

# AULA 15

- Note bem: a leitura destes apontamentos não dispensa de modo algum a leitura atenta da bibliografia principal da cadeira
- Chama-se a atenção para a importância do trabalho pessoal a realizar pelo aluno resolvendo os problemas apresentados na bibliografia, sem consulta prévia das soluções propostas, análise comparativa entre as suas resposta e a respostas propostas, e posterior exposição junto do docente de todas as dúvidas associadas.

## TÓPICOS

Exercícios.

## 15. Exercícios.

### DEMONSTRAR QUE UMA TRANSFORMAÇÃO É LINEAR.

**15.1.** Se  $\mathbf{A}$  é uma matriz real  $m \times n$  e  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ , a aplicação  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

é uma transformação linear dado que,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) &= \mathbf{A}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{u}) + \mathbf{A}(\beta\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{u}) + \beta(\mathbf{A}\mathbf{v}) \\ &= \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Por exemplo, sendo  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha = -1$  e  $\beta = 4$ , temos

$$\begin{aligned} T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) &= \mathbf{A}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \left( (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 \\ 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) &= \alpha \mathbf{A}\mathbf{u} + \beta \mathbf{A}\mathbf{v} = (-1) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= (-1) \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ 24 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 \\ 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**15.2.** Recorrendo à definição averigue se é linear a transformação

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad T(x, y, z) = (xy, 2y, x + z)$$

Uma função  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  é uma transformação linear se:

1.  $T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$
2.  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

Para o caso presente temos

$$\begin{aligned} T(\alpha \mathbf{u}) &= T(\alpha(x, y, z)) \\ &= (\alpha x \alpha y, 2\alpha y, \alpha x + \alpha z) \\ &= \alpha(\alpha xy, 2y, x + z) \\ &\neq \alpha T(\mathbf{u}) \\ &= \alpha(xy, 2y, x + z) \end{aligned}$$

Logo  $T$  não é uma transformação linear.

**15.3.** Recorrendo à definição averigue se é linear a transformação

$$T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad T(x) = x^2.$$

Uma função  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  é uma transformação linear se:

1.  $T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$
2.  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

Para o caso presente temos

$$\begin{aligned} T(\alpha \mathbf{u}) &= (\alpha x)^2 \\ &= \alpha^2 x^2 \\ &= \alpha \alpha T(\mathbf{u}) \\ &\neq \alpha T(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Logo  $T$  não é uma transformação linear.

**15.4.** Recorrendo à definição averigue se é linear a transformação

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; \quad T(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ x & y & z \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Uma função  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  é uma transformação linear se:

1.  $T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$
2.  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

Para o caso presente temos

$$\begin{aligned}
 T(\alpha \mathbf{u}) &= T(\alpha(x, y, z)) \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \alpha x & \alpha y & \alpha z \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= \alpha \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ x & y & z \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= \alpha T(\mathbf{u})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \\
 &= T((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)) \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= T((x_1, y_1, z_1)) + T((x_2, y_2, z_2)) \\
 &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
 \end{aligned}$$

Logo  $T$  é uma transformação linear.

**15.5.** Recorrendo à definição averigue se é linear a transformação

$$T : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = (x, x + y + w).$$

Uma função  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  é uma transformação linear se:

1.  $T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$
2.  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

Para o caso presente temos

$$\begin{aligned}
 T(\alpha \mathbf{u}) &= T\left(\alpha \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) \\
 &= T\left(\begin{bmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha z & \alpha w \end{bmatrix}\right) \\
 &= (\alpha x, \alpha x + \alpha y + \alpha w) \\
 &= (\alpha x, \alpha(x + y + w)) \\
 &= \alpha(x, x + y + w) \\
 &= \alpha T(\mathbf{u})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= T\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= (x_1 + x_2, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (w_1 + w_2)) \\
&= (x_1 + x_2, (x_1 + y_1 + w_1) + (x_2 + y_2 + w_2)) \\
&= (x_1, x_1 + y_1 + w_1) + (x_2, x_2 + y_2 + w_2) \\
&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Logo  $T$  é uma transformação linear.

### DETERMINAR O NÚCLEO E A IMAGEM DE UMA TL

**15.6.** Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(x, y, z) = (2x + y - 2z, x - y, 3y - 2z)$$

Determine o núcleo e a imagem de  $T$ . Determine uma base e a dimensão destes subespaços. Verifique o teorema envolvendo a nulidade e a característica de  $T$ .

**O**  $\text{Nuc}(T)$  é o conjunto de soluções do sistema homogêneo  $\mathbf{Ax} = 0$ , sendo **A** a matriz da transformação  $T$  relativa a quaisquer bases escolhidas em  $\mathbb{R}^3$ .

Considerando as bases canônicas temos

$$\begin{aligned}
T(x, y, z) &= (2x + y - 2z, x - y, 3y - 2z) \\
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2x + y - 2z \\ x - y \\ 3y - 2z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A transformação tem, relativamente às bases canônicas, a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Logo, sendo  $\text{Nuc}(T)$  o conjunto de soluções do sistema homogêneo  $\mathbf{Ax} = 0$ , temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é simplesmente indeterminado, com  $z$  livre,  $x = 2/3z$  e  $y = 2/3z$ , logo com solução geral

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 z \\ 2/3 z \\ z \end{bmatrix} = \frac{z}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \forall z \in \mathbb{R}$$

Fica assim determinado  $\text{Nuc}(T)$  e uma sua base:

$$\text{Nuc}(T) = L((2, 2, 3)) = \{k(2, 2, 3) : k \in \mathbb{R}\}$$

$\{(2, 2, 3)\}$  é uma base de  $\text{Nuc}(T)$

$$\dim(\text{Nuc}(T)) = 1$$

$\text{Im}(T)$  é o espaço gerado pelos vectores que constituem as colunas de  $\mathbf{A}$ , sendo  $\mathbf{A}$  a matriz da transformação  $T$  relativa a quaisquer bases escolhidas em  $\mathbb{R}^3$ .

Dado que, como vimos, a transformação tem, relativamente às bases canónicas, a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

para determinar  $\text{Im}(T)$  basta deduzir o espaço gerado pelas colunas de  $\mathbf{A}$ . Temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fica assim determinado  $\text{Im}(T)$  e uma sua base:

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= L((1, 0, 1), (0, 1, -2)) \\ &= \{k_1(1, 0, 1) + k_2(0, 1, -2) : k_1, k_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, x - 2y) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - 2y\} \end{aligned}$$

$\{(1, 0, 1), (0, 1, -2)\}$  é uma base de  $\text{Im}(T)$

$$\dim(\text{Im}(T)) = 2$$

Podemos verificar que

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 1 + 2$$

**15.7.** Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(x, y) = (x - y, y - x, 2x - 2y)$$

Determine o núcleo e a imagem de  $T$ . Determine uma base e a dimensão destes subespaços. Verifique o teorema envolvendo a nulidade e a característica de  $T$ .

O  $\text{Nuc}(T)$  é o conjunto de soluções do sistema homogéneo  $\mathbf{Ax} = 0$ , sendo  $\mathbf{A}$  a matriz da transformação  $T$  relativa a quaisquer bases escolhidas em  $\mathbb{R}^3$ .

Considerando as bases canónicas temos

$$\begin{aligned} T(x, y) &= (x - y, y - x, 2x - 2y) \\ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x - y \\ y - x \\ 2x - 2y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A transformação tem, relativamente às bases canónicas, a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Logo, sendo  $\text{Nuc}(T)$  o conjunto de soluções do sistema homogéneo  $\mathbf{Ax} = 0$ , temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é simplesmente indeterminado, com  $y$  livre e  $x = y$ , logo com solução geral

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall y \in \mathbb{R}$$

Fica assim determinado  $\text{Nuc}(T)$  e uma sua base:

$$\text{Nuc}(T) = L((1,1)) = \{k(1,1) : k \in \mathbb{R}\}$$

$$\{(1,1)\} \text{ é uma base de } \text{Nuc}(T)$$

$$\dim(\text{Nuc}(T)) = 1$$

$\text{Im}(T)$  é o espaço gerado pelos vectores que constituem as colunas de  $\mathbf{A}$ , sendo  $\mathbf{A}$  a matriz da transformação  $T$  relativa a quaisquer bases escolhidas em  $\mathbb{R}^3$ .

Dado que, como vimos, a transformação tem, relativamente às bases canónicas, a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

para determinar  $\text{Im}(T)$  basta deduzir o espaço gerado pelas colunas de  $\mathbf{A}$ . Temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fica assim determinado  $\text{Im}(T)$  e uma sua base:

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= L((1, -1, 2)) \\ &= \{(x, -x, 2x) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -x \wedge z = 2x\} \\ \{(1, -1, 2)\} &\text{ é uma base de } \text{Im}(T) \\ \dim(\text{Im}(T)) &= 1 \end{aligned}$$

Podemos verificar que

$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 1 + 1$$

### MOSTRAR QUE UMA TL É INJECTIVA, ETC.

**15.8.** Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(x, y, z) = (2x + y - 2z, x - y, 3y - 2z)$$

Verifique se  $T$  é injectiva e sobrejectiva.

**A transformação  $T$  é injectiva sse  $\text{Nuc}(T) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$ .**

Vimos em 15.6. que  $\text{Nuc}(T) = L((2, 2, 3)) \neq \{(0, 0, 0)\}$ , logo  $T$  não é injectiva.

**A transformação  $T$  é sobrejectiva sse  $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{R}^3)$ .**

Vimos em 15.6. que  $\dim(\text{Im}(T)) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , logo  $T$  não é sobrejectiva.

**15.9.** Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T(x, y, z) = (x - 2z, x + y)$$

Sem efectuar quaisquer cálculos e justificando adequadamente, mostre que  $T$  não é bijectiva.

A transformação não é bijectiva porque, sendo a dimensão do espaço dos objectos superior à dimensão do espaço de chegada a função nunca poderá ser injectiva: para que  $T$  seja injectiva deve ser  $\text{Nuc}(T) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$ , ora, dado que

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

e sendo  $\dim(\text{Im}(T)) \leq 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ , então  $\dim(\text{Nuc}(T)) \geq 1$  logo  $\text{Nuc}(T) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$ .

## CALCULAR A IMAGEM DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR.

**15.10.** Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a matriz canónica de uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , determine  $T(1,2)$ .

Temos

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

A imagem do vector  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$  é o vector  $\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = 6\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3$ .



```
>> A=[2 2; -1 -1;2 3];
>> u=[1 2]';
>> w=A*u
w =
     6
    -3
     8
```

**15.11.** Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a matriz canónica de uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , determine  $T(1,2,3)$ .

Temos

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

A imagem do vector  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$  é o vector  $\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = 6\mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2$ .



```
>> A=[-2 1 2; -1 2 3];
>> u=[1 2 3]';
>> w=A*u
w =
     6
    12
```

**15.12.** Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz canónica de uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , determine  $T(1, 2, 1)$ .

Temos

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

A imagem do vector  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$  é o vector  $\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = 2\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$ .



```
>> A=[-2 1 2; -1 2 3;-1 0 -1];
>> u=[1 2 1]';
>> w=A*u
w =
     2
     6
    -2
```

**15.13.** Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que consiste numa reflexão sobre o eixo dos  $\mathbf{yy}$ , seguida duma rotação de  $\pi/2$  (no sentido directo) e duma projecção ortogonal sobre o eixo dos  $\mathbf{yy}$ , determine  $T(2, 2)$ .

Como vimos, a uma reflexão sobre o eixo dos  $\mathbf{yy}$  corresponde a matriz de transformação

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, a uma rotação de um ângulo  $\theta$  no sentido directo corresponde a matriz de transformação

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

, e a uma projecção ortogonal sobre o eixo dos  $\mathbf{yy}$  corresponde a matriz de transformação

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo a transformação  $T$  uma composição das 3 transformações elementares, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{u} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$



```

>> A1=[-1 0;0 1];
>> teta=pi/2;
>> A2=[cos(teta) -sin(teta); sin(teta) cos(teta)];
>> A3=[0 0;0 1];
>> A=A3*A2*A1
A =
         0         0
    -1.0000    0.0000
>> u=[2 2]';
>> w=A*u
w =
         0
    -2.0000

```

**15.14.** Considere a seguinte matriz dos vértices de um triângulo em  $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine a imagem final (os vértices) do triângulo quando é reflectido sobre o eixo dos  $\mathbf{yy}$ , e depois rodado de  $\pi/2$  no sentido directo.

Dado que a uma reflexão sobre o eixo dos  $\mathbf{yy}$  corresponde a matriz de transformação

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, e a uma rotação de um ângulo  $\pi/2$  no sentido directo corresponde a matriz de transformação

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz da transformação é

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que os vértices do triângulo correspondem a vectores coluna correspondentes a cada uma das colunas da matriz  $\mathbf{T}_r$

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} [v1] & [v2] & [v3] \\ [ ] & [ ] & [ ] \end{bmatrix}$$

, resulta que ao produto  $\mathbf{A}\mathbf{T}_r$  corresponde uma matriz

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{T}_r &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [v1] & [v2] & [v3] \\ [ ] & [ ] & [ ] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [0 & -1] [v1] & [0 & -1] [v2] & [0 & -1] [v3] \\ [-1 & 0] [v1] & [-1 & 0] [v2] & [-1 & 0] [v3] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} [v1] & \mathbf{A} [v2] & \mathbf{A} [v3] \\ [ ] & [ ] & [ ] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [w1] & [w2] & [w3] \\ [ ] & [ ] & [ ] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

em que cada uma das colunas corresponde à imagem de cada um dos vértices do triângulo

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{T}_r &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



```
>> teta=pi/2;
>> A2=[cos(teta) -sin(teta);...
      sin(teta)   cos(teta)];
>> A=A2*A1;
>> Tr=[1 3 2;2 3 1];
>> A*Tr
ans =
    -2.0000    -3.0000    -1.0000
    -1.0000    -3.0000    -2.0000
```

---

 VERIFICAR SE UMA IMAGEM PODE RESULTAR DE UMA DADA TL
 

---

**15.15.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação linear tal que

$$T(1, 2, 0) = (-1, 0, 1)$$

$$T(1, 0, -1) = (0, -1, 0)$$

$$T(1, 1, 1) = (1, 1, -1)$$

O vector  $(2, 1, -1)$  pertencerá à imagem de  $T$ ? Justifique.

Designando por  $\mathbf{A}$  a matriz canónica da transformação, temos  $T(x, y, z) = \mathbf{A}(x, y, z)$ , logo, escrevendo a equação matricial das equações acima, resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

, logo

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para que  $(2, 1, -1)$  pertença à imagem de  $T$  o sistema

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

deverá ser possível. Sendo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

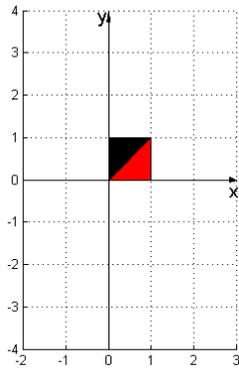
o sistema é impossível, logo  $(2, 1, -1)$  não pertence à imagem de  $T$ .

Alternativamente poderíamos ter determinado a expressão da transformação linear

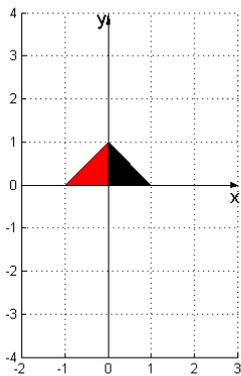
$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= \mathbf{A}(x, y, z) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= (x - y + z, z, -(x - y + z)) \end{aligned}$$

e ter concluído de imediato que  $(2,1,-1)$  não pertence à imagem de  $T$ , dado que todos os vectores pertencentes à imagem têm a primeira coordenada simétrica à terceira.

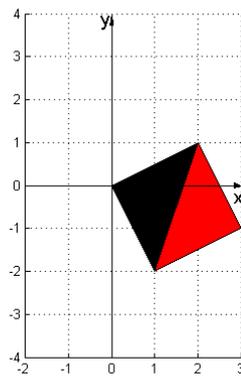
**15.16.** Diga quais das imagens, de b) a d), são compatíveis com uma transformação linear do objecto da figura a) e determine as transformações lineares correspondentes.



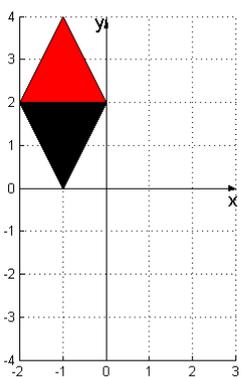
a)



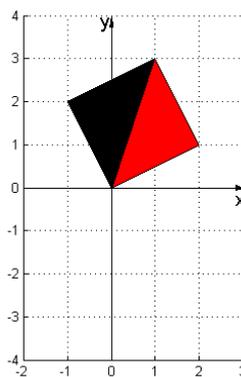
b)



c)



d)



e)

Dados um vector  $\mathbf{u}$  e um vector  $\mathbf{v}$  com a mesma direcção de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$ , e sendo a imagem de  $\mathbf{u}$  o vector  $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u}$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{A}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{A}k\mathbf{u} \\ &= k\mathbf{A}\mathbf{u} \\ &= k\mathbf{w} \end{aligned}$$

Numa transformação linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , vectores paralelos têm por imagem vectores paralelos, pelo que é imediato reconhecer que a imagem b) não resulta duma transformação linear do objecto a).

Numa transformação linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  a imagem do vector nulo é o vector nulo,  $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ , pelo que é imediato reconhecer que as imagens c) e d) não resultam duma transformação linear do objecto a).

Atendendo à imagem e), dado que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(1,0) = T(2,1) \\ T(\mathbf{e}_2) &= T(0,1) = T(-1,2) \end{aligned}$$

, e sendo a matriz da transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\mathbf{A} = [T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2)]$ , temos de imediato

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A transformação linear em causa é, portanto,

$$T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$$

Por exemplo, para a diagonal do quadrado, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{A}\mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**15.17.** Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

a matriz canónica da transformação linear  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , verifique se os vectores  $\mathbf{w}_1 = (4, -10, 8)$ ,  $\mathbf{w}_2 = (0, 0)$ ,  $\mathbf{w}_3 = (-8, 2, -8)$ ,  $\mathbf{w}_4 = (0, 0, 0)$  e  $\mathbf{w}_5 = (3, 2, 1)$  pertencem à imagem (ou contradomínio) de  $T$ .

O vector  $\mathbf{w}_2 = (0, 0)$  não pertence à imagem de  $T$ , dado que  $\mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^2$  e o contradomínio de  $T$  está contido em  $\mathbb{R}^3$ . O vector  $\mathbf{w}_4 = (0, 0, 0)$  pertence, dado que, para toda a transformação linear, a imagem do vector nulo é o vector nulo ( $\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{0}$ ).

Quanto aos vectores  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_3$  e  $\mathbf{w}_5$  podemos verificar se pertencem à imagem de  $T$  de diversos modos. Por exemplo, dado que  $\mathbf{A}$  é a matriz a transformação e tendo em atenção que

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

temos

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{u}_1$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema



```
>> A=[1 -3;2 3;0 -4];
```

```
>> B=[4 -10 8]';
```

```
>> rref([A B])
```

```
ans =
```

```
1      0     -2
0      1     -2
0      0      0
```

, concluímos que o sistema é possível, pelo que  $\mathbf{w}_1$  é uma imagem da transformação. Aliás (dado que o sistema é possível e determinado) podemos mesmo concluir que  $\mathbf{u}_1 = (-2, -2)$  é o objecto cuja imagem é  $\mathbf{w}_1$ .

De modo idêntico temos

$$\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{u}_3$$

$$\begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema



```
>> A=[1 -3;2 3;0 -4];
>> B=[-8 2 -8]';
>> rref([A B])
ans =
     1     0    -2
     0     1     2
     0     0     0
```

, concluímos que o sistema é possível, pelo que  $\mathbf{w}_3$  é uma imagem da transformação ( $\mathbf{u}_3 = (-2, 2)$  é o objecto cuja imagem é  $\mathbf{w}_3$ ).

Por último, temos

$$\mathbf{w}_5 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{u}_5$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema



```
>> A=[1 -3;2 3;0 -4];
>> B=[3 2 1]';
>> rref([A B])
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

, concluímos que o sistema é impossível, pelo que  $\mathbf{w}_3$  não é uma imagem da transformação.

Outro modo de abordar a questão seria **determinar o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelas colunas da matriz da transformação**. Ou seja, sendo  $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 2)$  e  $\mathbf{a}_2 = (-3, 3, -4)$  os vectores correspondentes às colunas da matriz da transformação, uma imagem,  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ , não é mais do que uma combinação linear destes vectores, sendo os coeficientes as coordenadas do objecto que lhe dá origem  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$

$$\mathbf{w} = u_1 \mathbf{a}_1 + u_2 \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{u}$$

O problema pode assim ser interpretado como um problema de determinação de um subespaço gerado por um conjunto de vectores. Resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

, recorrendo ao método de Gauss-Jordan, resulta



```
>> A=[1 -3;2 3;0 -4];
>> B=[w1 w2 w3].'
>> escalonar([A B])
[ 1, -3, w1]
[ 2, 3, w2]
[ 0, -4, w3]
Passo 1:
(-2)*L1 + L2 => L2
[ 1, -3, w1]
[ 0, 9, w2-2*w1]
[ 0, -4, w3]
Passo 2:
(1/9)*L2 => L2
[ 1, -3, w1]
[ 0, 1, 1/9*w2-2/9*w1]
[ 0, -4, w3]
Passo 3:
(3)*L2 + L1 ==> L1
(4)*L2 + L3 ==> L3
[ 1, 0, 1/3*w1+1/3*w2]
[ 0, 1, 1/9*w2-2/9*w1]
[ 0, 0, w3+4/9*w2-8/9*w1]
```

Concluimos que, para que o sistema seja possível, deverá ser

$$w_3 + \frac{4}{9}w_2 - \frac{8}{9}w_1 = 0 \Leftrightarrow 8w_1 - 4w_2 - 9w_3 = 0$$

Fica assim determinada a condição que caracteriza o subespaço das imagens. Podemos verificar que  $\mathbf{w}_1 = (4, -10, 8)$  e  $\mathbf{w}_3 = (-8, 2, -8)$  verificam a restrição  $(8 \times 4 - 4 \times (-10) - 9 \times 8 = 0)$  e  $8 \times (-8) - 4 \times 2 - 9 \times (-8) = 0$ , e portanto pertencem à imagem da transformação, mas  $\mathbf{w}_5 = (3, 2, 1)$  não verifica  $(8 \times 3 - 4 \times 2 - 9 \times 1 \neq 0)$ , e portanto não pertence à imagem.