mathbb{E}$ . (gr. endo: no interior de).
3. Se  $T$  é injectiva,  $T$  diz-se um **monomorfismo** de  $\mathbb{E}$  em  $\mathbb{E}'$ . (gr. mono: único).
4. Se  $T$  é sobrejectiva,  $T$  diz-se um **epimorfismo** de  $\mathbb{E}$  em  $\mathbb{E}'$ . (gr. epi: sobre).
5. Se  $T$  é bijectiva,  $T$  diz-se um **isomorfismo** de  $\mathbb{E}$  em  $\mathbb{E}'$ . (gr. iso: igual).
6. Se  $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$  e  $T$  é bijectiva,  $T$  diz-se um **automorfismo** em  $\mathbb{E}$ . (gr. auto: em si mesmo).

### 14.3. Matriz de uma transformação linear.

Sejam  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{E}'$  espaços vectoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , com dimensões  $n$  e  $m$ , respectivamente. Seja  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  uma base de  $\mathbb{E}$  e  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$  uma base de  $\mathbb{E}'$ . Tem-se que:

1. A qualquer transformação linear  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  corresponde uma e uma só matriz  $\mathbf{A}$  do tipo  $m \times n$ , e vice-versa.
2. A matriz  $\mathbf{A}$  correspondente à transformação  $T$ , dita **matriz da transformação (relativa às bases escolhidas)**, tem por colunas as coordenadas dos transformados da base de  $\mathbb{E}$  na base de  $\mathbb{E}'$ . Ou seja, sendo

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{u}_m \\ T(\mathbf{e}_2) &= a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{u}_m \\ &\dots \\ T(\mathbf{e}_n) &= a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{u}_m \end{aligned}$$

, temos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3. Sendo  $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + \dots + y_m\mathbf{u}_m$  o vector de  $\mathbb{E}'$  que é o transformado de um vector  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$  de  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$  equivale a  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ [\mathbf{x}]_{\mathbb{E}'} &= \left[ [\mathbf{e}_1]_{\mathbb{E}'} \mid [\mathbf{e}_2]_{\mathbb{E}'} \mid \dots \mid [\mathbf{e}_n]_{\mathbb{E}'} \right] [\mathbf{x}]_{\mathbb{E}} \end{aligned}$$

4. Em particular, se  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma transformação linear,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  a base canónica de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \dots + u_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ , então existe uma e uma só matriz real  $\mathbf{A}_{m \times n}$  tal que

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

$\mathbf{A}$  é chamada **matriz** (canónica) **da transformação**

$$\mathbf{A} = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \dots \mid T(\mathbf{e}_n)]$$

, em que,  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $T(\mathbf{e}_k)$  é o vector coluna que resulta da calcular a imagem de  $\mathbf{e}_k$  por meio de  $T$ .

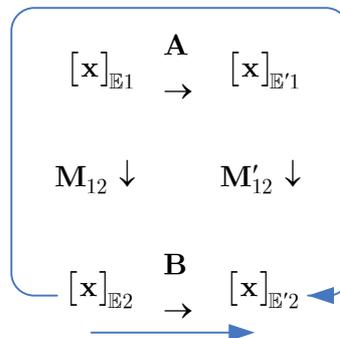
### 14.4. Matriz de uma transformação linear e mudança de base.

Sejam  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{E}'$  espaços vectoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$  e seja  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  uma transformação linear. Interessa relacionar as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  da transformação linear  $T$  em bases diferentes de  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{E}'$ .

Seja  $[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}'1}$  o vector de  $\mathbb{E}'$  o transformado de um vector  $[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}1}$  de  $\mathbb{E}$  em duas quaisquer bases de  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{E}'$  e  $\mathbf{A}$  a matriz da transformação relativa às bases escolhidas.

Seja  $[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}'2}$  o vector de  $\mathbb{E}'$  o transformado de um vector  $[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}2}$  de  $\mathbb{E}$  em quaisquer outras duas bases de  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{E}'$  e  $\mathbf{B}$  a matriz da transformação relativa às bases escolhidas.

Sejam  $\mathbf{M}_{12}$  e  $\mathbf{M}'_{12}$  as matrizes de mudança de base entre as duas bases escolhidas em  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{E}'$ , ou seja,  $[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}2} = \mathbf{M}_{12}[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}1}$  e  $[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}'2} = \mathbf{M}'_{12}[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}'1}$ .



É imediato que (atenda ao esquema acima):

$$[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}'2} = \mathbf{B}[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}2}$$

$$[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}'2} = \mathbf{M}'_{12}\mathbf{A}(\mathbf{M}_{12})^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathbb{E}2}$$

logo

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}'_{12}\mathbf{A}\mathbf{M}_{21}$$

### 14.5. Imagem e núcleo de uma transformação linear.

Sejam  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{E}'$  espaços vectoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$ ,  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  uma transformação linear e  $\mathbf{A}$  a matriz da transformação  $T$  relativa às bases escolhidas em  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{E}'$ .

1. Chama-se **imagem** de  $T$ , e representa-se por  $\text{Im}(T)$ , o contradomínio de  $T$

$$\text{Im}(T) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{E}' : \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{x} \in \mathbb{E}\}$$

2. Sendo  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  uma transformação linear,  $\text{Im}(T)$  é um subespaço de  $\mathbb{E}'$ .

3. À dimensão do espaço imagem chama-se **característica** da aplicação linear

$$\text{Car}(T) = \dim(\text{Im}(T))$$

4. A transformação  $T$  é sobrejectiva sse  $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{E}')$

5.  $\text{Im}(T)$  é o espaço gerado pelos vectores que constituem as colunas de  $\mathbf{A}$ .

6. Sendo  $\text{Car}(\mathbf{A})$  o número de colunas linearmente independentes de  $\mathbf{A}$  então

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{Car}(T) = \text{Car}(\mathbf{A})$$

7. Chama-se **núcleo** de  $T$ , e representa-se por  $\text{Nuc}(T)$  ou  $\text{Ker}(T)$ , o conjunto de vectores de  $\mathbb{E}$  cuja imagem é o vector nulo de  $\mathbb{E}'$ ,

$$\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E} : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}'}\}$$

8. Sendo  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  uma transformação linear,  $\text{Ker}(T)$  é um subespaço de  $\mathbb{E}$ .

9. À dimensão do núcleo de  $T$  chama-se **nulidade** da aplicação linear.

10. A transformação  $T$  é injectiva sse  $\text{Nuc}(T) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$ .

11.  $\text{Nuc}(T)$  é o conjunto de soluções do sistema homogéneo  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ , que é o núcleo da matriz  $\mathbf{A}$ , sendo

$$\dim(\text{Nuc}(T)) = \dim(\text{Nuc}(\mathbf{A}))$$

e igual ao grau de indeterminação do sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ .

12. A dimensão de  $\mathbb{E}$  é a soma das dimensões do núcleo e da imagem de  $T$

$$\dim(\mathbb{E}) = \dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

### 14.6. Operações com transformações lineares.

Sejam  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{E}'$  espaços vectoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , com dimensões  $n$  e  $m$ , respectivamente. Escolhidas uma base em  $\mathbb{E}$  e outra em  $\mathbb{E}'$ , sejam  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  e  $S : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  aplicações lineares representadas pelas matrizes  $\mathbf{A}_T$  e  $\mathbf{A}_S$ , respectivamente. Seja  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

#### Adição

Chama-se adição de  $T$  com  $S$  à transformação linear  $T + S : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  tal que

$$(T + S)(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + S(\mathbf{x}) \quad , \mathbf{x} \in \mathbb{E}$$

, sendo

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) + S(\mathbf{x}) &= \mathbf{A}_T \mathbf{x} + \mathbf{A}_S \mathbf{x} \\ &= (\mathbf{A}_T + \mathbf{A}_S) \mathbf{x} \end{aligned}$$

## Multiplicação por um escalar

Chama-se multiplicação do escalar  $\alpha$  pela transformação  $T$  à transformação linear  $\alpha T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  tal que

$$(\alpha T)(\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x}) \quad , \mathbf{x} \in \mathbb{E}$$

, sendo  $\alpha T(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{A} \mathbf{x}$

## Composição

1. Sejam  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{E}'$  e  $\mathbb{E}''$  espaços vectoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$  de dimensões  $n$ ,  $m$  e  $p$ , respectivamente. Escolhidas uma base em  $\mathbb{E}$ , uma base em  $\mathbb{E}'$ , e uma base em  $\mathbb{E}''$ , sejam  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  e  $S : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}''$  transformações lineares representadas pelas matrizes  $\mathbf{A}_T$  (de  $m \times n$ ) e  $\mathbf{A}_S$  (de  $p \times m$ ).

Chama-se **composta** de  $S$  com  $T$ , e escrevemos  $S(T(\mathbf{x}))$  ou  $(S \circ T)(\mathbf{x})$ , à transformação linear  $S \circ T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}''$  tal que

$$(S \circ T)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x})) \quad , \mathbf{x} \in \mathbb{E}$$

, sendo  $(S \circ T)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x})) = \mathbf{A}_T(\mathbf{A}_S \mathbf{x}) = (\mathbf{A}_T \mathbf{A}_S) \mathbf{x}$ , ou seja,  $S \circ T$  tem a matriz

$$\mathbf{A}_{S \circ T} = \mathbf{A}_S \mathbf{A}_T$$

2. Em particular, se  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  é uma transformação linear com matriz canónica  $\mathbf{A}_T$  e  $S : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$  é outra transformação linear com matriz canónica  $\mathbf{A}_S$ , então  $S \circ T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é linear e a sua matriz canónica é

$$\mathbf{A}_{S \circ T} = \mathbf{A}_S \mathbf{A}_T$$

## Inversão

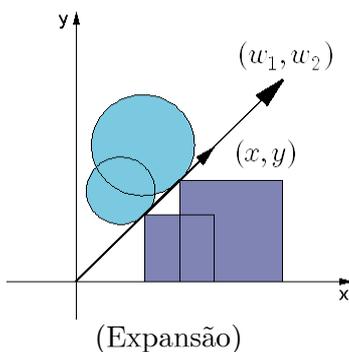
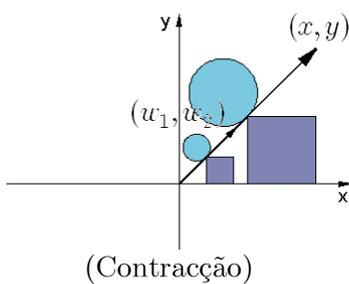
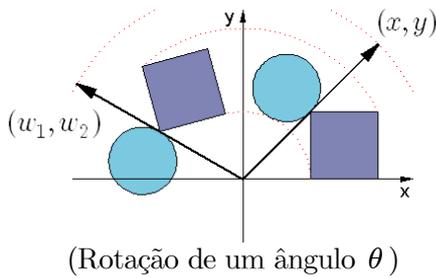
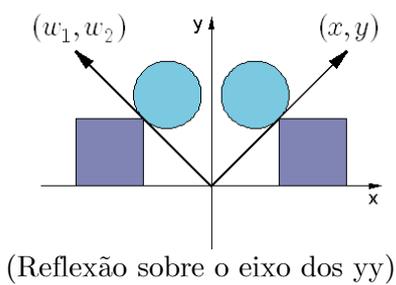
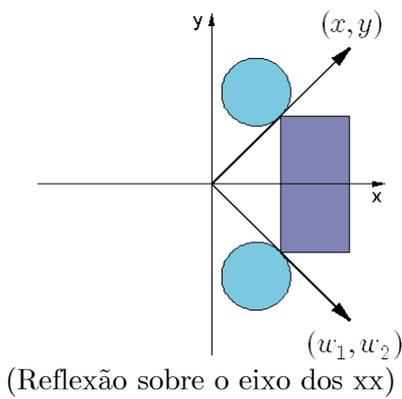
1. Se  $\mathbb{E}$  é um espaço vectorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , a transformação  $I_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  tal que  $I_{\mathbb{E}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$  é linear e designa-se por **identidade** em  $\mathbb{E}$ .

2. Duas transformações quaisquer  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  e  $S : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$  dizem-se **transformações inversas** uma da outra se  $S \circ T = I_{\mathbb{E}}$  e  $T \circ S = I_{\mathbb{E}'}$ . Escrevemos  $S = T^{-1}$  e  $T = S^{-1}$  (uma vez que a inversa, quando existe é única) e dizemos que  $S$  e  $T$  são **invertíveis**. Escolhidas uma base em  $\mathbb{E}$  e outra em  $\mathbb{E}'$ , ambos espaços de dimensão  $n$ , sejam  $T$  e  $S$  representadas pelas matrizes quadradas de ordem  $n$   $\mathbf{A}_T$  e  $\mathbf{A}_S$ , respectivamente. Tem-se  $\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_T^{-1}$  (ou  $\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_S^{-1}$ ), ou seja, a matriz da transformação inversa é igual à inversa da matriz da transformação.

3. Em particular, se  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma transformação linear invertível (um **isomorfismo**), com matriz canónica  $\mathbf{A}_T$ , então  $T^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma transformação linear invertível com matriz canónica

$$\mathbf{A}_{T^{-1}} = \mathbf{A}_T^{-1}$$

### 14.7. Transformações lineares elementares em $\mathbb{R}^2$ .



#### 1. Projecção ortogonal.

Projecção ortogonal sobre o eixo dos  $xx$ .

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x \\ w_2 &= 0 \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Projecção ortogonal sobre o eixo dos  $yy$ .

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= 0 \\ w_2 &= y \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 2. Reflexão.

Reflexão sobre o eixo dos  $xx$ .

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x \\ w_2 &= -y \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Reflexão sobre o eixo dos  $yy$  (figura 25.4).

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= -x \\ w_2 &= y \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 3. Rotação (figura 25.5).

Rotação de um ângulo  $\theta$  no sentido directo

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ w_2 &= x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

#### 4. Contração (figura 25.6).

Contração de um factor  $k$ ,  $T(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$  ( $0 \leq k < 1$ ).

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= kx \\ w_2 &= ky \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

#### 5. Expansão (figura 25.7).

Expansão de um factor  $k$ ,  $T(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$  ( $k > 1$ ).

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= kx \\ w_2 &= ky \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

### 14.8. Transformações lineares elementares em $\mathbb{R}^3$ .

#### 1. Projecção ortogonal.

Projecção ortogonal sobre plano  $xy$ .

Equações

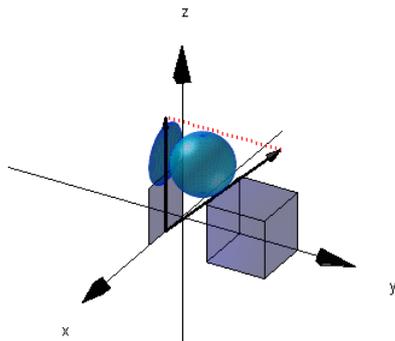
$$w_1 = x$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = 0$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(Projecção ortogonal sobre o plano  $xz$ )

Projecção ortogonal sobre plano  $xz$

Equações

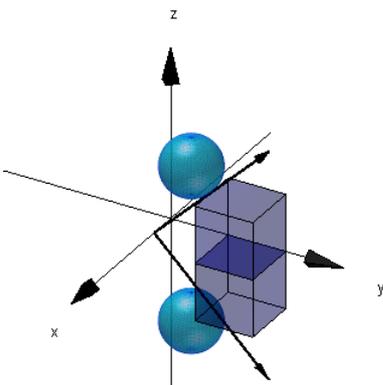
$$w_1 = x$$

$$w_2 = 0$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(Reflexão sobre o plano  $xy$ )

Projecção ortogonal sobre plano  $yz$ .

Equações

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 2. Reflexão.

Reflexão sobre o plano  $xy$ .

Equações

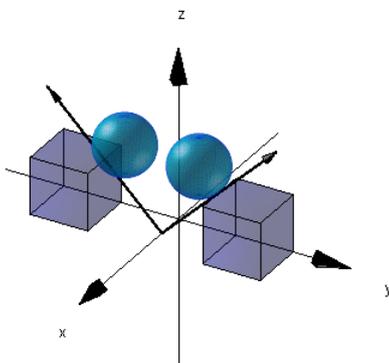
$$w_1 = x$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = -z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



(Reflexão sobre o plano  $xz$ )

Reflexão sobre o plano  $xz$ .

Equações

$$w_1 = x$$

$$w_2 = -y$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão sobre o plano  $yz$ .

Equações

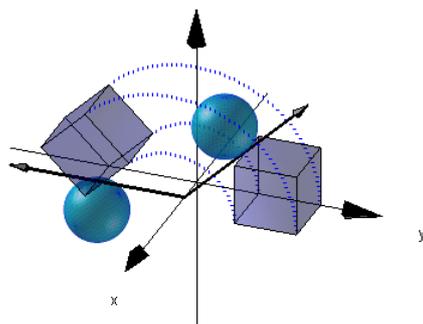
$$w_1 = -x$$

$$w_2 = y$$

$$w_3 = z$$

Matriz de Transformação

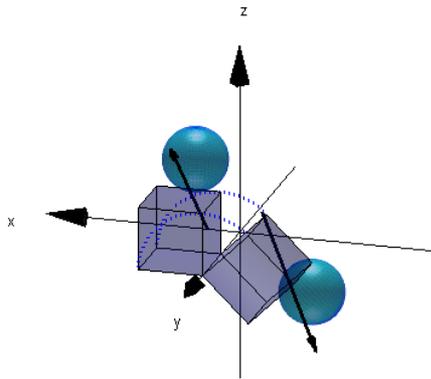
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(Rotação sobre o eixo dos  $xx$ ,  $\theta = 3\pi/4$ )

### 3. Rotação.

Rotação de um ângulo  $\theta$ , no sentido directo, sobre o eixo dos **xx**.



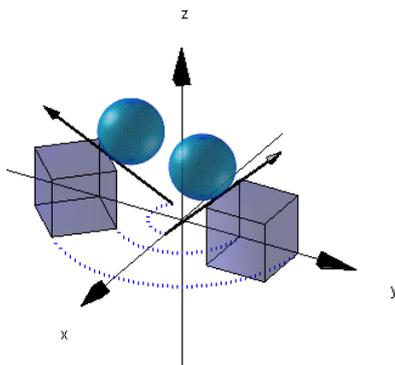
Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x \\ w_2 &= y \cos(\theta) - z \sin(\theta) \\ w_3 &= y \sin(\theta) + z \cos(\theta) \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

(Rotação sobre o eixo dos **yy**,  $\theta = -\pi/4$ )



Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x \cos(\theta) + z \sin(\theta) \\ w_2 &= y \\ w_3 &= -x \sin(\theta) + z \cos(\theta) \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Rotação de um ângulo  $\theta$ , no sentido directo, sobre o eixo dos **zz**.

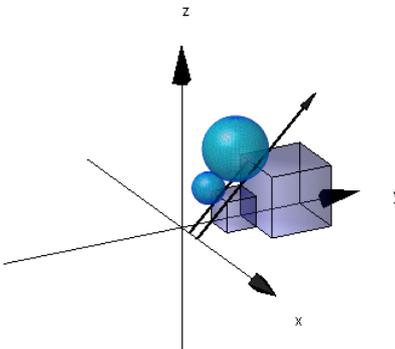
Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ w_2 &= x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\ w_3 &= z \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Rotação sobre o eixo dos **zz**,  $\theta = -3\pi/4$ )



(Contração,  $k = 0.5$ )

### 4. Contração.

Contração de um factor  $k$  ( $0 \leq k < 1$ ).

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= kx \\ w_2 &= ky \\ w_3 &= kz \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

### 5. Expansão.

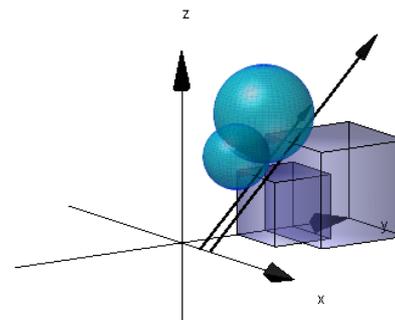
Expansão de um factor  $k$  ( $k > 1$ ).

Equações

$$\begin{aligned} w_1 &= kx \\ w_2 &= ky \\ w_3 &= kz \end{aligned}$$

Matriz de Transformação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$



(Expansão,  $\theta = 1.5$ )